ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

◆ Ε.2 ΣΥΝΟΛΑ

Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διανόησή μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο.

Τα αντικείμενα αυτά, που αποτελούν το σύνολο, ονομάζονται **στοιχεία** ή **μέλη** του συνόλου.

Με **N** συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών,

Με **Z** το σύνολο των ακεραίων αριθμών,

Με **Q** το σύνολο των ρητών αριθμών και

Με **R** το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

❖ Τα σύμβολα ∈ και ∉

Για να δηλώσουμε ότι το x είναι στοιχείο του συνόλου A, γράφουμε $x \in A$ και διαβάζουμε «το x ανήκει στο A», ενώ για να δηλώσουμε ότι το x δεν είναι στοιχείο του συνόλου A γράφουμε $x \notin A$ και διαβάζουμε «το x δεν ανήκει στο A».

❖ Παράσταση συνόλων

α) Όταν δίνονται όλα τα στοιχεία του και είναι λίγα σε πλήθος, τότε γράφουμε τα στοιχεία αυτά μεταξύ δύο αγκίστρων, χωρίζοντάς τα με το κόμμα.

Ο παραπάνω τρόπος παράστασης ενός συνόλου λέγεται «παράσταση του συνόλου με **αναγραφή** των στοιχείων του».

α) Αν από ένα σύνολο Ω επιλέγουμε εκείνα τα στοιχεία του, που έχουν μια ορισμένη ιδιότητα Ι, τότε φτιάχνουμε ένα νέο σύνολο που συμβολίζεται με:
$\{x \in \Omega | x$ έχει την ιδιότητα Ι$\}$ και διαβάζεται «Το σύνολο των $x \in \Omega$, όπου x έχει την ιδιότητα Ι».

Ο παραπάνω τρόπος παράστασης ενός συνόλου λέγεται «παράσταση του συνόλου με **περιγραφή** των στοιχείων του».

❖ Ίσα σύνολα

Δύο σύνολα A και B λέγονται **ίσα**, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.
Με άλλα λόγια:
«Δύο σύνολα A και B λέγονται ίσα, όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B και αντιστρόφως κάθε στοιχείο του B είναι και στοιχείο του A».
Στην περίπτωση αυτή γράφουμε **A = B**.

❖ Υποσύνολα συνόλου

Ένα σύνολο A λέγεται **υποσύνολο** ενός συνόλου B, όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B.

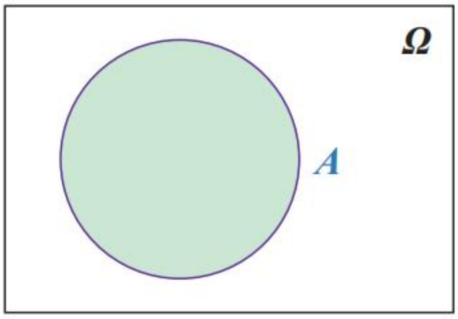
Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $A \subseteq B$.

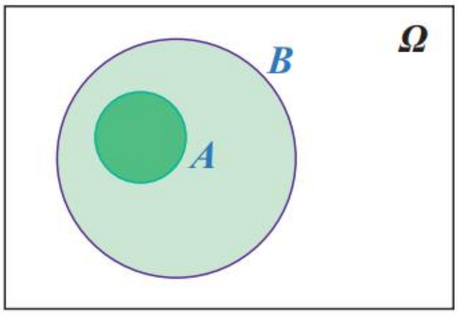
Άμεσες συνέπειες του ορισμού είναι οι:
i) $A \subseteq A$, για κάθε σύνολο Α.
ii) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$, τότε $A \subseteq \Gamma$.
iii) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, τότε $A=B$.

❖ Το κενό σύνολο

Το σύνολο αυτό,
που δεν έχει κανένα στοιχείο, λέγεται **κενό σύνολο** και συμβολίζεται με Ø ή { }.
Δηλαδή:
Κενό σύνολο είναι το σύνολο που δεν έχει στοιχεία.
Δεχόμαστε ότι το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.

❖ Διαγράμματα Venn

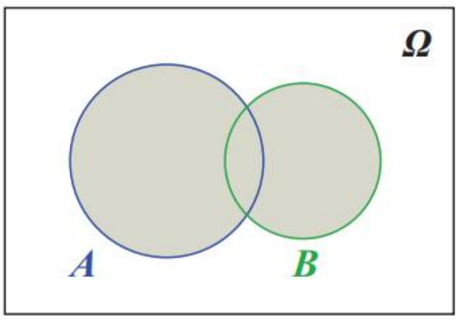




Μια εποπτική παρουσίαση των συνόλων και των μεταξύ τους σχέσεων γίνεται με τα διαγράμματα Venn.
• Κάθε φορά που εργαζόμαστε με σύνολα, τα σύνολα αυτά θεωρούνται υποσύνολα ενός συνόλου που λέγεται **βασικό σύνολο** και συμβολίζεται με **Ω**. Για παράδειγμα, τα σύνολα N, και , είναι υποσύνολα του βασικού συνόλου Ω = R.
Το βασικό σύνολο συμβολίζεται με το εσωτερικό ενός ορθογωνίου, ενώ κάθε υποσύνολο ενός βασικού συνόλου παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης που περιέχεται στο εσωτερικό του ορθογωνίου.

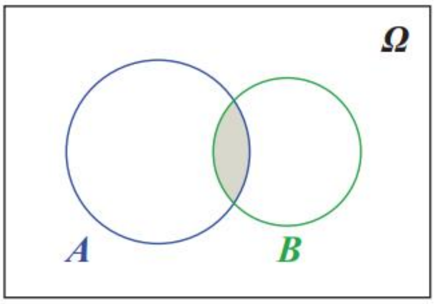
• Αν $A \subseteq B$, τότε το Α παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης που περιέχεται στο εσωτερικό της κλειστής καμπύλης που παριστάνει το Β.

❖ Πράξεις με σύνολα



Ένωση δύο υποσυνόλων Α, Β ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν τουλάχιστον σε ένα από τα σύνολα Α και Β και συμβολίζεται με $A \cup B$.

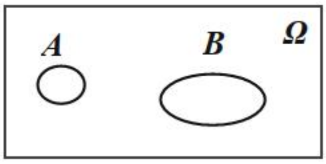
Δηλαδή είναι:
$A \cup B = \{x \in \Omega / \ x \in A \text{ ή } x \in B\}$



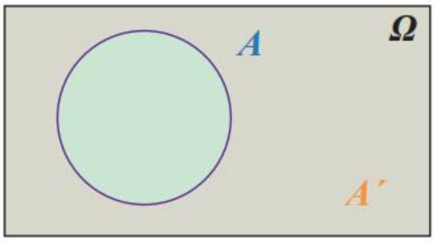
Τομή δύο υποσυνόλων Α, Β ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν και στα δύο σύνολα Α, Β και συμβολίζεται με **$A \cap B$**.

Δηλαδή είναι:

$A \cup B = \{x \in \Omega / x \in A$ και $x \in B\}$



Στην περίπτωση που δύο σύνολα Α και Β δεν έχουν κοινά στοιχεία, δηλαδή όταν **$A \cap B = \varnothing$** , τα δύο σύνολα λέγονται **ξένα** μεταξύ τους.



Συμπλήρωμα ενός υποσυνόλου Α ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που δεν ανήκουν στο Α και συμβολίζεται με **A'**.

Δηλαδή είναι:

$A = \{x \in \Omega\ ' / x \notin A\}$

2 ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ

- Κάθε **ρητός** αριθμός έχει (ή μπορεί να πάρει) **κλασματική μορφή**, δηλαδή τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι, με $\beta \neq 0$.

Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να γραφεί ως δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός και, **αντιστρόφως**, κάθε δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός μπορεί να πάρει κλασματική μορφή.

- Υπάρχουν όμως και αριθμοί που **δεν μπορούν να πάρουν τη μορφή** $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι, με $\beta \neq 0$ (ή, με άλλα λόγια, δεν μπορούν να γραφούν ούτε ως δεκαδικοί ούτε ως περιοδικοί δεκαδικοί). Οι αριθμοί αυτοί λέγονται **άρρητοι** αριθμοί.

Πράξεις

Στους πραγματικούς αριθμούς ορίστηκαν οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και, με τη βοήθειά τους, η αφαίρεση και η διαίρεση.

• Για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ισχύουν οι ιδιότητες που αναφέρονται στον επόμενο πίνακα, οι οποίες και αποτελούν τη βάση του αλγεβρικού λογισμού.

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	$\alpha\beta=\beta\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$	$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$
Ουδέτερο Στοιχείο	$\alpha+0=\alpha$	$\alpha\cdot 1=\alpha$
Αντίθετος/Αντίστροφος Αριθμού	$\alpha+(-\alpha)=0$	$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1,\ \alpha\neq 0$
Επιμεριστική	$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$	

Ο αριθμός **0** λέγεται και **ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης**, διότι προστιθέμενος σε οποιονδήποτε αριθμό δεν τον μεταβάλλει. Επίσης ο αριθμός **1** λέγεται και **ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού**, διότι οποιοσδήποτε αριθμός πολλαπλασιαζόμενος με αυτόν δεν μεταβάλλεται.

- Η **αφαίρεση** και η **διαίρεση** ορίζονται με τη βοήθεια της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αντιστοίχως ως εξής: $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$ και $\alpha:\beta=\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\frac{1}{\beta},\ \beta\neq 0$.

Δηλαδή:
Για να βρούμε τη διαφορά **α – β,** προσθέτουμε στο μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου, ενώ για να βρούμε το πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta}$, με $\beta \neq 0$, πολλαπλασιάζουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη .

❖ Ιδιότητες των πράξεων

1. $(\alpha = \beta \text{ και } \gamma = \delta) \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta$
δηλαδή, δυο ισότητες μπορούμε να τις προσθέσουμε κατά μέλη.

2. $(\alpha = \beta \text{ και } \gamma = \delta) \Rightarrow \alpha\gamma = \beta\delta$
δηλαδή, δυο ισότητες μπορούμε να τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη.

3. $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$
δηλαδή, μπορούμε και στα δυο μέλη μιας ισότητας να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό.

4. **Αν** $\gamma \neq 0$**, τότε:** $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma = \beta\gamma$
δηλαδή, μπορούμε και τα δυο μέλη μιας ισότητας να τα πολλαπλασιάσουμε ή να τα διαιρέσουμε με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό.

5. $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$
δηλαδή, το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών είναι ίσο με το μηδέν, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς είναι ίσος με το μηδέν.

Άμεση συνέπεια της ιδιότητας αυτής είναι η ακόλουθη:
$\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$.

❖ Δυνάμεις

Αν ο **α είναι πραγματικός** αριθμός και ο **ν φυσικός,** τότει:

$\alpha^{\nu} = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha$, για $\nu > 1$
(ν παράγοντες)

$\alpha^1 = \alpha$, για $\nu = 1$

Αν επιπλέον είναι $\alpha \neq 0$, τότε ορίσαμε ότι: $\alpha^0 = 1$ και $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}$

Στον επόμενο πίνακα συνοψίζονται οι ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο, με την προϋπόθεση ότι κάθε φορά ορίζονται οι δυνάμεις και οι πράξεις που σημειώνονται.

$$\alpha^{\kappa}\cdot\alpha^{\lambda}=\alpha^{\kappa+\lambda} \qquad \frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}}=\alpha^{\kappa-\lambda}$$

$$\alpha^{\kappa}\cdot\beta^{\kappa}=(\alpha\beta)^{\kappa} \qquad \frac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}$$

$$(\alpha^{\kappa})^{\lambda}=\alpha^{\kappa\lambda}$$

Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών λέγεται **ταυτότητα**.

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$$

$$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$$

$$\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)$$

$$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$

$$(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$$

$$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$$

Μέθοδοι απόδειξης

Τα διαβάζουμε προσεχτικά

1η) Ευθεία Απόδειξη

Για την απόδειξη μιας συνεπαγωγής ξεκινάμε με την υπόθεση και με διαδοχικά βήματα καταλήγουμε στο συμπέρασμα. Μια τέτοια διαδικασία λέγεται **ευθεία απόδειξη**.

Σ χ ό λ ι α

1. Για να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός είναι αληθής, μερικές φορές με διαδοχικούς μετασχηματισμούς καταλήγουμε σε έναν λογικά ισοδύναμο ισχυρισμό που είναι αληθής. Έτσι συμπεραίνουμε ότι και ο αρχικός ισχυρισμός είναι αληθής.

2. Για να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός **δεν είναι πάντα αληθής**, αρκεί να βρούμε ένα παράδειγμα για το οποίο ο συγκεκριμένος ισχυρισμός δεν ισχύει ή, όπως λέμε, αρκεί να βρούμε ένα **αντιπαράδειγμα.**

2η) Μέθοδος της Απαγωγής σε Άτοπο

Με τη μέθοδο αυτή **υποθέτουμε ότι δεν ισχύει αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε** και χρησιμοποιώντας αληθείς προτάσεις **φθάνουμε σε ένα συμπέρασμα που έρχεται σε αντίθεση με αυτό που γνωρίζουμε ότι ισχύει**. Οδηγούμαστε όπως λέμε σε **άτοπο**.

◆ 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

❖ Έννοια της διάταξης

Ορισμός: Ένας αριθμός α λέμε ότι είναι **μεγαλύτερος** από έναν αριθμό β, και γράφουμε **α > β**, όταν η διαφορά **α – β** είναι θετικός αριθμός.

Στην περίπτωση αυτή λέμε επίσης ότι ο β είναι **μικρότερος** του α και γράφουμε **β < α**.

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει αμέσως ότι:
- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν.
- Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το μηδέν.

Έτσι ο αρχικός ορισμός γράφεται ισοδύναμα:
$\boldsymbol{\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0}$
Γεωμετρικά η ανισότητα $\alpha > \beta$ σημαίνει ότι, πάνω στον άξονα των πραγματικών ο αριθμός α είναι δεξιότερα από τον β.

Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει **α > β ή α = β** , τότε γράφουμε **α ≥ β** και διαβάζουμε: **«α μεγαλύτερος ή ίσος του β»**.

Από τον τρόπο με τον οποίο γίνονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, προκύπτει ότι:

1. $(\alpha > 0 \text{ και } \beta > 0) \Rightarrow \alpha + \beta > 0$
2. $(\alpha < 0 \text{ και } \beta < 0) \Rightarrow \alpha + \beta < 0$
3. α, β ομόσημοι $\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} > 0$
4. α, β ετερόσημοι $\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta < 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} < 0$

5. **$\alpha^2 \geq 0$, για κάθε $\alpha \in R$**
(Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\alpha = 0$)

❖ Από την τελευταία εύκολα προκύπτουν και οι ισοδυναμίες:
$\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ και $\beta = 0$
$\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$

Πολύ χρήσιμες ισοδυναμίες

Ιδιότητες των ανισοτήτων

1. $(\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma) \Rightarrow \alpha > \gamma$
2. $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
3. Αν $\gamma > 0$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$
   Αν $\gamma < 0$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$
4. $(\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta) \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$
5. Για **θετικούς** αριθμούς α, β, γ, δ ισχύει η συνεπαγωγή:$(\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta) \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

Η ιδιότητες 4 και 5 ισχύουν και για περισσότερες ανισότητες. Συγκεκριμένα:
✓ $(\alpha_1 > \beta_1$ και $\alpha_2 > \beta_2$ και … και $\alpha_\nu > \beta_\nu) \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu > \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu$
✓ Αν, επιπλέον, τα μέλη των ανισοτήτων είναι **θετικοί** αριθμοί, τότε:
$(\alpha_1 > \beta_1$ και $\alpha_2 > \beta_2$ και … και $\alpha_\nu > \beta_\nu) \Rightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\nu > \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_\nu$

6. Για **θετικούς** αριθμούς α, β και **θετικό ακέραιο ν** ισχύει η ισοδυναμία: **$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$** (1)

Για θετικούς αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο ν ισχύει η ισοδυναμία:
$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$

Απόδειξη

• Έστω $\alpha = \beta$. Τότε, από τον ορισμό της ισότητας προκύπτει, όπως είπαμε και προηγουμένως, ότι $\alpha^\nu = \beta^\nu$.
• Για την απόδειξη του αντιστρόφου θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Έστω λοιπόν ότι αν $= \beta\nu$ και $\alpha \neq \beta$. Τότε:
αν ήταν $\alpha > \beta$, λόγω της (1) , θα είχαμε $\alpha^\nu > \beta^\nu$ (άτοπο), ενώ
αν ήταν $\alpha < \beta$, λόγω της (1), θα είχαμε $\alpha^\nu < \beta^\nu$ (άτοπο).
Άρα, $\alpha = \beta$.

Μεγάλη προσοχή!!!

Σχόλια

1ο Σύμφωνα με την ιδιότητα 4, αν δυο ανισότητες της ίδιας φοράς τις προσθέσουμε κατά μέλη, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς.
Δεν ισχύει αυτό όμως στην αφαίρεση.
2ο Επίσης, σύμφωνα με την ιδιότητα 5, αν δυο ανισότητες της ίδιας φοράς με θετικούς, όμως, όρους τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς.
Δεν ισχύει αυτό όμως στη διαίρεση.

Δηλαδή: **Δεν διαιρούμε, ούτε αφαιρούμε ανισότητες κατά μέλη!!!**

❖ Διαστήματα

✓ Το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $\alpha \leq x \leq \beta$ λέγεται **κλειστό διάστημα από α**

μέχρι β και συμβολίζεται με **[α, β]**.

- ✓ Αν τώρα από το κλειστό διάστημα **[α, β]** παραλείψουμε τα α και β προκύπτει το αντίστοιχο **ανοικτό διάστημα από το α μέχρι β** που συμβολίζεται με **(α, β)**.

- ✓ Οι αριθμοί **α** και **β** λέγονται **άκρα των διαστημάτων** αυτών και κάθε αριθμός μεταξύ των **α** και **β** λέγεται **εσωτερικό σημείο** αυτών.

- ✓ Η διαφορά δηλαδή μεταξύ ενός κλειστού και του αντίστοιχου ανοικτού διαστήματος είναι ότι το πρώτο περιέχει τα άκρα του, ενώ το δεύτερο δεν τα περιέχει.

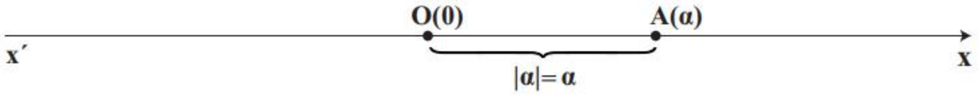
Άλλες μορφές διαστημάτων είναι:
- ✓ Το **ανοικτό δεξιά διάστημα [α, β)** που αποτελείται από τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $\boldsymbol{\alpha \le x < \beta}$ και
- ✓ Το **ανοικτό αριστερά διάστημα (α, β]** που αποτελείται από τους αριθμούς με x για τους οποίους ισχύει $\boldsymbol{\alpha < x \le \beta}$.

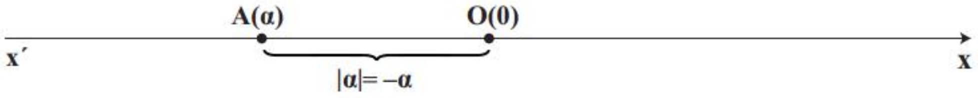
Τέλος, υπό μορφή διαστήματος,
- ✓ Το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους ισχύει $\boldsymbol{\alpha \le x}$ συμβολίζεται με **[α, +∞)**, ενώ
- ✓ Το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους ισχύει $\boldsymbol{x \le \alpha}$ συμβολίζεται με **(–∞, α]**.
- ✓ Με ανάλογο τρόπο ορίζονται και τα διαστήματα **(α, +∞)** και **(–∞, α)**. Τα σύμβολα +∞ και –∞, που διαβάζονται **«συν άπειρο»** και **«πλην άπειρο»** αντιστοίχως, δεν παριστάνουν πραγματικούς αριθμούς.

◆ 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

<u>Ο ρ ι σ μ ό ς τ η ς α π ό λ υ τ η ς τ ι μ ή ς</u>

● **<u>Γεωμετρικός ορισμός</u>**





Θεωρούμε έναν αριθμό α που παριστάνεται με το σημείο Α πάνω σε έναν άξονα.
Η <u>απόσταση του σημείου Α από την αρχή Ο,</u> δηλαδήτο μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΟΑ, ονομάζεται **απόλυτη τιμή** του αριθμού α και συμβολίζεται με |α|.

● **<u>Αλγεβρικός ορισμός</u>**

Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με |α| και ορίζεται από τον τύπο:

$$|\alpha| = \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}, & \text{αν } \alpha \ge 0 \\ \boldsymbol{-\alpha}, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

Ισχύει:

I. $|\alpha| = |-\alpha| \geq 0$
II. $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \geq -\alpha$
III. $|\alpha|^2 = \alpha^2$

Μαθαίνουμε καλά τους τύπους, για να τους χρησιμοποιήσουμε στις ασκήσεις

Αν θ > 0, τότε:
• $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$
• $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$

Ιδιότητες των απολύτων τιμών

1. $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$
2. $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$
3. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Απόδειξη

Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:
$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta|^2 = (|\alpha| \cdot |\beta|)^2$
$\Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta|^2 = |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2$
$\Leftrightarrow (\alpha \cdot \beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2$, που ισχύει.
2. Αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο.

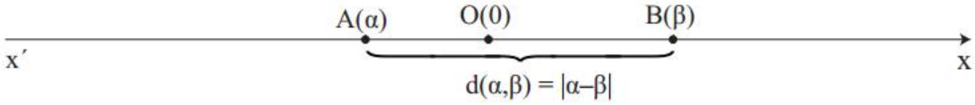
3. Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:
$|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow |\alpha+\beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2$
$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha| \cdot |\beta|$
$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2 + 2|\alpha\beta|$
$\Leftrightarrow \alpha\beta \leq |\alpha\beta|$, που ισχύει.

Είναι φανερό ότι η ισότητα **$\alpha\beta = |\alpha\beta|$ ισχύει αν και μόνο αν $\alpha\beta \geq 0$** , δηλαδή αν και μόνο αν οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

Σχόλιο:
Η ισότητα $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ ισχύει και για περισσότερους παράγοντες.
Συγκεκριμένα:
$|\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\nu| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \cdot \ldots \cdot |\alpha_\nu|$
Στην ειδική μάλιστα περίπτωση που είναι $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\nu = \alpha$, έχουμε:
$|\alpha^\nu| = |\alpha|^\nu$
• Η ανισότητα $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ ισχύει και για περισσότερους προσθετέους.
Συγκεκριμένα:
$|\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_\nu|$

Απόσταση σημείων

Ας θεωρήσουμε δυο αριθμούς α και β που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία Α και Β αντιστοίχως.

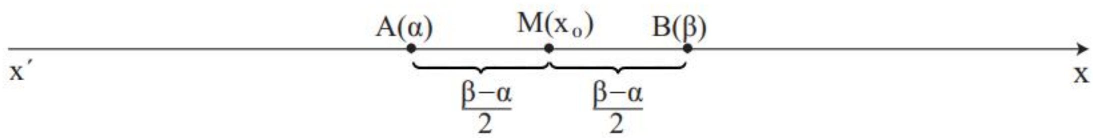


Το μήκος του τμήματος ΑΒ λέγεται **απόσταση** των αριθμών α και β, συμβολίζεται με d(α,β) και είναι ίση με |α – β|. Είναι δηλαδή:

$d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$

Προφανώς ισχύει **$d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$**. Στην περίπτωση μάλιστα που είναι $\alpha < \beta$, τότε η απόσταση των α και β είναι ίση με $\beta - \alpha$ και λέγεται **μήκος** του διαστήματος $[\alpha, \beta]$.

- Ας θεωρήσουμε τώρα ένα διάστημα [α, β] και ας ονομάσουμε Α και Β τα σημεία που παριστάνουν στον άξονα τα άκρα α και β αντιστοίχως.



Αν $M(x_0)$ είναι το μέσον του τμήματος ΑΒ, τότε έχουμε

$$\begin{aligned}(MA) = (MB) &\Leftrightarrow d(x_0, \alpha) = d(x_0, \beta)\\ &\Leftrightarrow |x_0 - \alpha| = |x_0 - \beta|\\ &\Leftrightarrow x_0 - \alpha = \beta - x_0, \qquad (\text{αφού } \alpha < x_0 < \beta)\\ &\Leftrightarrow 2x_0 = \alpha + \beta\\ &\Leftrightarrow x_0 = \frac{\alpha+\beta}{2}\end{aligned}$$

Ο αριθμός $\frac{\alpha+\beta}{2}$ που αντιστοιχεί στο μέσον Μ του τμήματος ΑΒ λέγεται **κέντρο** του διαστήματος [α, β], ενώ ο αριθμός $\rho = \frac{\beta-\alpha}{2}$ λέγεται **ακτίνα** του [α, β].

Ως μήκος, κέντρο και ακτίνα των διαστημάτων (α, β), [α, β) και (α, β] ορίζουμε το μήκος, το κέντρο και την ακτίνα του διαστήματος [α, β].

Ισχύουν οι σχέσεις:

- **$|x| < \rho \Leftrightarrow x \in (-\rho, \rho) \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$**

.

- **$|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho$ ή $x > \rho$**

Μαθαίνουμε τις δύο σχέσεις πολύ καλά

2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τετραγωνική ρίζα μη αρνητικού αριθμού

Ορισμός

Η **τετραγωνική ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον α.

✓ Αν $\alpha \geq 0$, η $\sqrt{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = \alpha$.

Ιδιότητες

- $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$
- $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$
- $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

ν-οστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού

Ορισμός

Η **ν-οστή ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στην ν, δίνει τον α .

Επίσης γράφουμε:

$\sqrt[1]{\alpha} = \alpha$ και $\sqrt[2]{\alpha} = \sqrt{\alpha}$

Μπορούμε επομένως να πούμε ότι:

✓ Αν $\alpha \geq 0$, τότε η $\sqrt[\nu]{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^\nu = \alpha$.

Ιδιότητες των ριζών

- Αν $\alpha \geq 0$, τότε:

  $(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu = \alpha$ και $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = |\alpha|$.

- Αν $\alpha \leq 0$ και ν άρτιος, τότε:

  $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = |\alpha|$.

Αν α, β ≥ 0, τότε:

1. $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}$

2. $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}=\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ (εφόσον $\beta\neq 0$)

Απόδειξη

1. Έχουμε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}\Leftrightarrow(\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta})^{\nu}=(\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta})^{\nu}$$
$$\Leftrightarrow(\sqrt[\nu]{\alpha})^{\nu}\cdot(\sqrt[\nu]{\beta})^{\nu}=\alpha\cdot\beta$$
$$\Leftrightarrow\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\beta,\qquad \text{που ισχύει.}$$

2. Αποδεικνύεται όπως και η 1.

Σχόλιο
Η ιδιότητα 1 ισχύει και για περισσότερους από δυο μη αρνητικούς παράγοντες.

❖ *Δυνάμεις με ρητό εκθέτη*

Ορισμός

Αν **α** > **0**, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε: $\boldsymbol{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}}$.

Επιπλέον, αν μ, ν θετικοί ακέραιοι, τότε ορίζουμε : $\boldsymbol{0^{\frac{\mu}{\nu}}=0}$

Σχόλιο
Οι ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη ισχύουν και για δυνάμεις με ρητό εκθέτη.

3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

◆ 3.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

Η εξίσωση αx + β = 0

Έχουμε

$$\alpha x+\beta=0 \Leftrightarrow \alpha x+\beta-\beta=-\beta$$
$$\Leftrightarrow \alpha x=-\beta$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

- Αν $\alpha \neq 0$ τότε:

$$\alpha x=-\beta \Leftrightarrow x=-\frac{\beta}{\alpha}$$

Επομένως, αν $\alpha \neq 0$ η εξίσωση έχει **ακριβώς μία λύση**, την $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

- Αν $\alpha = 0$, τότε η εξίσωση $\alpha x = -\beta$ γίνεται $0x = -\beta$, η οποία:

i. αν είναι $\beta \neq 0$ δεν έχει λύση και γι' αυτό λέμε ότι είναι **αδύνατη**, ενώ
ii. αν είναι $\beta = 0$ έχει τη μορφή $0x = 0$ και αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x δηλαδή είναι **ταυτότητα**.

Η λύση της εξίσωσης $\alpha x + \beta = 0$ και γενικά κάθε εξίσωσης λέγεται και **ρίζα** αυτής.

➢ Παραμετρικές εξισώσεις

Όταν οι συντελεστές α, β της εξίσωσης $\alpha x+\beta=0$ εκφράζονται με τη βοήθεια γραμμάτων , τα γράμματα αυτά λέγονται **παράμετροι** και η εξίσωση ονομάζεται **παραμετρική**. Η εργασία που κάνουμε για την εύρεση του πλήθους των λύσεων, λέγεται **διερεύνηση**.

✓ Για την επίλυση των παραμετρικών εξισώσεων ακολουθούμε την διαδικασία:
Φέρνουμε την εξίσωση στη μορφή $\alpha x = \beta$ (1)
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:
i) Για $\alpha \neq 0$, η (1) $\Leftrightarrow x = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ και λέμε ότι η εξίσωση έχει **μία λύση**.

ii) Για $\alpha = 0$, αντικαθιστούμε την τιμή στην (1) και:
α) αν καταλήγουμε στην εξίσωση $0x= \kappa$ με $\kappa \neq 0$, δεν υπάρχει λύση και η εξίσωση είναι **αδύνατη**
β) αν καταλήγουμε στην εξίσωση $0x = 0$, αληθεύει γιά κάθε τιμή του x και η εξίσωση είναι **αόριστη ή ταυτότητα**.

➢ Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού

Παρατηρήσεις:

1. Επίλυση κλασματικής εξίσωσης

α. Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές, βρίσκουμε το ΕΚΠ και βάζουμε **περιορισμούς** . Δηλ. Βρίσκουμε τις τιμές του x για τις οποίες το **ΕΚΠ≠0**

β. Πολλαπλασιάζουμε **όλους τους όρους και στα δύο μέλη** με το ΕΚΠ και κάνουμε απλοποιήσεις. (Απαλοιφή παρονομαστών)

γ. Εκτελούμε τις πράξεις , εφαρμόζοντας επιμεριστική ιδιότητα , όπου χρειάζεται.

δ. "Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους" και κανουμε αναγωγή όμοιων όρων.

ε. Διαιρούμε και τα δύο μέλη με το συντελεστή του αγνώστου.

στ. **Ελέγχουμε** αν οι λύσεις που βρήκαμε είναι δεκτές.

2. Επίλυση της εξίσωσης : $|f(x)| = |g(x)|$

Με τη χρήση της σχέσης $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$

λύνουμε τις εξισώσεις $f(x) = g(x)$ ή $f(x) = -g(x)$

3. Επίλυση της εξίσωσης : $|f(x)| = g(x)$

Βρίσκουμε τις τιμές του x για τις οποίες : $g(x) \geq 0$ και μετά λύνουμε τις εξισώσεις :

$f(x) = g(x)$ ή $f(x) = -g(x)$

Στο τέλος **ελέγχουμε** αν οι λύσεις που βρήκαμε είναι **δεκτές.**

◆ 3.2 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^\nu = \alpha$

1. Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, με **$\alpha > 0$** και **ν άρτιο** φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς δύο λύσεις, τις $\sqrt[\nu]{\alpha}$ ή $-\sqrt[\nu]{\alpha}$

2. Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, με **$\alpha < 0$** και **ν περιττό** φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μία λύση, την $-\sqrt[\nu]{|\alpha|}$

3. Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, με **$\alpha < 0$** και **ν άρτιο** φυσικό αριθμό, είναι **αδύνατη.**

Από τα παραπάνω συμπεράσματα και από το γεγονός ότι η εξίσωση $x^\nu = \alpha^\nu$, με $\nu \in \mathbb{N}^*$, έχει προφανή λύση τη $x = \alpha$, προκύπτει ότι:

• Αν ο **ν περιττός**, τότε η εξίσωση $x^\nu = \alpha^\nu$ έχει **μοναδική λύση**, τη **$x = \alpha$.**

• Αν ο **ν άρτιος**, τότε η εξίσωση $x^\nu = \alpha^\nu$ έχει **δύο λύσεις, τις $x_1 = \alpha$ και $x_2 = -\alpha$.**

◆ 3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Β΄ΒΑΘΜΟΥ

● Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ (γιατί;), ονομάζεται **εξίσωση δευτέρου βαθμού**.

Επίλυση εξίσωσης β΄βαθμού:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \qquad [\text{αφού } \alpha \neq 0]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x = -\frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x \cdot \frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x \cdot \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} = -\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$$

Αν θέσουμε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, τότε η τελευταία εξίσωση γίνεται:

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2} \qquad (2)$$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- Αν **Δ> 0**, τότε έχουμε:

$$x + \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ ή } x + \frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

δηλαδή

$$x = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ ή } x = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Επομένως η εξίσωση (2), άρα και η ισοδύναμή της (1), έχει δύο λύσεις άνισες, τις:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ και } x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Για συντομία οι λύσεις αυτές γράφονται

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}.$$

- Αν **Δ = 0**, τότε η εξίσωση (2) γράφεται:

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right) \cdot \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\beta}{2\alpha}=0 \quad ή \quad x+\frac{\beta}{2\alpha}=0$$
$$\Leftrightarrow x=-\frac{\beta}{2\alpha} \quad ή \quad x=-\frac{\beta}{2\alpha}$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η εξίσωση έχει **διπλή ρίζα** την $-\frac{\beta}{2\alpha}$.

• Αν $\boldsymbol{\Delta < 0}$, τότε η εξίσωση (2), άρα και η ισοδύναμή της (1), δεν έχει πραγματικές ρίζες, δηλαδή είναι **αδύνατη** στο $\mathbb{R}$.

Η αλγεβρική παράσταση $\boldsymbol{\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma}$, από την τιμή της οποίας εξαρτάται το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, ονομάζεται **διακρίνουσα** αυτής .

Συνοψίζουμε:

$\Delta= \beta^2 - 4\alpha\gamma$	Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha\neq0$
Δ>0	Έχει **δύο άνισες ρίζες** : $\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}$
Δ=0	Έχει **δύο ίσες ρίζες ή μια διπλή** : $\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-\beta}{2\alpha}}$
Δ<0	Είναι **αδύνατη στο R**

❖ Άθροισμα και Γινόμενο ριζών(τύποι του vieta)

Στην εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma =0$, $\alpha\neq0$ συμβολίζουμε με **S** το άθροισμα x_1+x_2 και με **P** το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$ των ριζών της.

Θα αποδείξουμε ότι : $\boxed{S =-\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad P = \frac{\gamma}{\alpha}}$

Μαθαίνουμε πολύ καλά τους τύπους και τις αποδείξεις

Απόδειξη

$$x_1+x_2 = \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\beta}{2\alpha} = \frac{-\beta}{\alpha}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \cdot \frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{(-\beta)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2-(\beta^2-4\alpha\gamma)}{4\alpha^2} =$$

$$= \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

➢ Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha\neq0$, με τη βοήθεια των τύπων του Vieta , γίνεται:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma =0 \Leftrightarrow \alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 - (x_1+x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις β΄βαθμού

1. Κλασματικές εξισώσεις

Στις κλασματικές εξισώσεις (εξισώσεις με μεταβλητή στν παρονομαστή):

- ✓ Πρώτα βρίσκουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών και μετά για ποιες τιμές της μεταβλητής το ΕΚΠ≠0 (Δηλ. για ποιες τιμές ορίζονται τα κλάσματα, άρα και η εξίσωση)
- ✓ Πολλαπλασιάζουμε **όλους τους όρους και στα δύο μέλη** με το ΕΚΠ και κάνουμε απλοποιήσεις.
- ✓ Εκτελούμε τις πράξεις.
- ✓ Λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει, όπως ξέρουμε, ανάλογα με το βαθμό της.
- ✓ Δεν ξεχνάμε στο τέλος να ελέγξουμε αν οι λύσεις που βρήκαμε είναι δεκτές. Δηλ. αν είναι διαφορετικές από τις τιμές της μεταβλητής που έχουμε βρει στους αρχικούς περιορισμούς.

2. Διτετράγωνες εξισώσεις είναι της μορφής:

$\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$.

Θέτουμε: $\boxed{x^2 = \omega}$ (1), οπότε η εξίσωση γίνεται: $\alpha\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0$ και λύνουμε την δευτεροβάθμια εξίσωση. Αφού βρούμε τις λύσεις (εφ΄οσον υπάρχουν), αντικαθιστούμε στην (1) και υπολογίζουμε τις λύσεις της αρχικής εξίσωσης.

3. Εξισώσεις της μορφής: **$\alpha(P(x))^2 + \beta(P(x)) + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$.**

Θέτουμε : $\boxed{P(x) = \omega}$ (1), οπότε η εξίσωση γίνεται: $\alpha\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0$ και λύνουμε την δευτεροβάθμια εξίσωση. Αφού βρούμε τις λύσεις (εφ΄οσον υπάρχουν), αντικαθιστούμε στην (1) και υπολογίζουμε τις λύσεις της αρχικής εξίσωσης.

4 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ Α΄ΒΑΘΜΟΥ

Οι ανισώσεις $\alpha x+\beta>0$ και $\alpha x+\beta<0$

Στις προηγούμενες τάξεις είχαμε μάθει να επιλύουμε ανισώσεις της μορφής :
$\alpha x+\beta>0$ και $\alpha x+\beta<0$.
Θυμίζουμε : $\alpha x+\beta>0 \Leftrightarrow \alpha x>-\beta$ (1)
Οπότε διακρίνουμε περιπτώσεις: i) Αν $\alpha>0$, τότε: (1) $\Leftrightarrow \frac{\alpha x}{\alpha}>\frac{-\beta}{\alpha}$

$\Leftrightarrow x>\frac{-\beta}{\alpha}$

ii) Αν $\alpha<0$, τότε: (1) $\Leftrightarrow \frac{\alpha x}{\alpha}<\frac{-\beta}{\alpha}$

$\Leftrightarrow x<\frac{-\beta}{\alpha}$

iii) Αν $\alpha=0$, τότε: (1) $\Leftrightarrow 0x>-\beta$, που

- **αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$**, αν $\beta>0$
- **είναι αδύνατη** , αν $\beta\le 0$.

Ανισώσεις με απόλυτες τιμές

Γίνεται χρήση των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών:

$|x|<\theta \Leftrightarrow -\theta<x<\theta, \quad (\theta>0)$

$|x|>\theta \Leftrightarrow x<-\theta$ ή $x>\theta, \quad (\theta>0)$

Σχόλιο

Σε ασκήσεις όπου μας ζητούν **να βρούμε τις κοινές λύσεις** δύο ή περισσότερων ανισώσεων, λύνουμε την κάθε μία ξεχωριστά και στο τέλος “συναληθεύουμε” τις λύσεις των επί μέρους ανισώσεων που βρήκαμε. Συνήθως τις παριστάνουμε στην ευθεία των πραγματικών αροθμών.

4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ Β΄ΒΑΘΜΟΥ

Μορφές τριωνύμου

Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

$$= \alpha\left[x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{\beta}{2\alpha} + \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha}\right]$$

$$= \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2}\right].$$

Επομένως:

$$\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2}\right]} \qquad (1).$$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- $\boldsymbol{\Delta > 0}$. Τότε ισχύει $\Delta = (\sqrt{\Delta})^2$, οπότε έχουμε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)^2\right]$$

$$= \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)$$

$$= \alpha\left[x - \left(\frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\right]\left[x - \left(\frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\right].$$

Επομένως:

$$\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)},$$

όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου.

Άρα, όταν $\Delta > 0$, τότε το τριώνυμο μετατρέπεται σε γινόμενο του α επί δύο πρωτοβάθμιους παράγοντες.

- $\boldsymbol{\Delta = 0}$. Τότε από την ισότητα (1) έχουμε:

$$\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2}.$$

Άρα, όταν $\Delta = 0$, τότε το τριώνυμο μετατρέπεται σε γινόμενο του α επί ένα τέλειο τετράγωνο.

- $\boldsymbol{\Delta < 0}$. Τότε ισχύει $|\Delta| = -\Delta$, οπότε έχουμε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right].$$

Επειδή για κάθε $x \in R$, η παράσταση μέσα στην αγκύλη είναι θετική, το τριώνυμο δεν αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

Άρα:

Αν $\Delta > 0$	$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$,όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου
Αν $\Delta = 0$	$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$
Αν $\Delta < 0$	$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{\lvert\Delta\rvert}{4\alpha^2}\right]$

❖ *Πρόσημο των τιμών τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$*

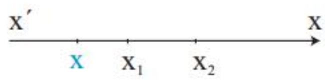
- Αν $\boldsymbol{\Delta > 0}$, τότε, όπως είδαμε προηγουμένως, ισχύει:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\,(x - x_1)(x - x_2) \qquad (1)$$

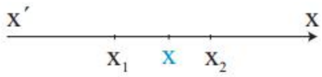
Υποθέτουμε ότι $x_1 < x_2$ και τοποθετούμε τις ρίζες σε έναν άξονα.

Παρατηρούμε ότι:

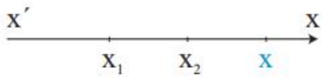
✓ Αν $x < x_1 < x_2$ (Σχήμα), τότε $x - x_1 < 0$ και $x - x_2 < 0$, οπότε $(x - x_1)(x - x_2) > 0$. Επομένως, λόγω της (1), το τριώνυμο είναι ομόσημο του α.



✓ Αν $x_1 < x < x_2$ (Σχήμα), τότε $x - x_1 > 0$ και $x - x_2 < 0$, οπότε $(x - x_1)(x - x_2) < 0$. Επομένως, λόγω της (1), το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α.



✓ Αν $x_1 < x_2 < x$ (Σχήμα), τότε $x - x_1 > 0$ και $x - x_2 > 0$, οπότε $(x - x_1)(x - x_2) > 0$. Επομένως, λόγω της (1), το τριώνυμο είναι ομόσημο του α.



Δηλαδή:

➢ Αν $\Delta > 0$, τότε:

x	$-\infty$	x_1	x_2 $+\infty$
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$	**ομόσημο του α**	0 **ετερόσημο του α**	0 **ομόσημο του α**

- Αν **Δ = 0**, τότε ισχύει:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2.$$

Επομένως, το τριώνυμο είναι ομόσημο του α για κάθε πραγματικό $x\neq-\frac{\beta}{2\alpha}$, ενώ μηδενίζεται για $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$.

Δηλαδή:

➤ Αν Δ = 0, τότε:

x	- ∞	$-\frac{\beta}{2\alpha}$	+∞
$\alpha x^2+\beta x+\gamma$	**ομόσημο του α**	0	**ομόσημο του α**

- Αν **Δ < 0**, τότε ισχύει:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right].$$

Όμως η παράσταση μέσα στην αγκύλη είναι θετική για κάθε πραγματικό αριθμό x. Επομένως το τριώνυμο είναι ομόσημο του α σε όλο το $\mathbb{R}$.

Δηλαδή:

➤ Αν Δ < 0, τότε:

x	- ∞	+∞
$\alpha x^2+\beta x+\gamma$	**ομόσημο του α**	

Δηλαδή:

Μαθαίνουμε πολύ καλά τον παρακάτω πίνακα

- Αν Δ > 0, τότε το τριώνυμο γίνεται **ετερόσημο** του α, για τις τιμές του x που είναι **ανάμεσα στις ρίζες**, ενώ γίνεται **ομόσημο** του α για τις τιμές του x που βρίσκονται **εκτός των ριζών**.
- Αν Δ = 0, τότε το τριώνυμο γίνεται **ομόσημο** του α **για κάθε** $x\in R-\left\{-\frac{\beta}{2\alpha}\right\}$.
- Αν Δ < 0, τότε το τριώνυμο γίνεται **ομόσημο** του α **για κάθε** $x\in$ **R.**

❖ Ανισώσεις της μορφής: $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0$ ή $\alpha x^2+\beta x+\gamma<0$

Για την επίλυση των ανισώσεων β΄ βαθμού χρησιμοποιούμε την προηγούμενη θεωρία.

5 ΠΡΟΟΔΟΙ

◆ 5.1 ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

❖ Η έννοια της ακολουθίας

Ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι μια αντιστοίχιση των φυσικών αριθμών 1, 2, 3, ..., ν, ... στους πραγματικούς αριθμούς.

Ο αριθμός που αντιστοιχεί στο 1 λέγεται **πρώτος όρος της ακολουθίας** και συμβολίζεται με $\boldsymbol{\alpha_1}$. Ο **δεύτερος** με $\boldsymbol{\alpha_2}$ κ.λ.π. Ο **ν-οστός** ή **γενικός όρος** της ακολουθίας συμβολίζεται με $\boldsymbol{\alpha_\nu}$.

◆ 5.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΉ ΠΡΟΟΔΟΣ

Ορισμός

Μια ακολουθία λέγεται **αριθμητική πρόοδος**, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.

Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με **ω** και τον λέμε **διαφορά της προόδου**.
Επομένως, η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\boxed{\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega \quad \text{ή} \quad \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \omega}$$

- Ο $\nu^{ος}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι :

$$\boxed{\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\,\omega}$$

Απόδειξη

$\alpha_1 = \alpha_1$
$\alpha_2 = \alpha_1 + \omega$
$\alpha_3 = \alpha_2 + \omega$
.
.
.
.
$\alpha_{\nu-1} = \alpha_{\nu-2} + \omega$
$\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \omega$

Από πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει η σχέση: $\boldsymbol{\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\,\omega}$**.**

- Αριθμητικός μέσος

Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι **διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου**, **αν και μόνο αν**, ισχύει:
$\boldsymbol{\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}}$ (ή ισοδύναμα $\boldsymbol{2\beta = \alpha + \gamma}$)

Απόδειξη

Αν πάρουμε τρεις διαδοχικούς όρους α, β, γ μιας αριθμητικής προόδου με διαφορά ω, τότε ισχύει:

$$\beta-\alpha=\omega \text{ και } \gamma-\beta=\omega, \text{ επομένως } \beta-\alpha=\gamma-\beta \text{ ή } \beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}.$$

Αλλά και αντιστρόφως, αν για τρεις αριθμούς α, β, γ ισχύει $\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$, τότε έχουμε:

$$2\beta=\alpha+\gamma \quad \text{ή} \quad \beta-\alpha=\gamma-\beta,$$

που σημαίνει ότι οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Ο β λέγεται **αριθμητικός μέσος** των α και γ.

- *Άθροισμα ν διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου*

Το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας αριθμητικής προόδου α_ν με διαφορά ω είναι:

$$\boxed{S_\nu=\frac{\nu}{2}(\alpha_1+\alpha_\nu) \quad \text{ή} \quad S_\nu=\frac{\nu}{2}[2\alpha_1+(\nu-1)\omega]}$$

◆ 5.3 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΉ ΠΡΌΟΔΟΣ

Ορισμός

Μια ακολουθία λέγεται **γεωμετρική πρόοδος**, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό.

Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με **λ** και τον λέμε **λόγο της προόδου**.

Σε μια γεωμετρική πρόοδο (αν) υποθέτουμε πάντα ότι $\alpha_1 \neq 0$, οπότε, αφού είναι και $\lambda \neq 0$, ισχύει **$\alpha_\nu \neq 0$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$**. Επομένως, η ακολουθία (αν) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\boxed{\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu\cdot\lambda \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}=\lambda}$$

- Ο ν-οστός όρος μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο **α_1** και διαφορά **λ** είναι:

$$\boxed{\alpha_\nu=\alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1}}$$

Απόδειξη

Από τον ορισμό της γεωμετρικής προόδου μπορούμε να υπολογίσουμε τον ν-οστό όρο της ως συνάρτηση του α_1 του λ και του ν , ως εξής:

$\alpha_1=\alpha_1$

$\alpha_2=\alpha_1 . \lambda$

$\alpha_3=\alpha_2 . \lambda$

.

.

.

$\alpha_{\nu-1}=\alpha_{\nu-2}\cdot\lambda$

$\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} \cdot \lambda$
Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ν αυτές ισότητες και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαγραφής, βρίσκουμε: $\boldsymbol{\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}}$

- Γεωμετρικός μέσος

Τρεις μη **μηδενικοί αριθμοί** α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν, ισχύει:

$$\boxed{\beta^2 = \alpha\gamma}$$

Απόδειξη

Αν πάρουμε τρεις διαδοχικούς όρους α, β, γ μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο λ, τότε ισχύει

$$\frac{\beta}{\alpha} = \lambda \text{ και } \frac{\gamma}{\beta} = \lambda, \quad \text{επομένως} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} \text{ ή } \beta^2 = \alpha\gamma$$

Αλλά και αντιστρόφως, αν για τρεις αριθμούς α, β, $\gamma \neq 0$ ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$, τότε έχουμε $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$, που σημαίνει ότι οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου.

Ο **θετικός αριθμός** $\sqrt{\alpha \cdot \gamma}$ λέγεται **γεωμετρικός μέσος** των α και γ.

- Άθροισμα ν διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου

Το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου α_ν με λόγο $\boldsymbol{\lambda \neq 1}$ είναι

$$\boxed{S_\nu = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}}$$

Σχόλιο: Στην περίπτωση που ο λόγος $\lambda = 1$ το $\boldsymbol{S_\nu = \nu \cdot \alpha_1}$

6 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

◆ 6.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός
Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β είναι μια διαδικασία (κανόνας) με την οποία **κάθε στοιχείο** του συνόλου Α **αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο** του συνόλου Β.

Άμεσες συνέπειες του ορισμού:
- ✓ Κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β.
- ✓ Δεν είναι δυνατόν κάποιο στοιχείο του συνόλου Α να μην αντιστοιχίζεται σε κάποιο στοιχείο του συνόλου Β. (Δηλ. Δεν μπορεί να "περισσεύουν" στοιχεία του Α.)
- ✓ Μπορούν διαφορετικά στοιχεία του συνόλου Α να αντιστοιχίζονται στο ίδιο στοιχείο του συνόλου Β, ενώ
- ✓ Δεν γίνεται το ίδιο στοιχείο του συνόλου Α να αντιστοιχίζεται σε διαφορετικά στοιχεία του συνόλου Β.

Οι συναρτήσεις παριστάνονται με μικρά γράμματα του Λατινικού αλφαβήτου, όπως **f, g, h** κ.λ.π.
Αν με μια συνάρτηση **f** από το **$A \subseteq R$** στο **$B \subseteq R$**, το $x \in A$ αντιστοιχίζεται στο $y \in B$,
τότε γράφουμε: **$y = f(x)$**
Το **f(x)** λέγεται **τιμή της f στο x** , το x , παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του Α, ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το y παριστάνει την τιμή της συνάρτησης f στο x και ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

- ➢ Το σύνολο Α που περιέχει τις τιμές του x ια τις οποίες ορίζεται μια συνάρτηση f , λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης και συμβολίζεται με **A_f.**
- ➢ Το σύνολο που περιέχει τις τιμές του f(x), για όλα τα x , λέγεται **σύνολο τιμών** της συνάρτησης f και συμβολίζεται με **f(A)**.

Η συνάρτηση συμβολίζεται: $f: A \longrightarrow B$ **$A \subseteq R$, $B \subseteq R$**
$x \longrightarrow f(x)$
Οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται **πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής**.

Παρατήρηση
Για να οριστεί μια συνάρτηση f , πρέπει να ξέρουμε τρία στοιχεία:
- ✓ Το **πεδίο ορισμού**
- ✓ Το **σύνολο τιμών**
- ✓ Τον **τύπο** της f(x)

Ιδιαίτερη προσοχή στην παρατήρηση

❖ Εύρεση πεδίου ορισμού

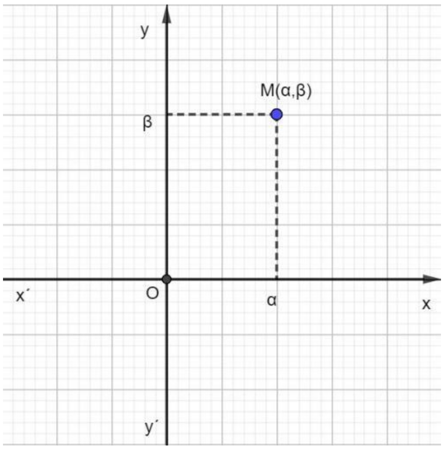
- ✧ Οι **πολυωνυμικές συναρτήσεις** έχουν πεδίο ορισμού όλο το R.
- ✧ Οι **ρητές συναρτήσεις** (πηλίκο δύο πολυωνύμων) έχουν πεδίο ορισμού το σύνολο R εκτός από τις τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή.
- ✧ Οι **άρρητες συναρτήσεις** (της μορφής: $\sqrt{g(x)}$) έχουν πεδίο ορισμού εκείνες τις τιμές του x για τις οποίες $g(x) \geq 0$.

Σχόλιο: Στις ασκήσεις που έχουμε συνδυασμό περιπτώσεων , βρίσκουμε τα επί μέρους

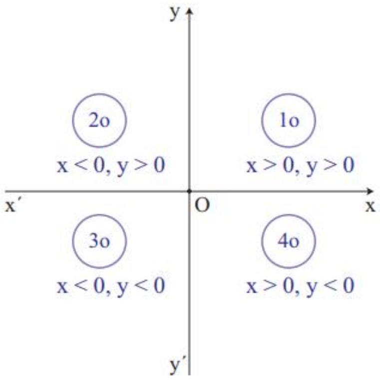
πεδία ορισμού και στο τέλος τα **συναληθεύουμε**.
Σημείωση: Πολλές φορές μια συνάρτηση περιγράφεται με έναν τύπο που έχει κλάδους.

6.2 ΓΡΑΦΙΚΉ ΠΑΡΆΣΤΑΣΗ ΣΥΝΆΡΤΗΣΗΣ

Καρτεσιανές συντεταγμένες

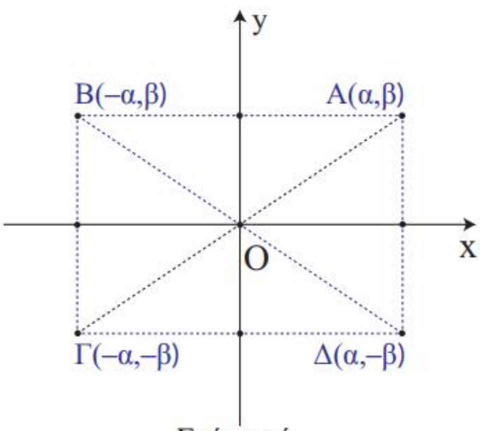


Σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες με κοινή αρχή το σημείο Ο. Ο οριζόντιος άξονας λέγεται **άξονας των τετμημένων** και ο κατακόρυφος , **άξονας των τεταγμένων**.
Έχουμε μάθει σε προηγούμενες τάξεις ότι σε κάθε σημείο του επιπέδου των αξόνων μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα διατεταγμένο ζεύγος (α,β) πραγματικών αριθμών και αντίστροφα σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος (α,β), μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα ακριβώς σημείο Μ του επιπέδου, όπως φαίνεται στο σχήμα.
Οι αριθμοί α, β λέγονται **συντεταγμένες** του Μ. Το **α** λέγεται **τετμημένη** του Μ και το **β** λέγεται **τεταγμένη** του Μ.
Το ζεύγος των παραπάνω αξόνων λέγεται **καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων** (προς τιμήν του Καρτέσιου ο οποίος το επινόησε) και **ορθοκανονικό** γιατί οι άξονες είναι κάθετοι μεταξύ τους και οι μονάδες των αξόνων έχουν το ίδιο μήκος . Συμβολίζεται με **Oxy**.

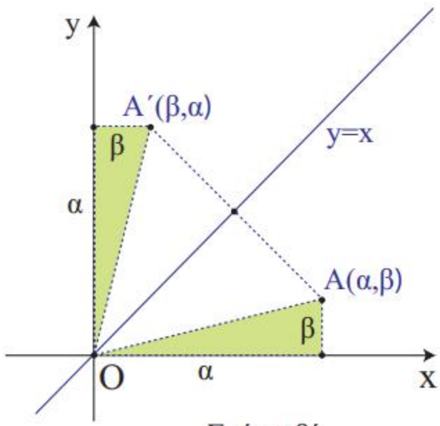


Οι άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα τεταρτημόρια. Τα πρόσημα των συντεταγμένων των σημείων τους φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

Συμμετρικό σημείου ως προς άξονα και ως προς κέντρο



Σχήμα α΄



Σχήμα β΄

Αν Α(α,β) είναι ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου, με τη βοήθεια της συμμετρίας ως προς άξονα και ως προς κέντρο, διαπιστώνουμε ότι:

- ✓ Το συμμετρικό του <u>ως προς τον άξονα x′x</u> είναι το σημείο **Δ(α,−β)**, που έχει **ίδια τετμημένη** και **αντίθετη τεταγμένη** (Σχ. α').
- ✓ Το συμμετρικό του <u>ως προς τον άξονα y′y</u> είναι το σημείο **Β(−α,β)**, που έχει **ίδια τεταγμένη** και **αντίθετη τετμημένη** (Σχ. α').
- ✓ Το συμμετρικό του <u>ως προς την αρχή των αξόνων</u> είναι το σημείο **Γ(−α,−β)**, που έχει **αντίθετες συντεταγμένες** (Σχ. α′).
- ✓ Το συμμετρικό του <u>ως προς τη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας</u> των αξόνων είναι το σημείο **Α′(β,α)** που έχει **τετμημένη την τεταγμένη του Α** και **τεταγμένη την τετμημένη του Α** (Σχ. β')

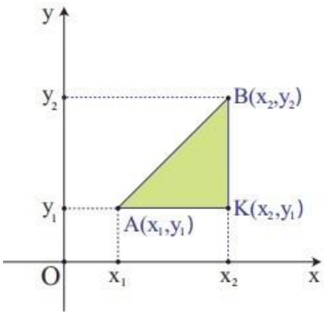
<u>Σχόλιο</u>: όταν δίνεται η C_f μιας συνάρτησης **f** , μπορούμε εύκολα να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της **- f** , παίρνοντας τη συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα x΄x, γιατί η γραφική παράσταση της **- f** αποτελείται από τα σημεία M΄(x, -y) που είναι συμμετρικά των σημείων M(x, y) της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα x΄x.

● <u>Απόσταση σημείων</u>

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ δύο σημεία αυτού.Θα δείξουμε ότι η απόστασή τους δίνεται από τον τύπο:

$$\mathbf{(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

<u>Απόδειξη</u>

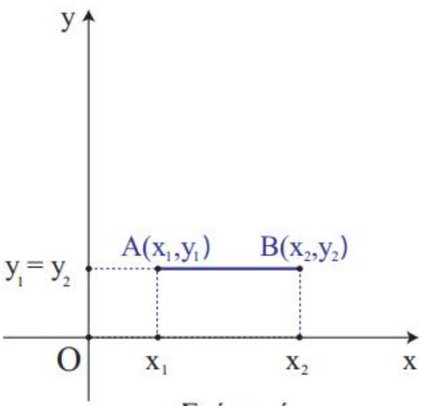


Από το ορθογώνιο τρίγωνο $K\hat{A}B$ του διπλανού σχήματος έχουμε:

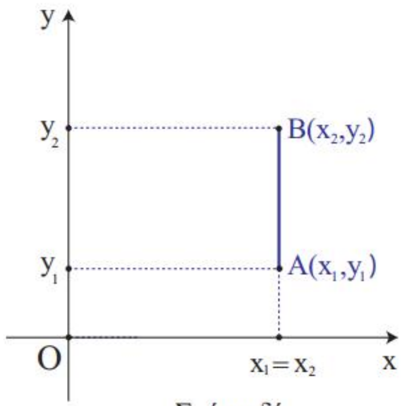
$$\begin{aligned}(AB)^2&=(KA)^2+(KB)^2\\&=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2\\&=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\end{aligned}$$

Οπότε: $(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Ο παραπάνω τύπος ισχύει και στην περίπτωση που η ΑΒ είναι παράλληλη με τον άξονα x′x ή παράλληλη με τον άξονα y′y .



<u>Σχήμα γ΄</u>



<u>Σχήμα δ΄</u>

Γραφική παράσταση συνάρτησης

- Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α και σύστημα συντεταγμένων Oxy. Το σύνολο των σημείων Μ(x,y) του επιπέδου για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων Μ(x, f(x)), $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση της f** και συμβολίζεται με $\mathbf{C_f}$.

Η εξίσωση **y=f(x) επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της γραφικής παράστασης της f** και είναι η εξίσωση της C_f.

Μαθαίνουμε πολύ καλά

Παρατήρηση

1. Κάθε **κατακόρυφη ευθεία** έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f **, το πολύ ένα κοινό σημείο.** (γιατί;)

2. Ένα σημείο $A(x_o, y_o)$, **ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , αν και μόνο αν, οι συντεταγμένες του σημείου επαληθεύουν την εξίσωση της f.**

Εύρεση των κοινών σημείων της C_f μιας συνάρτησης f με τους άξονες

- ✓ Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής πράτασταση μιας συνάρτησης f με **τον άξονα x΄x**, θέτουμε **y=f(x) = 0** και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει ως προς **x**.
- ✓ Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής πράτασταση μιας συνάρτησης f με **τον άξονα y΄y**, θέτουμε **x = 0** και υπολογίζουμε το **y=f(0)**.

Εύρεση των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων f και g.

- ✓ Για να βρούμε **τα κοινά σημεία** των γραφικών παραστάσεων f και g, λύνουμε την εξίσωση **f(x) = g(x)** και τις τιμές του x , που βρίσκουμε , τις αντικαθιστούμε στον τύπο της f ή της g.

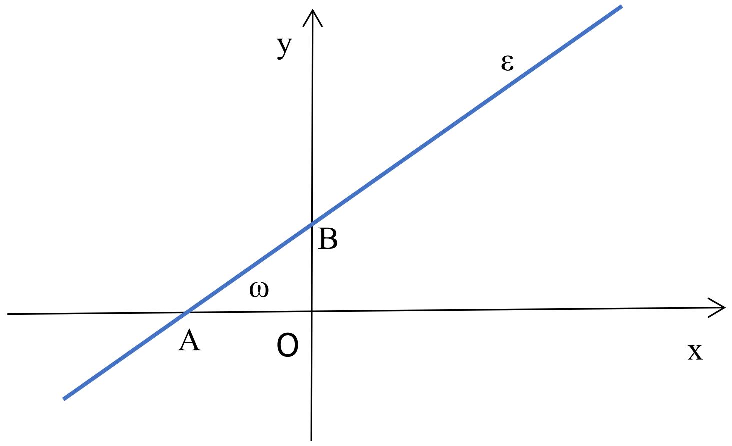
Εύρεση των τετμημένων των σημείων της C_f μιας συνάρτησης f , που βρίσκεται πάνω (ή κάτω) από τον άξονα x΄x.

- ✓ Για να βρούμε τις τετμημένες των σημείων της C_f μιας συνάρτησης f , που βρίσκονται **πάνω (ή κάτω) από τον άξονα x΄x**, λύνουμε την ανίσωση:

  f(x) > 0 (ή f(x) < 0).

◆ 6.3 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \alpha x + \beta$

• Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας



Στο παραπάνω σχήμα η **γωνία ω** που διαγράφει η Ax , όταν στραφεί κατά τη **θετική φορά** (αντίθετη από τη φορά των δεικτών του ρολογιού), μέχρι να πέσει στην ευθεία ε , λέγεται **γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα x΄x**.

Ισχύει: $\boxed{0^o \leq \omega < 180^o}$

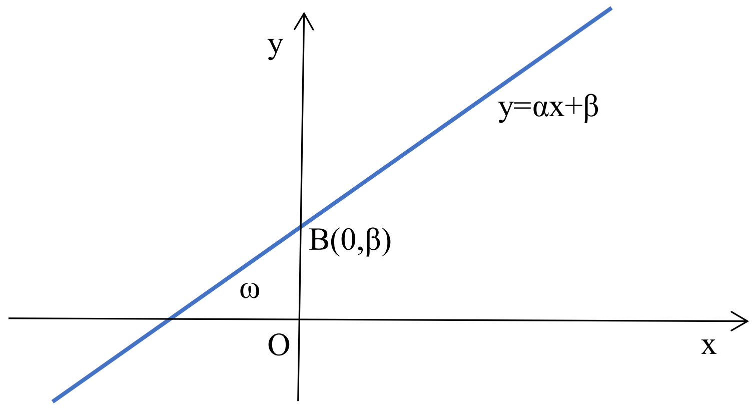
➢ **Συντελεστή διεύθυνσης** ή **κλίση ευθείας** ε ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα x΄x και συνήθως συμβολίζεται με λ.

Ισχύει:

α) η γωνία ω είναι οξεία $\Leftrightarrow \lambda > 0$
β) η γωνία ω είναι αμβλεία $\Leftrightarrow \lambda < 0$
γ) η γωνία ω είναι μηδέν $\Leftrightarrow \lambda = 0$

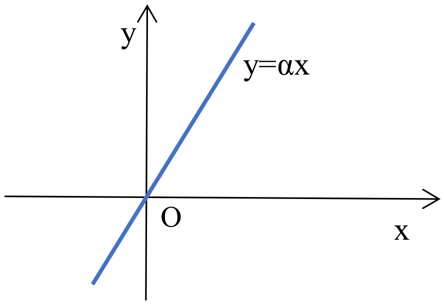
Στην περίπτωση που η γωνία ω είναι 90 μοίρες, **δεν ορίζεται** συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε.

• Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \beta$



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \beta$ είναι μια **ευθεία**, με εξίσωση $y = \alpha x + \beta$, που **τέμνει τον άξονα των y στο σημείο B(0,β)** και έχει **κλίση λ = α**.

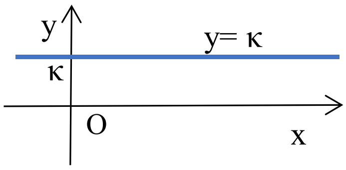
Η συνάρτηση f(x) = αx



Αν β = 0 , τότε η f γίνεται: **f(x) = αx** και η γραφική παράσταση είναι μια ευθεία που **περνάει από την αρχή των αξόνων**.

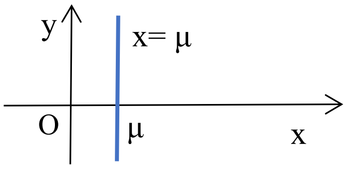
Ειδικές ευθείες

Οριζόντια ευθεία y = k



Η ευθεία y = κ, έχει συντελέστή διεύθυνσης **α = 0,** είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης **f(x) = κ** , που ονομάζεται **σταθερή συνάρτηση**.

Κατακόρυφη ευθεία x = μ



Η ευθεία x = μ , **δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης** (γιατί;) και **δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσής της.**

Σχετικές θέσεις δύο ευθειών

Θεωρούμε δύο ευθείες $\varepsilon_1: y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $\varepsilon_2: y = \alpha_2 x + \beta_2$
Ισχύει:

1. $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 \neq \beta_2 \Leftrightarrow$ **$\varepsilon_1 // \varepsilon_2$**

2. $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 = \beta_2 \Leftrightarrow$ **ε_1 και ε_2 ταυτίζονται**

3. $\alpha_1 \neq \alpha_2 \Leftrightarrow$ **ε_1 και ε_2 τέμνονται**