

Θεωρήματα στη συνέχεια

1. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μια τουλάχιστον ρίζα στα διαστήματα που αναφέρονται:

α. $(3x-\pi)\epsilon\phi x+(4x-\pi)\sigma\phi x=0$, $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ β. $(x-2)(x^{10}+1)+(x-1)(x^8+3)=0$, $x \in (1,2)$

γ. $\frac{\eta\mu x}{2x-\pi} = \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2x+\pi}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ δ. $\frac{x^{2006}+2006}{x-1} + \frac{x^{2007}+2007}{x-2} = 0$, $x \in (1,2)$.

2. Αν $a < \beta < \gamma$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\frac{1}{x-a} + \frac{3}{x-\beta} + \frac{5}{x-\gamma} = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο $\mathbb{R}$.

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3-6x^2+3=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1,1)$.

4. Αν $a > 0$ και $a+\beta+1 < 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3+\beta x^2+a=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-1,1)$.

5. Θεωρούμε την εξίσωση :

$$\frac{\kappa^2}{x} + \frac{\lambda^2}{x+1} + \frac{\mu^2}{x-1} = 0, \quad \kappa, \lambda, \mu \neq 0$$

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(-1,1)$.

β. Αν οι δύο ρίζες είναι οι ρ_1, ρ_2 , να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\kappa^2}$.

6. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$ με $f(0)=a$ και $f(1)=\beta$, όπου $a, \beta \in (0,1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\gamma)=\gamma$.

7. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g ορισμένες και συνεχείς στο $[-1,5]$ τέτοιες ώστε $f(-1) < g(-1)$ και $g(5) < f(5)$. Να δείξετε ότι τα διαγράμματα των f και g τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (-1,5)$.

8. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^4+(a^2-2)x^2+(a-1)x-a^2=0$, $a \in \mathbb{R}^*$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,2)$.

9. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2+x\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x$ έχει δύο τουλάχιστον πραγματικές ρίζες.

10. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$ με $a > 0$, $f(a)=2a$, $g(\beta)=2\beta$ και $f(x) < 1 < g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (a, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(\gamma)g(\gamma)=2\gamma$.

11. Δίνεται ο πραγματικός αριθμός $\lambda \in (0,1)$ και οι συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$. Αν $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, $f(a)=a$ και $g(\beta)=\beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιος ώστε: $\lambda f(\xi) + (1-\lambda)g(\xi) = \xi$.

12. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, a]$ με τιμές στο $(0, \beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\theta \in (0, a)$ ώστε $f^2(\theta) - \beta f(\theta) + \gamma \cdot \theta = 0$, όπου $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$ με $\beta^2 - 4a\gamma < 0$.

13. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τη σχέση: $a \cdot \beta \cdot f^2(x) + (a+\beta)g(x) + a \cdot \beta \cdot x = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $a, \beta \in \mathbb{R}^*$ με $a+\beta \neq 0$. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία A, B εκατέρωθεν της αρχής των αξόνων, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της g τέμνει τον $x'x$ τουλάχιστον σε ένα σημείο μεταξύ των A και B .

14. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και διάστημα $[a, \beta] \subset \mathbb{R}$. Αν η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Bolzano στο $[a, \beta]$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $f(a)f^2(x) + \kappa \cdot f(x) + f(\beta) = 0$, $\kappa \in \mathbb{R}$, έχει δύο λύσεις στο $\mathbb{R}$.

15. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, με $a_0 > 0$, $a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0$ και $5a_5 + 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 > 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

16. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$ και $g(x) = -x^2 + \beta x + \gamma$ με $\gamma \neq 0$. Αν ρ_1 είναι ρίζα της f και ρ_2 ρίζα της g με $\rho_1 < \rho_2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + 2g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (ρ_1, ρ_2) .

17. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{x-1} - 1$ και $g(x) = \ln(x+1) + 1$.
 α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 3)$
 β. Αν ξ είναι μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = \xi$.

18. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες:
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4$ και $4\eta\mu(x-2) \leq (x-2)f(x) \leq x^2 - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $g(x) = x^2 - x + 1$, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε ένα τουλάχιστο σημείο $M(x_0, y_0)$ με $x_0 \in (1, 2)$.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι συνεχής. Αν $f(0) = f(2\pi)$ ναδειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in (0, \pi)$ ώστε $f(x_0) = f(x_0 + \pi)$, $f(0) \neq f(\pi)$.

20. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[1, e]$ με $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in [1, e]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός $\xi \in (1, e)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f(\xi) + \xi \ln \xi = 1$.

21. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[a, \beta]$ και τέτοια ώστε να ισχύει $0 < a < f(x) < \beta$, για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τη διχοτόμο $\psi = x$ της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων σε ακριβώς ένα σημείο.

22. Έστω $f(x) = ax^8 + \beta x^6 + \gamma x^2 + 1$, $a > 0$. Αν $a + \beta + \gamma < -1$ ναδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Υπαρξη ρίζας σε κλειστό διάστημα

23. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και ισχύει ότι $f(a) + f(\beta) = g(a) + g(\beta)$, $a < \beta$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [a, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

24. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και μ, κ θετικοί αριθμοί. Να δείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in [a, \beta]$ τέτοιο ώστε $\mu f(a) + \kappa f(\beta) = (\mu + \kappa)f(\gamma)$.

25. Έστω η περιττή και συνεχής συνάρτηση στο $[-2022, 2022]$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[-2022, 2022]$.

26. Έστω μια συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο $[a, \beta]$ και τέτοια ώστε $f(a) \cdot f(\beta) + a^2 \beta^2 \leq 0$. Να αποδείξετε ότι αν $a \neq \beta$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[a, \beta]$.

27. Έστω μια συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο $[a, \beta]$ και τέτοια ώστε $a^2 f(a) + \beta^2 f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι αν $a \beta \neq 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[a, \beta]$.

28. Αν οι f και g είναι συνεχείς στο διάστημα $[0,1]$ με $f \circ g = g \circ f$, f φθίνουσα, $0 \leq f(x) \leq 1$ και $0 \leq g(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [0,1]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0,1]$, τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$ και $g(\xi) = \xi$.
29. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$ με $f(a) + f(b) = 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[a,b]$.
30. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,4]$ και $f(0) = f(4)$, να αποδειχθεί ότι υπάρχουν $\alpha, \beta \in [0,4]$ με $\beta - \alpha = 2$ τέτοια ώστε $f(\alpha) = f(\beta)$.
31. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[0,4]$, με $f(0) = f(4)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - f(x+2)$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h
 - Να αποδείξετε ότι η h είναι συνεχής συνάρτηση
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f(x+2)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[0,2]$.

Εύρεση προσήμου και τύπου συνάρτησης

32. Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f^2(x) = 4 + x^2 - x + 3f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και $f(2004) < 0$ τότε να βρεθεί ο τύπος της f .
33. Έστω f συνεχής και $f^2(x) + xf(x) - 1 = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(0) = -1$.
- Να δειχθεί ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$
 - Να βρεθεί ο τύπος της.
34. Θεωρούμε μια συνάρτηση f συνεχή στο διάστημα $[-3,3]$. Να αποδείξετε ότι: Αν $f(1) > 0$ και για κάθε $x \in [-3,3]$ ισχύει $4x^2 + 9f^2(x) = 36$, τότε για κάθε $x \in (-3,3)$ είναι $f(x) > 0$.
35. Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) + 2x = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
36. Αν για κάθε $x \in [-2,2]$ η f είναι συνεχής και ισχύει $x^2 + f^2(x) = 4$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-2,2)$.
37. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει η σχέση $f(x)[g(x) + 1] \geq 1$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.
38. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(2007) + f(2006) = 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής.
39. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(1) = 2006$ να βρείτε τα παρακάτω όρια:
- $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ [f(2) + 1]x^3 + x^2 - \frac{1}{2} \right\}$
 - $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[f(4) + 2]x^3 + 1}{x^2 + 2}$.
40. Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις με την ιδιότητα:
- $$(f(x) - \eta \mu^2 x)(f(x) + \eta \mu^2 x) = \sin^4 x + \frac{1}{2} \eta \mu^2 2x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
41. Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:
- $$f^2(x) = 2e^{xf(x)} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
42. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:
- $$f^2(x) - 1 = 2xf(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$

β. Αν $f(0)=1$, τότε:

- i. να βρείτε τον τύπο της f
- ii. να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xf(x))$.

43. Έστω η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f^2(x) \neq 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) > 2$$

Να αποδείξετε ότι:

α. $f(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β. η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{e^x} - 1$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα,

γ. η εξίσωση $e^x + f(x) = e^{xf(x)}$ έχει ακριβώς μία ρίζα x_0 με $x_0 \in (0, 1)$.

Θ.Ε.Τ-Θεώρημα μεγίστης ελαχίστης τιμής

44. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^3}{4} - \eta\mu\pi x + 3$, ορισμένη στο $[-2, 2]$. Να εξετασθεί αν η f παίρνει την τιμή $8/3$.

45. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 4]$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in [0, 4]$ τέτοιο ώστε $2f(1) + 3f(2) + 4f(3) = 9f(\xi)$.

46. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$. Αν $f(0)=2$ και $f(1)=4$, να

δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$.

47. Θεωρούμε μια μη σταθερή συνάρτηση f , συνεχή στο διάστημα $[a, b]$ και τις τιμές $x_1, x_2, \dots, x_n$ του $[a, b]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

48. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[a, b]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[a, b]$. Να

αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \frac{f(a) + f(b) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{3}$.

49. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$ και $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$. Αν κ, λ, ρ είναι θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ τέτοιο ώστε :

$$f(\xi) = \frac{\kappa f(x_1) + \lambda f(x_2) + \rho f(x_3)}{\kappa + \lambda + \rho}.$$

50. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x + x - 1$.

α. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει μια μόνο ρίζα

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = e$

δ. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει η ισότητα:

$$e^{\lambda^2+1} - e^{2\lambda} = \ln(2\lambda) - \ln(\lambda^2 + 1) - \lambda^2 + 2\lambda - 1.$$

51. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(4)=2 \text{ και } f(x) \cdot f(f(x))=12 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α. Να αποδείξετε ότι $f(2)=6$

β. Αν η f είναι γνησίως μονότονη, να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2, 4)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=3$

δ. Να υπολογίσετε το $f(3)$.

Σύνολο τιμών

52. Να βρεθεί το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ β. $f(x) = e^x + \ln x - 2022$, $x > 0$ γ. $f(x) = e^{-x} - 2x + 1$, $x \in (0, 1]$

53. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + e^x = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

54. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2} - \sqrt{6-x}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της

γ. Να εξετάσετε την f ως προς τη συνέχεια

δ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της

ε. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό x_0 έτσι ώστε $f(x_0) = 3/2$

55. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ με

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \gamma$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \delta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένα $x_0 > 0$, τέτοιο ώστε να ισχύει:
 $f(x_0) + e^{x_0+1} + \ln x_0 = 1$.

56. Δίνεται η συνάρτηση f με $A = [1, 3]$ και $f(A) = (3, 6)$. Να δειχθεί ότι η f δεν είναι συνεχής.

57. Έστω η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\Delta = (a, b)$, γνησίως φθίνουσα στο $(a, \gamma]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\gamma, b)$, όπου $\gamma \in (a, b)$. Αν $f(\gamma) = -1$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2$ και $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = 3$.

Να βρεθεί:

α. Το σύνολο τιμών της

β. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$, $x \in \Delta$.

58. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^{x-1} - 1$.

α. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

β. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της

γ. Να λυθεί η εξίσωση $\ln x + e^{x-1} = 1$.

59. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Αν ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $f(1) = -2$, να βρείτε το πλήθος

των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

Προβλήματα

60. Ένας ορειβάτης ξεκίνησε μια μέρα στις 7 π.μ. από τους πρόποδες του Ολύμπου και έφτασε στην κορυφή του στις 3 μ.μ. Την άλλη μέρα ξεκίνησε στις 7 π.μ. και ακολουθώντας την ίδια διαδρομή επέστρεψε μετά από 8 ώρες στο σημείο απ' όπου είχε ξεκινήσει. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της διαδρομής, στο οποίο ο ορειβάτης βρισκόταν την ίδια ώρα και τις δύο ημέρες.

61. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = f(3)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν σημεία A και B της C_f τέτοια, ώστε $AB \parallel x'x$ και $AB = 1$.

Γενικές ασκήσεις

62. Έστω f συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση στο $[0,4]$ με $f(4)=1$ και $f(0)=7$.

α. Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της f

β. Αν $a \in [1,7]$, να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=a$ έχει μοναδική ρίζα στο $[0,4]$

γ. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,4)$ τέτοιο, ώστε :

$$f(\xi) = \frac{f(1) + 3f(2) + 5f(3)}{9}.$$

63. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν η εξίσωση $(f \circ f)(x) = x$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα, να αποδείξετε ότι και η εξίσωση $f(x) = x$ έχει επίσης μια πραγματική ρίζα.

64. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(4)=3$ και $f(f(x))f(x)=1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\gamma \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(\gamma)=2$

β. Να βρεθεί το $f(2)$

γ. Να αποδειχθεί ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

65. Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(-1)=-1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:
 $f^2(f(x)) + f(f^2(x)) = 2x^2$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-1,1)$ ώστε $f(\xi)=0$

β. Αν υπάρχει $x_0 < 0$ ώστε $f(x_0)=x_0$, να αποδείξετε ότι:

i. Υπάρχει ρ μεταξύ των x_0, x_0^2 ώστε $f(\rho)=0$

ii. $\rho = \xi$ ή $\rho = -\xi$.

66. Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(0)=0$, $f(3)=0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:
 $f(2x) > f(2x+2)$

Να αποδειχθεί ότι:

α. Υπάρχει $\xi \in (1,2)$, ώστε $f(\xi)=0$

β. Υπάρχει $x_0 \in (\xi-2, \xi+2)$ ώστε $f(x_0)=0$.

67. Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x^2-x) + f(x) = 3x^2 + x - 2$.
 Να αποδείξετε ότι:

α. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ ώστε $f(\xi)=\xi$

β. Για κάθε $\psi_0 \in (-6,6)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1,2)$ ώστε $f(x_0)=\psi_0$

γ. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (0,1)$ ώστε να είναι $f(\rho^2-\rho) = 3\rho^2 - 2$.

68. Αν $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ και η συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής με $f(a) \neq f(\beta)$ να δειχθεί ότι υπάρχει

$$x_0 \in (a, \beta): f(x_0) = \frac{pf(a) + qf(\beta)}{p+q}.$$

69. Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \cdot g(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(1) > 3$ και $g(2) > 2$.
 Να δείξετε ότι :

α. $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β. Υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ ώστε $g(x_0) = x_0$.

70. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(1) + 2f(2) + 3f(3) = 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής.