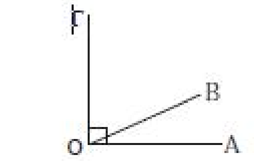
ΘΕΩΡΙΑ

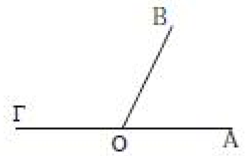
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.16 Απλές σχέσεις γωνιών



Σχήμα 34

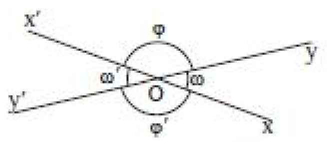
► **Συμπληρωματικές γωνίες**
Δύο γωνίες λέγονται **συμπληρωματικές** αν έχουν άθροισμα
μία ορθή γωνία. Καθεμία από αυτές λέγεται και **συμπλήρωμα** της άλλης, π.χ. οι γωνίες $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ (σχ.34) είναι συμπληρωματικές.



Σχήμα 35

► **Παραπληρωματικές γωνίες**
Δύο γωνίες λέγονται **παραπληρωματικές** αν έχουν άθροισμα μια ευθεία γωνία. Καθεμία από αυτές λέγεται και **παραπλήρωμα** της άλλης (σχ.35).
Προφανώς τα παραπληρώματα ή συμπληρώματα της ίδιας γωνίας (ή ίσων γωνιών) είναι ίσες γωνίες.

ΘΕΩΡΗΜΑ
Δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες έχουν τις μη κοινές πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες και αντίστροφα.
Απόδειξη
Αν οι εφεξής γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$ (σχ.35) είναι παραπληρωματικές, το άθροισμά τους $A\hat{O}\Gamma$ είναι μία ευθεία γωνία.
Επομένως, από τον ορισμό της ευθείας γωνίας οι πλευρές ΟΑ και ΟΓ είναι αντικείμενες ημιευθείες.
Αντίστροφα. Αν οι εφεξής γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$ (σχ.35) έχουν τις μη κοινές πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες, τότε από τον ορισμό του αθροίσματος δύο γωνιών προκύπτει ότι το άθροισμα των γωνιών $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ είναι η ευθεία γωνία $A\hat{O}\Gamma$. Άρα, οι γωνίες $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ είναι παραπληρωματικές.

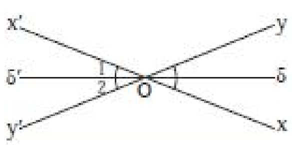


Σχήμα 36

► **Κατακορυφήν γωνίες**
Δύο γωνίες λέγονται **κατακορυφήν**, αν έχουν κοινή κορυφή και οι πλευρές της μίας είναι προεκτάσεις των πλευρών της άλλης.
Π.χ. οι γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$ καθώς και οι γωνίες $y\hat{O}x'$ και $x\hat{O}y'$ είναι κατακορυφήν (σχ.36).

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι
Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.
Απόδειξη
Θεωρούμε τις κατακορυφήν γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$ (σχ.36). Παρατηρούμε ότι οι δύο γωνίες είναι ίσες ως παραπληρώματα της ίδιας γωνίας $y\hat{O}x'$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ
Η προέκταση της διχοτόμου μιας γωνίας είναι διχοτόμος της κατακορυφήν της γωνίας.
Απόδειξη

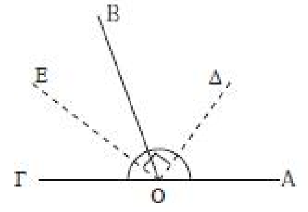


Σχήμα 37

Έστω οι κατακορυφήν γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$ και η διχοτόμος Οδ της $x\hat{O}y$. Τότε $\delta\hat{O}x = \delta\hat{O}y$.
Αν Οδ′ είναι η προέκταση της Οδ, τότε $\hat{O}_1 = \delta\hat{O}x$ και $\hat{O}_2 = \delta\hat{O}y$ (ως κατακορυφήν).

Άρα $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, δηλαδή η Οδ′ είναι διχοτόμος της $x'\hat{O}y'$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ
Οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες.
Απόδειξη



Σχήμα 38

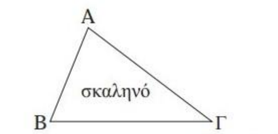
Έστω $A\hat{O}B$ και $B\hat{O}\Gamma$ δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες και ΟΔ, ΟΕ οι διχοτόμοι τους (σχ.38).
Τότε $A\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma = 2\llcorner$ ή $2\Delta\hat{O}B + 2B\hat{O}E = 2\llcorner$ ή
$\Delta\hat{O}B + B\hat{O}E = 1\llcorner$ ή $\Delta\hat{O}E = 1\llcorner$. Άρα $O\Delta \perp OE$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3.1 Είδη και στοιχεία τριγώνων

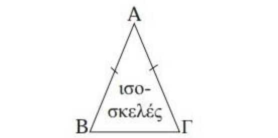
- Οι πλευρές και οι γωνίες ενός τριγώνου λέγονται **κύρια στοιχεία** του τριγώνου.
  Το άθροισμα $\alpha + \beta + \gamma$ των πλευρών του τριγώνου, δηλαδή η περίμετρός του συμβολίζεται συνήθως με 2τ.

- Ένα τρίγωνο, ανάλογα με το είδος των πλευρών του λέγεται:



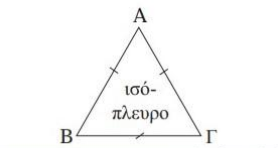
Σχήμα 2

Σκαληνό, όταν έχει όλες τις πλευρές του άνισες (σχ.2),



Σχήμα 3

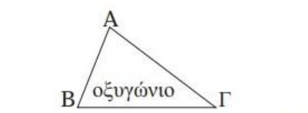
Ισοσκελές, όταν έχει δύο πλευρές του ίσες (σχ.3). Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ η πλευρά ΒΓ λέγεται **βάση** του και το Α **κορυφή** του,



Σχήμα 4

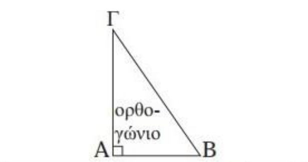
Ισόπλευρο, όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες (σχ.4).

- Ένα τρίγωνο, ανάλογα με το είδος των γωνιών του λέγεται:



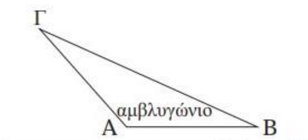
Σχήμα 5

Οξυγώνιο, όταν έχει όλες τις γωνίες του οξείες (σχ.5),



Σχήμα 6

Ορθογώνιο, όταν έχει μια γωνία ορθή (σχ.6). Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία λέγεται **υποτείνουσα** και οι άλλες δύο λέγονται **κάθετες πλευρές** του τριγώνου,



Σχήμα 7

Αμβλυγώνιο, όταν έχει μια γωνία αμβλεία (σχ.7).

❖ **Δευτερεύοντα στοιχεία** τριγώνου:

Διάμεσος ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το **μέσο** της απέναντι πλευράς.
Οι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις πλευρές α, β και γ συμβολίζονται με μ_α, μ_β **και** μ_γ αντίστοιχα.

Διχοτόμος μιας γωνίας ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα της **διχοτόμου** της γωνίας, από την κορυφή της μέχρι την απέναντι πλευρά.
Οι διχοτόμοι των γωνιών Α, Β και Γ του τριγώνου συμβολίζονται με δ_α, δ_β **και** δ_γ αντίστοιχα.

Ύψος ενός τριγώνου λέγεται το **κάθετο** ευθύγραμμο τμήμα που φέρεται από μια κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς.
Τα ύψη που φέρονται από τις κορυφές Α, Β και Γ συμβολίζονται αντίστοιχα με υ_α, υ_β **και** υ_γ.

● Κριτήρια ισότητας

~ Δύο ίσα τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.

~ Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και αντίστροφα.

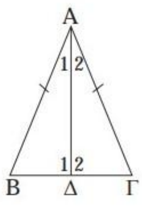
Οι ίσες πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες λέγονται **αντίστοιχες** ή **ομόλογες.**

◆ 3.2 1ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι (1ο κριτήριο – ΠΓΠ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν **δύο πλευρές ίσες** μία προς μία και **τις περιεχόμενες** σε αυτές **γωνίες ίσες**, τότε είναι **ίσα**.

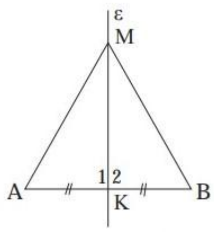
Πόρισμα 1



Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:
- **Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.**
- **Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.**

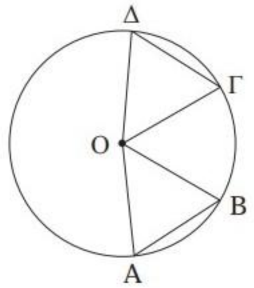
Πόρισμα 2
Οι γωνίες ισοπλεύρου τριγώνου είναι ίσες.

Πόρισμα 3



Κάθε σημείο της **μεσοκαθέτου** ενός ευθύγραμμου τμήματος **ισαπέχει** από τα άκρα του.

Πόρισμα 4



Αν δύο **τόξα** ενός κύκλου είναι **ίσα**, τότε και οι **χορδές** τους είναι **ίσες**.

3.3 2ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

ΘΕΩΡΗΜΑ (2ο Κριτήριο – ΓΠΓ))

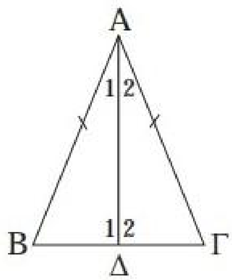
Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

3.4 3ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

ΘΕΩΡΗΜΑ (3ο Κριτήριο – ΠΠΠ)

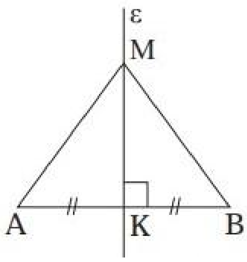
Αν δύο τρίγωνα έχουν **τις πλευρές** τους **ίσες** μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι **ίσα**.

Πόρισμα 1



Η **διάμεσος** ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι **διχοτόμος** και **ύψος**.

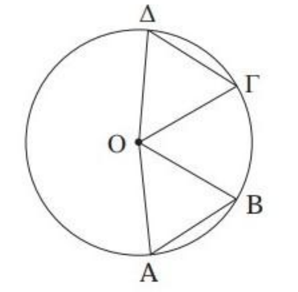
Πόρισμα 2



Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του.

✓ Η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων
του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.

<u>Πόρισμα 3</u>



Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μικρότερων του ημικυκλίου, είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

<u>Πόρισμα 4</u>

Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου μεγαλύτερων του ημικυκλίου είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

<u>ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ:</u>

Όλες οι παραπάνω περιπτώσεις ισότητας τριγώνων διατυπώνονται συνοπτικά ως εξής:

Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν:

• δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (ΠΓΠ),

• μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (ΓΠΓ),

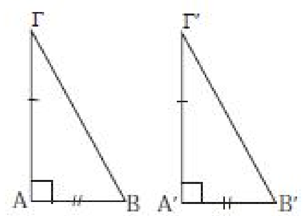
• και τις τρεις πλευρές ίσες μία προς μία (ΠΠΠ).

◆ 3.5 Ύπαρξη και μοναδικότητα καθέτου

<u>Θεώρημα</u>

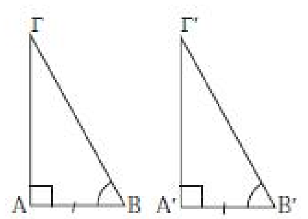
Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται **<u>μοναδική</u>** κάθετος στην ευθεία.

◆ 3.6 Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων



Σχήμα 24

- **Δύο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία, είναι ίσα.** (σχ.24)



Σχήμα 25

- **Δύο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία, είναι ίσα.** (σχ.25)

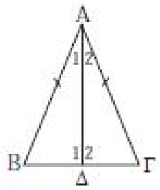
<u>Θεώρημα 1</u>

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την **υποτείνουσα** και μία **οξεία γωνία** αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι **ίσα** .

<u>Θεώρημα 2</u>

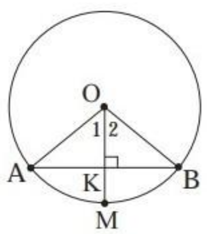
Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την **υποτείνουσα** και μία **κάθετη πλευρά** αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι **ίσα**.

<u>Πόρισμα 1</u>



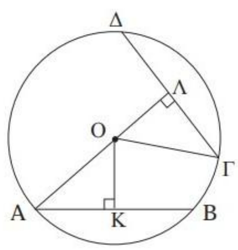
Το **ύψος ισοσκελούς** τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση είναι **διάμεσος** και **διχοτόμος** της γωνίας της κορυφής.

<u>Πόρισμα 2</u>



Η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του **διχοτομεί** τη **χορδή** και το **αντίστοιχο τόξο** της.

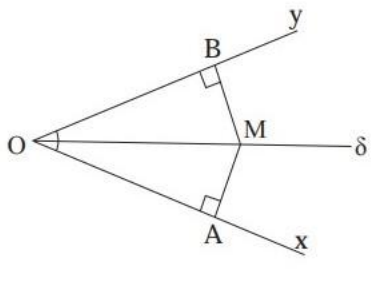
<u>Θεώρημα 3</u>



Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες **αν και μόνο αν** τα αποστήματά τους είναι ίσα.

<u>Θεώρημα 4</u>

Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας **ισαπέχει από τις πλευρές της** και **αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου**.



Άρα: <u>Η διχοτόμος μιας γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τις πλευρές της.</u>

<u>ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ:</u>

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν:

• **Δύο ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.**

• **Μία πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία.**

● Βασικοί γεωμετρικοί τόποι

◆ 3.7 Κύκλος – Μεσοκάθετος - Διχοτόμος

Όπως έχουμε αναφέρει, **γεωμετρικός τόπος** λέγεται το σύνολο όλων των σημείων, που έχουν μια (κοινή) χαρακτηριστική ιδιότητα.

Επομένως:
• **ο κύκλος** είναι ένας γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία του και μόνον αυτά έχουν την ιδιότητα να απέχουν μια ορισμένη απόσταση από ένα σταθερό σημείο.
• **η μεσοκάθετος ενός τμήματος** είναι επίσης ένας γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία της και μόνον αυτά έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.
• **η διχοτόμος** μιας γωνίας είναι ένας άλλος γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία της και μόνον αυτά (από τα σημεία της γωνίας) ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.

● Ανισοτικές σχέσεις

◆ 3.10 Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας

Θεώρημα
Κάθε **εξωτερική** γωνία ενός τριγώνου είναι **μεγαλύτερη** από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.

Πορίσματα
i. Κάθε τρίγωνο έχει **το πολύ μια** γωνία ορθή ή αμβλεία.
ii. Το άθροισμα δύο γωνιών κάθε τριγώνου είναι **μικρότερο** των 180°.

◆ 3.11 Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών

Θεώρημα
Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα.

Πορίσματα
i) Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ορθή ή αμβλεία, τότε η απέναντι πλευρά της είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.
ii) Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ισοσκελές.
iii) Αν ένα τρίγωνο έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες, τότε είναι ισόπλευρο.

◆ 3.12 Τριγωνική ανισότητα

Θεώρημα
Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από το απόλυτο της διαφοράς τους. Δηλαδή:

$$\boxed{|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma}$$

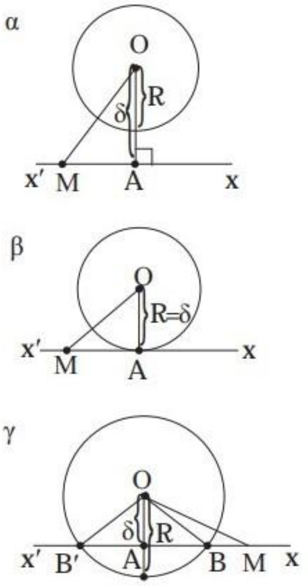
Γενικότερα ισχύει: Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι μικρότερο από κάθε τεθλασμένη γραμμή που έχει άκρα τα Α και Β.

Πόρισμα
Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη ή ίση της διαμέτρου.

Χρήσιμες προτάσεις:
i. **Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες άνισες , τότε και οι τρίτες πλευρές θα είναι όμοια άνισες και αντίστροφα.**
ii. Αν Μ είναι εσωτερικό σημείο τριγώνου ΑΒΓ ισχύει: **ΜΒ + ΜΓ < ΑΒ + ΑΓ**

● Ευθεία και και κύκλος

◆ 3.14 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου



Θεωρούμε έναν κύκλο (Ο, R) μια ευθεία x′x και την απόσταση δ = ΟΑ του κέντρου Ο από την x′x .

• Έστω **δ > R** . Τότε το Α είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου, οπότε και κάθε άλλο σημείο Μ της ευθείας είναι εξωτερικό, αφού ΟΜ > ΟΑ > R. Επομένως, η x′x δεν έχει **κανένα κοινό σημείο** με τον κύκλο και λέγεται εξωτερική ευθεία του κύκλου.(σχήμα α)

• Έστω **δ = R** . Τότε το Α είναι κοινό σημείο της ευθείας με τον κύκλο, ενώ κάθε άλλο σημείο Μ της x′x είναι εξωτερικό σημείο του (Ο, R), αφού ΟΜ > ΟΑ = R. Επομένως, η x′x έχει **ένα μόνο κοινό σημείο** με τον κύκλο και λέγεται **εφαπτομένη** του κύκλου στο σημείο Α.
Το σημείο Α λέγεται **σημείο επαφής** της ευθείας με τον κύκλο. Επίσης, στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία x′x εφάπτεται του κύκλου (Ο, R) στο σημείο Α.
(σχήμα β)

➢ **Η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτομένη.**
➢ **Η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι μοναδική.**

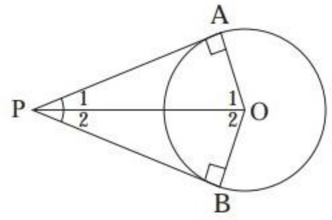
• Έστω **δ < R** . Τότε το Α είναι εσωτερικό σημείοτου κύκλου. Πάνω στην ημιευθεία Αx θεωρούμε ένα σημείο Μ, ώστε ΑΜ = R. Τότε το Μ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου, αφού ΟΜ > ΑΜ = R. Έτσι η ημιευθεία Αx, αφού διέρχεται από ένα εσωτερικό σημείο, το Α, και ένα εξωτερικό, το Μ, είναι φανερό ότι έχει ένα μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο, το Β. Όμοια και η ημιευθεία Αx′ έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο, το Β′.
Επομένως, η x′x έχει **δύο κοινά σημεία** με τον κύκλο. Στην περίπτωση αυτή η ευθεία x′x, λέγεται **τέμνουσα του κύκλου** και τα κοινά της σημεία με τον κύκλο λέγονται σημεία **τομής** της με τον κύκλο. Επίσης λέμε ότι η ευθεία **τέμνει** τον κύκλο. (σχήμα γ)

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ
• **Αν δ > R, η ευθεία δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.**
• **Αν δ = R, η ευθεία έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο.**
• **Αν δ < R, η ευθεία έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο.**

Θεώρημα 1
Μια ευθεία και ένας κύκλος έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

3.15 Εφαπτόμενα τμήματα

Θεώρημα 2
Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.



Απόδειξη

Τα τρίγωνα ΑΟΡ και ΒΟΡ (σχ.60) έχουν $\hat{A}=\hat{B}=90°$, ΟΡ κοινή και ΟΑ = ΟΒ (= ρ), άρα είναι ίσα, οπότε ΡΑ = ΡΒ

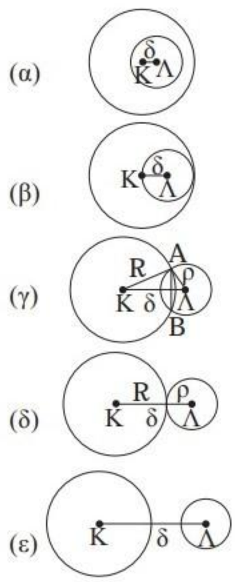
Τα τμήματα ΡΑ και ΡΒ λέγονται **εφαπτόμενα τμήματα** του κύκλου από το σημείο Ρ και η ευθεία ΡΟ **διακεντρική ευθεία** του σημείου Ρ.

Πόρισμα
Αν Ρ είναι ένα εξωτερικό σημείο ενός κύκλου, τότε η διακεντρική ευθεία του:
i) είναι μεσοκάθετος της χορδής του κύκλου με άκρα τα σημεία επαφής,
ii) διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων και τη γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής .

3.16 Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

- Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα δύο κύκλων λέγεται **διάκεντρος** των δύο κύκλων και συμβολίζεται με δ.

► Κύκλοι χωρίς κοινά σημεία



i) Ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο **εσωτερικό** του (Κ, R), αν και μόνο αν $\boldsymbol{\delta < R - \rho}$ (σχ.α).

ii) Οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) βρίσκεται ο ένας στο **εξωτερικό** του άλλου, αν και μόνο αν $\boldsymbol{\delta > R + \rho}$ (σχ.ε).

► Εφαπτόμενοι κύκλοι

i) Οι κύκλοι **εφάπτονται εσωτερικά**, δηλαδή έχουν ένα κοινό σημείο και ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του (Κ, R), αν και μόνο αν $\boldsymbol{\delta = R - \rho}$ (σχ.β).

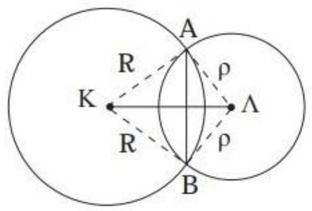
ii) Οι κύκλοι **εφάπτονται εξωτερικά**, δηλαδή έχουν ένα κοινό σημείο και ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου, αν και μόνο αν $\boldsymbol{\delta = R + \rho}$ (σχ.δ)
Το κοινό σημείο δύο εφαπτόμενων κύκλων λέγεται **σημείο επαφής** και είναι σημείο της διακέντρου.

► Τεμνόμενοι κύκλοι
Οι κύκλοι τέμνονται, δηλ. έχουν δύο κοινά σημεία, αν και μόνο αν $R - \rho < \delta < R + \rho$ (σχ.γ).
Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που ενώνει τα κοινά σημεία λέγεται κοινή χορδή

των δύο κύκλων.

<u>Θεώρημα</u>

Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους .

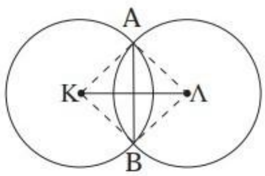


<u>Απόδειξη</u>

Έστω οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) του σχ.64 και Α, Β τα σημεία τομής τους. Επειδή ΚΑ = ΚΒ = R, το σημείο Κ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΒ. Όμοια από την ΛΑ = ΛΒ = ρ προκύπτει ότι και το Λ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΒ. Άρα, η ΚΛ είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής ΑΒ του κύκλου.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>

Στην περίπτωση που οι τεμνόμενοι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) είναι ίσοι, δηλαδή έχουν R = ρ, τότε και η κοινή χορδή είναι μεσοκάθετος της διακέντρου.

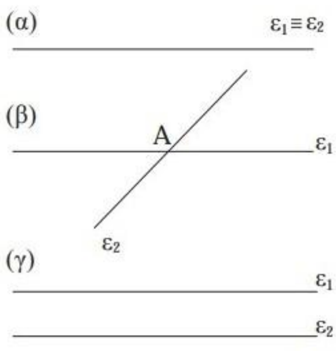


Πράγματι, επειδή R = ρ, θα είναι ΑΚ = ΑΛ και ΒΚ = ΒΛ. Άρα τα Α και Β είναι σημεία της μεσοκαθέτου του ΚΛ και επομένως η κοινή χορδή ΑΒ είναι μεσοκάθετος της διακέντρου ΚΛ.

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4</u>

● <u>Παράλληλες ευθείες</u>

◆ <u>4.1 Εισαγωγή</u>

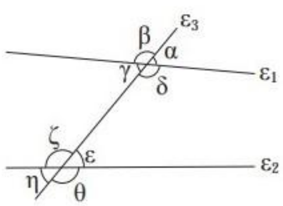


Οι σχετικές θέσεις δυο ευθειών ε_1 και ε_2, οι οποίες βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, είναι οι παρακάτω:
i) ταυτίζονται (σχ.α)
ii) τέμνονται (σχ.β)
iii) δεν τέμνονται (σχ.γ)
Στην τρίτη περίπτωση οι ευθείες ε_1 και ε_2 λέγονται παράλληλες, **ώστε:**

Δυο ευθείες ε_1 και ε_2 που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κοινό σημείο λέγονται παράλληλες ευθείες.

Για να δηλώσουμε ότι οι ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες, γράφουμε **$\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.**

◆ <u>4.2 Τέμνουσα δύο ευθειών - Ευκλείδειο αίτημα</u>



Είχαμε μάθει στο Γυμνάσιο τους όρους: “εντός εναλλάξ”, “εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη” και “εντός και επί τα αυτά μέρη” γωνίες δύο παραλλήλων ε_1 και ε_2, που τέμνονται από μια τρίτη ευθεία ε_3.

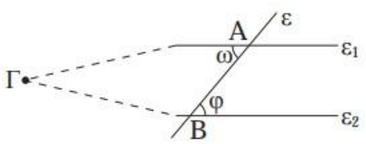
Στο παρακάτω σχήμα **$\varepsilon_1 // \varepsilon_2$** Α) **<u>“εντός εναλλάξ γωνίες”</u>:**

γ, ε και δ, ζ

Β) **"εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες"**:
α, ε , β, ζ, γ, η και δ, θ,
Γ) **"εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες"**:
γ, ζ και δ, ε.

Θεώρημα

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.



Απόδειξη

Έστω ότι ω = φ. Αν οι ευθείες ε_1, ε_2 τέμνονται σε σημείο Γ, η εξωτερική γωνία φ του τριγώνου ΑΒΓ θα είναι ίση με την απέναντι εσωτερική γωνία ω, που είναι άτοπο.

Άρα $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

Πόρισμα 1

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες ή δύο εντός και επί τα αυτά μέρη παραπληρωματικές, τότε είναι παράλληλες.

Πόρισμα 2

Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.

Αίτημα παραλληλίας (Αίτημα του Ευκλείδη)
Από σημείο εκτός ευθείας άγεται **μία μόνο** παράλληλη προς αυτή.

❖ Ιδιότητες παραλλήλων ευθειών

Πρόταση 1

Αν δυο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν τις **εντός εναλλάξ γωνίες ίσες**.

Πόρισμα

Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν:
i) τις **εντός εκτός και επί τα αυτά** μέρη γωνίες **ίσες**,
ii) τις **εντός και επί τα αυτά μέρη** γωνίες **παραπληρωματικές**

Πρόταση 2

Αν δύο διαφορετικές ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες προς μία τρίτη ευθεία ε, τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες, δηλαδή αν $\varepsilon_1 // \varepsilon$ και $\varepsilon_2 // \varepsilon$, τότε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

Πρόταση 3

Αν δύο ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες και μία τρίτη ευθεία ε τέμνει τη μία από αυτές, τότε η ε θα τέμνει και την άλλη.

Πόρισμα

Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε μια από δύο παράλληλες ευθείες, τότε είναι κάθετη και στην άλλη.

Πρόταση 4

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από 2 ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες.

Πόρισμα

Η κατασκευή τριγώνου με δοσμένη μία πλευρά και τις δύο προσκείμενες σε αυτή γωνίες έχει λύση, αν και μόνο αν, το άθροισμα των δύο γωνιών είναι μικρότερο των δύο ορθών.

◆ 4.4 Γωνίες με πλευρές παράλληλες

Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες, μία προς μία, είναι ίσες αν είναι και οι δύο οξείες ή αμβλείες, ενώ είναι παραπληρωματικές αν η μία γωνία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία.

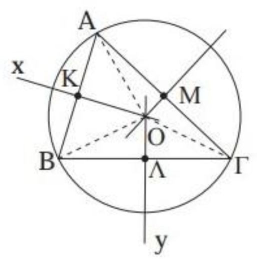
◆ 4.5 Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου

► Ο περιγεγραμμένος κύκλος τριγώνου

Θα αποδείξουμε ότι για κάθε τρίγωνο υπάρχει κύκλος που διέρχεται από τις τρεις κορυφές του. Ο κύκλος αυτός λέγεται **περιγεγραμμένος** κύκλος του τριγώνου και επιπλέον αποδεικνύεται ότι το κέντρο του είναι ένα σημείο στο οποίο συντρέχουν και οι τρεις μεσοκάθετοι του τριγώνου και λέγεται **περίκεντρο**.

Θεώρημα

Οι τρεις μεσοκάθετοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου.



Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Κ, Λ, Μ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Οι μεσοκάθετοι Κx και Λy των ΑΒ, ΒΓ θα τέμνονται σε σημείο Ο, αφού τέμνονται οι κάθετες ευθείες τους ΑΒ και ΒΓ. Το Ο ισαπέχει από τις κορυφές Α και Β αφού ανήκει στη μεσοκάθετο της πλευράς ΑΒ, δηλαδή ΟΑ = ΟΒ. Επίσης ΟΒ = ΟΓ, αφού το Ο ανήκει στη μεσοκάθετο της πλευράς ΒΓ. Επομένως ισχύει ότι ΟΑ = ΟΓ, οπότε το Ο θα ανήκει και στη μεσοκάθετο της ΑΓ. Άρα, ο κύκλος (Ο, ΟΑ) θα διέρχεται από τις τρεις κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ και είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου.

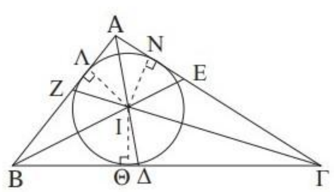
► Ο εγγεγραμμένος κύκλος τριγώνου

Ένας άλλος σημαντικός κύκλος βρίσκεται στο εσωτερικό τριγώνου και εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε τρίγωνο υπάρχει κύκλος με την ιδιότητα αυτή. Ο κύκλος αυτός λέγεται **εγγεγραμμένος** κύκλος του τριγώνου και το κέντρο του, το οποίο λέγεται **έγκεντρο**, θα είναι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών του τριγώνου.

Θεώρημα

Οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου.

Απόδειξη



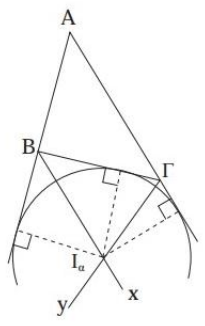
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και οι διχοτόμοι ΒΕ και ΓΖ των γωνιών του $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα. Οι ΒΕ και ΓΖ τέμνονται σε σημείο Ι αφού

$$E\hat{B}\Gamma + Z\hat{\Gamma}B = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} < \hat{B} + \hat{\Gamma} < 2L.$$

Το Ι ως σημείο της διχοτόμου της $\hat{B}$ θα ισαπέχει από τις πλευρές της ΒΑ και ΒΓ, δηλαδή ΙΛ = ΙΘ.

Ανάλογα το Ι θα ισαπέχει από τις πλευρές της $\hat{\Gamma}$, δηλαδή ΙΘ = ΙΝ. Επομένως το Ι ισαπέχει από τις ΑΒ και ΑΓ και θα ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας Â. Τελικά, το Ι είναι το σημείο τομής και των τριών διχοτόμων του τριγώνου. Με κέντρο το Ι και ακτίνα την κοινή απόσταση του Ι από τις πλευρές του ΑΒΓ, γράφεται κύκλος που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου.

✓ Οι παρεγγεγραμμένοι κύκλοι τριγώνου

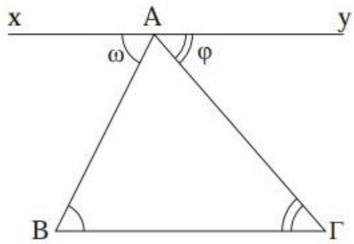


Η ιδιότητα των εσωτερικών διχοτόμων ενός τριγώνου να διέρχονται από το ίδιο σημείο ισχύει και όταν θεωρήσουμε δύο εξωτερικές και μία εσωτερική διχοτόμο του τριγώνου. Οι τρεις αυτές διχοτόμοι τέμνονται σε σημείο το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται στη μία πλευρά του τριγώνου και στις προεκτάσεις των δύο άλλων. Ο κύκλος αυτός λέγεται **παρεγγεγραμμένος** και το κέντρο του **παράκεντρο** του τριγώνου. Σε κάθε τρίγωνο υπάρχουν τρία παράκεντρα, τα οποία συμβολίζουμε I_α, I_β, I_γ, και κατά συνέπεια τρεις παρεγγεγραμμένοι κύκλοι.

◆ 4.6 Άθροισμα γωνιών τριγώνου

Θεώρημα

Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.



Απόδειξη

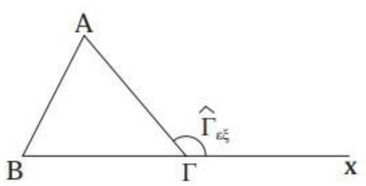
Από μια κορυφή, π.χ. την Α, φέρουμε ευθεία xy//ΒΓ. Τότε ω = $\hat{B}$ (1) και φ = $\hat{\Gamma}$ (2), ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων xy και ΒΓ με τέμνουσες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.Αλλά ω + Â + φ = 2L (3).
Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι

$$\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{\Gamma}} = 2\mathsf{L}.$$

Πορίσματα

i) Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.
ii) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, μία προς μία, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.
iii) Οι οξείες γωνίες ενός ορθογώνιου τριγώνου είνα ισυμπληρωματικές.
iv) Κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι 60^o.

Απόδειξη



i) Έχουμε $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\mathsf{L}$ και $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} + \hat{\Gamma} = 2\mathsf{L}$, οπότε

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} + \hat{\Gamma} \quad \text{ή} \quad \hat{\mathbf{\Gamma}}_{\varepsilon\xi} = \hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}}.$$

ii) – iv) Προφανή.

◆ 4.8 Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου

Το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου να είναι 2ν – 4 ορθές .
(ν: το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου)

Πόρισμα: Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι **4 ορθές.**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

● Παραλληλόγραμμα - Τραπέζια

◆ 5.2 Παραλληλόγραμμα

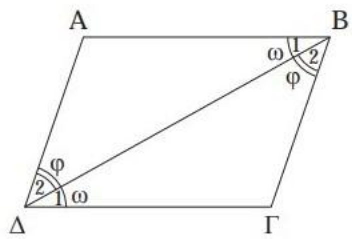
❖ Παραλληλόγραμμο

Ορισμός
Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις **απέναντι** πλευρές του **παράλληλες**.

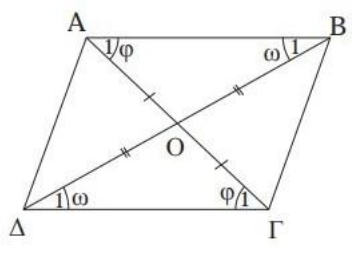
► Ιδιότητες παραλληλογράμμων

Σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:
i) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
ii) Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
iii) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Απόδειξη



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ (σχ.5). Έχουμε:
$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ (εντός εναλλάξ).
ΒΔ κοινή πλευρά.
$\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2 = \varphi$ (εντός εναλλάξ).
Άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ είναι ίσα, οπότε ΑΒ = ΓΔ και ΑΔ = ΒΓ. Επίσης έχουμε $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Delta} = \varphi + \omega$.



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΓΔ. Έχουμε:
ΑΒ = ΓΔ
$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ (εντός εναλλάξ).

$\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1 = \varphi$ (εντός εναλλάξ).
Άρα, τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΓΔ είναι ίσα, οπότε ΟΑ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ.

Πόρισμα 1
Το σημείο τομής των διαγωνίων παραλληλογράμμου είναι κέντρο συμμετρίας του και ονομάζεται **κέντρο** του παραλληλογράμμου.

Πόρισμα 2
Παράλληλα τμήματα που έχουν τα άκρα τους σε δύο παράλληλες ευθείες είναι ίσα .

► Κριτήρια για παραλληλόγραμμα

Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

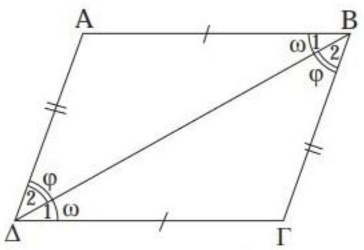
i) Οι απέναντι πλευρές ανά δύο είναι ίσες.

ii) Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

iii) Οι απέναντι γωνίες ανά δύο είναι ίσες.

iv) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Απόδειξη

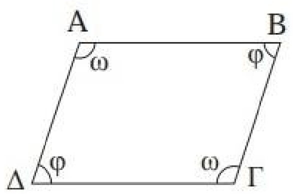


Σχήμα 10

Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Για να αποδείξουμε τα κριτήρια, θα πρέπει σύμφωνα με τον ορισμό να αποδείξουμε ότι σε κάθε περίπτωση, οι απέναντι πλευρές του τετραπλεύρου είναι παράλληλες.

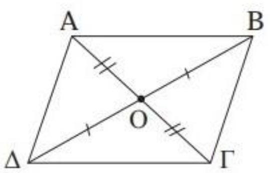
i) Έστω ΑΒ = ΓΔ και ΑΔ = ΒΓ (σχ.10). Αν φέρουμε τη διαγώνιο ΒΔ, τότε σχηματίζονται τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ που είναι ίσα, γιατί ΑΒ = ΓΔ, ΑΔ = ΒΓ και ΒΔ κοινή πλευρά. Άρα $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ και $\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2 = \varphi$, οπότε ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ//ΒΓ, δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Σχήμα 11



ii) Έστω ΑΒ// = ΓΔ (σχ.10). Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ είναι ίσα, γιατί ΑΒ = ΓΔ, $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ και η ΒΔ είναι κοινή πλευρά. Επομένως, όμοια με το i), το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

iii) Αν $\hat{A} = \hat{\Gamma} = \omega$ και $\hat{B} = \hat{\Delta} = \varphi$ (σχ.11) η σχέση $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 4L$ γράφεται $2\omega + 2\varphi = 4L$ ή $\varphi + \omega = 2L$. Επομένως, έχουμε ότι $\hat{A} + \hat{\Delta} = 2L$, οπότε ΑΒ // ΓΔ και $\hat{A} + \hat{B} = 2L$, οπότε ΑΔ // ΒΓ, δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.



iv) Έστω ΑΟ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ (σχ.12). Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ, καθώς και τα τρίγωνα ΑΟΔ και ΒΟΓ είναι ίσα. Επομένως, όμοια με το i), θα είναι ΑΒ // ΓΔ και ΑΔ // ΒΓ, δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Σχήμα 12

● Είδη παραλληλογράμμων

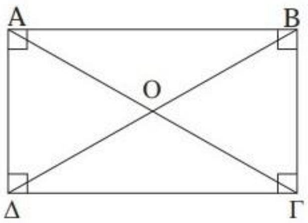
◆ 5.3 Ορθογώνιο

Ορισμός
Ορθογώνιο λέγεται το **παραλληλόγραμμο** που έχει **μία** γωνία **ορθή**.

➢ **Όλες οι γωνίες του παραλληλογράμμου είναι ορθές.**

► Ιδιότητες ορθογωνίου

Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες .

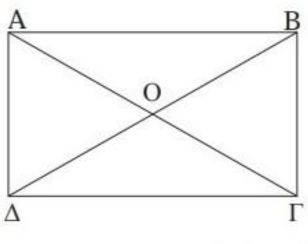


Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο. Θα αποδείξουμε ότι οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ είναι ίσες (σχ.14).
Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90°$, ΑΔ κοινή, ΑΒ = ΔΓ), οπότε ΑΓ = ΒΔ.

► Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο

Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:
i) Είναι **παραλληλόγραμμο** και έχει **μία ορθή** γωνία.
ii) Είναι **παραλληλόγραμμο** και οι **διαγώνιοί** του είναι **ίσες**.
iii) Έχει **τρεις** γωνίες **ορθές**.
iv) Όλες οι γωνίες του είναι **ίσες**.



Απόδειξη
Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του παραλληλογράμμου.
ii) Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με ΑΓ = ΒΔ. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα (ΑΒ = ΔΓ, ΑΓ = ΒΔ, ΑΔ κοινή), οπότε $\hat{A} = \hat{\Delta}$. Αλλά $\hat{A} + \hat{\Delta} = 2\llcorner$, οπότε $\hat{A} = \hat{\Delta} = 1\llcorner$. Επομένως, το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.
iii) Αν έχει τρεις ορθές γωνίες θα είναι και η άλλη ορθή, αφού το άθροισμα των γωνιών κάθε τετραπλεύρου είναι $4\llcorner$.
(iv) Αν όλες οι γωνίες είναι ίσες, προφανώς όλες είναι ορθές.

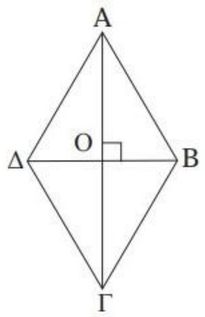
◆ 5.4 Ρόμβος

Ορισμός
Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει **δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.**

➢ **Όλες οι πλευρές του ρόμβου είναι ίσες.**

► Ιδιότητες του ρόμβου

i) Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.
ii) Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του.

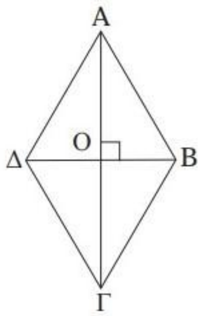


Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔ ρόμβος. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, η διάμεσος του ΑΟ είναι ύψος του και διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Επομένως ΑΓ $\perp$ ΒΔ και η ΑΓ διχοτομεί την $\hat{A}$. Όμοια η ΑΓ διχοτομεί τη $\hat{\Gamma}$ και η ΒΔ τις $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$.

► Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ρόμβος

Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:
i) Έχει όλες τις πλευρές του ίσες.
ii) Είναι παραλληλόγραμμο και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
iii) Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνο-νται κάθετα.
iv) Είναι παραλληλόγραμμο και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.

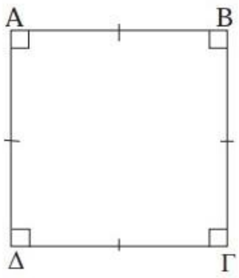


Απόδειξη
i) και ii) Προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό του ρόμβου.
iii) Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με ΑΓ $\perp$ ΒΔ.
Στο τρίγωνο ΑΒΔ η ΑΟ είναι διάμεσος, αφού οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται. Επίσης, η ΑΟ είναι και ύψος, επειδή ΑΓ $\perp$ ΒΔ. Άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, οπότε ΑΒ = ΑΔ. Επομένως το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.
iv) Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο και ΑΓ διχοτόμος της $\hat{A}$. Τότε πάλι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές (αφού ΑΟ διχοτόμος και διάμεσος), οπότε το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

◆ 5.5 Τετράγωνο

Ορισμός
Τετράγωνο λέγεται το **παραλληλόγραμμο** που είναι **ορθογώνιο** και **ρόμβος**.

► Ιδιότητες τετραγώνου



Από τον ορισμό προκύπτει ότι το τετράγωνο **έχει όλες τις ιδιότητες** του **ορθογωνίου** και όλες τις ιδιότητες του **ρόμβου**.

Επομένως, σε κάθε τετράγωνο:
i) Οι **απέναντι** πλευρές του είναι **παράλληλες**.
ii) Όλες οι πλευρές του είναι **ίσες**.
iii) Όλες οι γωνίες του είναι **ορθές**.
iv) Οι διαγώνιοί του είναι **ίσες**, τέμνονται **κάθετα**, **διχοτομούνται** και **διχοτομούν** τις γωνίες του.

► Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο τετράγωνο

Για να αποδείξουμε ότι ένα **τετράπλευρο** είναι **τετράγωνο**, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι **ορθογώνιο** και **ρόμβος**.

Αποδεικνύεται ότι ένα **παραλληλόγραμμο** είναι τετράγωνο,αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις:
i) Μία γωνία του είναι ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
ii) Μία γωνία του είναι ορθή και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.
iii) Μία γωνία του είναι ορθή και οι διαγώνιοί του κάθετες.
iv) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
v) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και η μία διχοτομεί μία γωνία του.
vi) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και κάθετες.

● Εφαρμογές παραλληλογράμμων

◆ 5.6 Εφαρμογές στα τρίγωνα

Θεώρημα 1

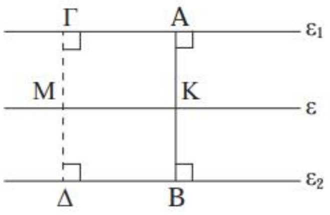
Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της .

Θεώρημα 2

Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

Θεώρημα 3
Αν τρεις (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

► Η μεσοπαράλληλος δύο παραλλήλων



Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 είναι μία ευθεία ε παράλληλη προς τις ε_1 και ε_2, η οποία διέρχεται από τα μέσα των τμημάτων που έχουν τα άκρα τους στις δύο παράλληλες.

Η ευθεία ε λέγεται **μεσοπαράλληλος** των ε_1 και ε_2.

◆ 5.7 Βαρύκεντρο τριγώνου

Θεώρημα

Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

Το σημείο Θ, στο οποίο τέμνονται οι διάμεσοι του ΑΒΓ, λέγεται **βαρύκεντρο** (ή **κέντρο βάρους**) του τριγώνου.

Άρα: Η απόσταση του βαρυκέντρου Θ ενός τριγώνου ΑΒΓ από κάθε κορυφή του ισούται με τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

◆ 5.8 Ορθόκεντρο τριγώνου

Θώρημα

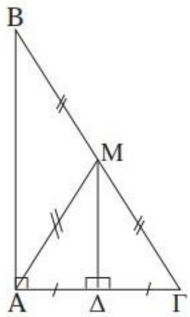
Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Το σημείο στο οποίο τέμνονται τα ύψη του τριγώνου , ονομάζεται **ορθόκεντρο**.

◆ 5.9 Μια ιδιότητα του ορθογωνίου τριγώνου

Θεώρημα 1

Η **διάμεσος** οθρογώνιου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το **μισό της υποτείνουσας**.



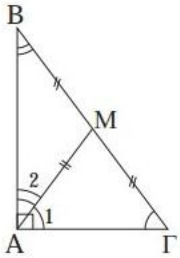
Απόδειξη

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}= 90°$) και τη διάμεσό του ΑΜ (σχ.30). Θα αποδείξουμε ότι $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$

Φέρουμε τη διάμεσο ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ. Το ΜΔ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε ΜΔ // ΑΒ. Αλλά $ΑΒ \perp ΑΓ$, επομένως και $ΜΔ \perp ΑΓ$. Άρα, το ΜΔ είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο ΑΜΓ, οπότε ΑΜ = ΜΓ, δηλαδή $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Θεώρημα 2 (Αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος)

Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.



Απόδειξη

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τη διάμεσό του ΑΜ (σχ.31).

Αν $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$ θα αποδείξουμε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή.

Επειδή $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$

έχουμε ΑΜ = ΜΓ, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{Γ}$ (1) και

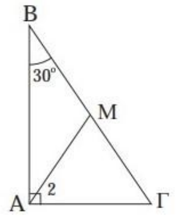
ΑΜ = ΜΒ, οπότε $\hat{A}_2 = \hat{B}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{Γ}$, δηλαδή

$\hat{A} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$. Αλλά $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2L$, οπότε $2\hat{A} = 2L$ ή $\hat{A} = 1L$.

Πόρισμα

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με **30°**, τότε **η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας** και αντίστροφα.



Απόδειξη

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) με $\hat{B} = 30°$

Θα αποδείξουμε ότι $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$

Επειδή $\hat{B} = 30°$, είναι $\hat{\Gamma} = 90° - 30° = 60°$. Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ και είναι $AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$. Έτσι $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma} = 60°$, οπότε το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισόπλευρο. Επομένως ΑΓ = ΜΓ = ΒΓ.

Αντίστροφο, αν στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$, θα αποδείξουμε ότι $\hat{B} = 30°$.

Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ, οπότε $AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma = A\Gamma$(αφού $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$).

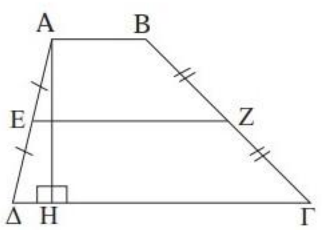
Άρα το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισόπλευρο, οπότε $\hat{\Gamma} = 60°$. Επομένως $\hat{B} = 90° - 60° = 30°$.

Τραπέζια

5.10 Τραπέζιο

Ορισμός

Τραπέζιο λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.



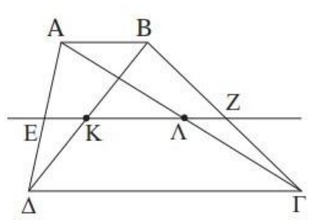
Οι παράλληλες πλευρές ΑΒ και ΓΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ λέγονται βάσεις του τραπεζίου.
Κάθε ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στις βάσεις του τραπεζίου με τα άκρα του στους φορείς των βάσεων λέγεται ύψος του τραπεζίου. Το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του λέγεται **διάμεσος** του τραπεζίου.

Θεώρημα 1

Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το **ημιάθροισμά** τους.
Δηλαδή, αν ΕΖ διάμεσος του τραπεζίου ΑΒΓΔ, τότε:

i) ΕΖ // ΑΒ, ΓΔ και ii) $\mathbf{EZ = \frac{AB+\Gamma\Delta}{2}}$.

Πόρισμα



Η διάμεσος ΕΖ τραπεζίου ΑΒΓΔ διέρχεται από τα μέσα Κ και Λ των διαγωνίων του και το τμήμα ΚΛ είναι παράλληλο με τις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεών του.

Δηλ. **ΚΛ** = $\frac{\mathbf{Γ Δ - Α Β}}{\mathbf{2}}$

◆ 5.11 Ισοσκελές τραπέζιο

Ορισμός

Ισοσκελές τραπέζιο λέγεται το τραπέζιο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες.

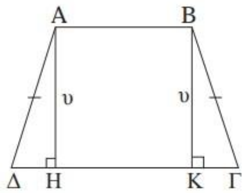
► Ιδιότητες ισοσκελούς τραπεζίου

Αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε:

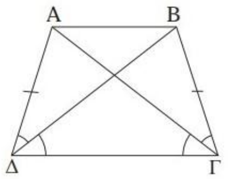
i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες.

ii) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

Απόδειξη



i) Έστω ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο (ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ = ΒΓ). Φέρουμε τα ύψη ΑΗ και ΒΚ. Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΒΚΓ είναι ίσα ($\hat{Η} = \hat{Κ} = 90°$, ΑΔ = ΒΓ και ΑΗ = ΒΚ = υ), οπότε $\hat{Γ} = \hat{Δ}$. Επειδή $\hat{Α} + \hat{Δ} = 180°$ και $\hat{Β} + \hat{Γ} = 180°$ (ως εντός και επί τα αυτά μέρη), έχουμε και $\hat{Α} = \hat{Β}$.



ii) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΔΓ είναι ίσα (ΑΔ = ΒΓ, ΓΔ κοινή και $Α\hat{Δ}Γ = Β\hat{Γ}Δ$), οπότε ΑΓ = ΒΔ

► Κριτήρια για να είναι ένα τραπέζιο ισοσκελές

Ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις.

i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση του είναι ίσες.

ii) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.