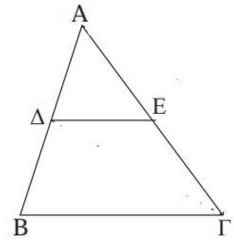
Εφαρμογές παραλληλογράμμων

5.6 Εφαρμογές στα τρίγωνα

Θεώρημα 1

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει **τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου** είναι **παράλληλο** προς την τρίτη πλευρά και **ίσο με το μισό** της . Δηλ. **ΔΕ//=** $\frac{\mathbf{Β\Gamma}}{\mathbf{2}}$

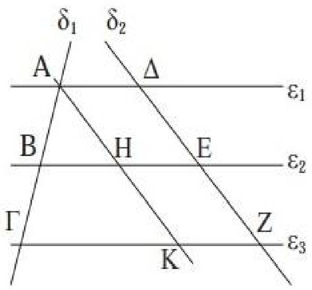


Θεώρημα 2

Αν από το **μέσο** μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία **παράλληλη** προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή **διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του**.

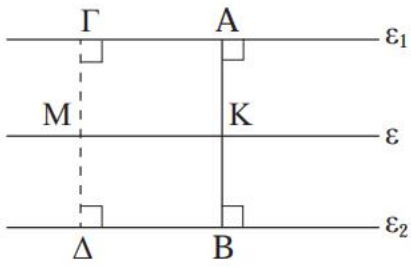
Θεώρημα 3

Αν τρεις (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.



► Η μεσοπαράλληλος δύο παραλλήλων

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 είναι μία ευθεία ε παράλληλη προς τις ε_1 και ε_2, η οποία διέρχεται από τα μέσα των τμημάτων που έχουν τα άκρα τους στις δύο παράλληλες.



Η ευθεία ε λέγεται **μεσοπαράλληλος** των ε_1 και ε_2.

5.7 Βαρύκεντρο τριγώνου

Θεώρημα

Οι διάμεσοι ενός τριγώνου **διέρχονται από το ίδιο σημείο** του οποίου η **απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα** $\frac{2}{3}$ **του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.**

Το σημείο Θ, στο οποίο τέμνονται οι διάμεσοι του ΑΒΓ, λέγεται **βαρύκεντρο** (ή **κέντρο βάρους**) του τριγώνου.

Άρα: Η απόσταση του βαρυκέντρου Θ ενός τριγώνου ΑΒΓ από κάθε κορυφή του ισούται με τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

5.8 Ορθόκεντρο τριγώνου

Θώρημα
Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου **διέρχονται από το ίδιο σημείο**.

Το σημείο στο οποίο τέμνονται τα ύψη του τριγώνου , ονομάζεται **ορθόκεντρο**.

Παραδείγματα

1. Ασκήσεις Εμπέδωσης 2 (σελ.115)
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Αν Ε, Ζ και Η είναι τα μέσα των ΒΔ, ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.
Λύση

2. Αποδεικτικές Ασκήσεις 2 (σελ.116)
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε και Ζ των ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα.
Αν η ΕΖ τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Η, να αποδείξετε ότι $ΓΗ = \frac{ΑΓ}{4}$.
Λύση

3. Ασκήσεις Εμπέδωσης 6 (σελ.116)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$). Προεκτείνουμε τη ΓΑ κατά τυχαίο τμήμα ΑΔ. Από το Δ φέρουμε ΔΗ⊥ΒΓ, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε. Να αποδείξετε ότι ΓΕ⊥ΔΒ.

Λύση

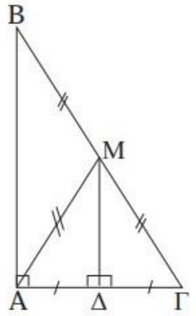
Ασκήσεις Εμπέδωσης: 1, 3, 4, 7 (σελ.115-116) - Αποδεικτικές Ασκήσεις: 4, 6, 7 (σελ.116)

5.9 Μια ιδιότητα του ορθογωνίου τριγώνου

Θεώρημα 1

Η διάμεσος οθρογώνιου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

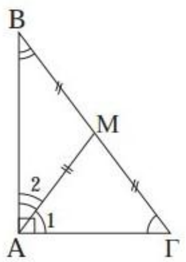
Απόδειξη



Θεώρημα 2 (Αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος)

Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

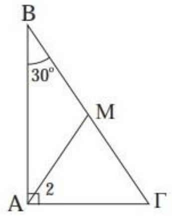
Απόδειξη



Πόρισμα

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30^o, τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα.

Απόδειξη



Παραδείγματα

1. Ασκήσεις Εμπέδωσης 4 (σελ.115)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) με $\hat{B} = 30°$. Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ, να αποδείξετε ότι ΕΖ=ΑΓ.

Λύση

2. Αποδεικτικές Ασκήσεις 1 (σελ.116)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90°$) και το ύψος του ΑΔ.

i) Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ, να αποδείξετε ότι $E\widehat{\Delta}Z = \hat{A} = 90°$.

ii) Αν Μ είναι το μέσο της ΕΖ, να αποδείξετε ότι $\Delta M = \frac{B\Gamma}{4}$.

Λύση

Ασκήσεις Εμπέδωσης: 7 (σελ.115) - Αποδεικτικές Ασκήσεις: 3, 8, 9 (σελ 116)