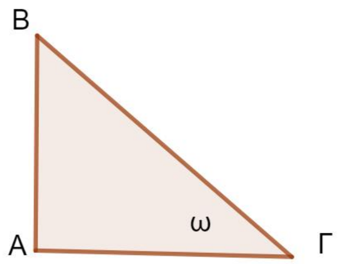
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

- <u>*Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας*</u>

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ισχύουν:



$$\text{ημω} = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$$

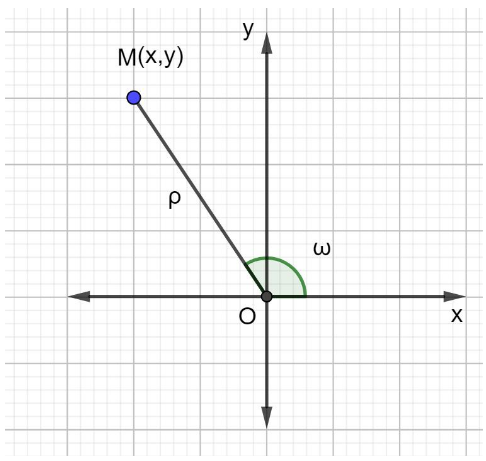
$$\text{συνω} = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$$

$$\text{εφω} = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$$

$$\text{σφω} = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{απέναντι κάθετη}} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ}$$

- <u>*Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^o \le ω \le 360^o$*</u>

◆ Για οποιοδήποτε σημείο Μ(x,y) σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων ισχύει:



$$\text{ημω} = \frac{\text{τεταγμένη του Μ}}{\text{απόσταση του Μ από το Ο}} = \frac{y}{ρ}$$

$$\text{συνω} = \frac{\text{τετμημένη του Μ}}{\text{απόσταση του Μ από το Ο}} = \frac{x}{ρ}$$

$$\text{εφω} = \frac{\text{τεταγμένη του Μ}}{\text{τετμημένη του Μ}} = \frac{y}{x}$$

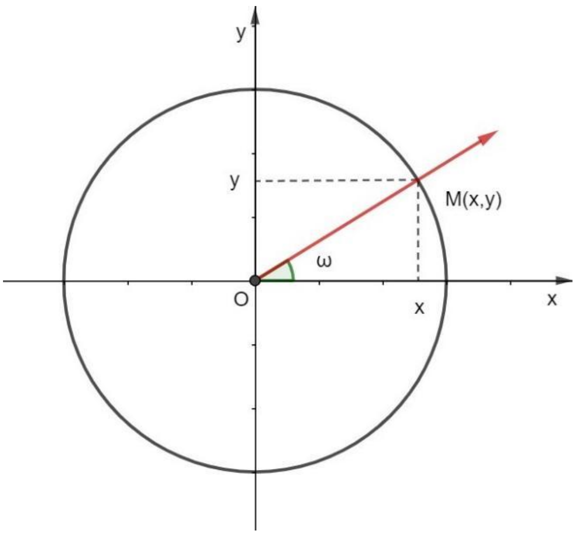
(με $x \neq 0$)

$$\textbf{σφω} = \frac{\textbf{τετμημένη του Μ}}{\textbf{τεταγμένη του Μ}} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} \quad \textbf{(με } \mathbf{y \neq 0}\textbf{) και}$$

$$\boldsymbol{\rho} = \sqrt{\mathbf{x^2 + y^2}} > \mathbf{0}$$

Ο θετικός ημιάξονας **Οx** λέγεται **αρχική πλευρά** της της γωνίας ω και η **ΟΜ** λέγεται **τελική πλευρά** της ω .

● Τριγωνομετρικός κύκλος



Με κέντρο την αρχή Ο(0,0) ενός συστήματος συντεταγμένων και ακτίνα ρ = 1 γράφουμε έναν κύκλο. Ο κύκλος αυτός λέγεται **τριγωνομετρικός κύκλος**.

Αν η τελική πλευρά μιας γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Μ(x,y) , τότε ισχύει:

συνω = x = τετμημένη του σημείου Μ
ημω = y = τεταγμένη του σημείου Μ

✓ Ο άξονας **x΄x** λέγεται **άξονας των συνημιτόνων** και ο άξονας **y΄y** λέγεται **άξονας των ημιτόνων**.

Ισχύουν:

-1 ≤ ημω ≤ 1 και -1 ≤ συνω ≤ 1.

● Το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης γωνιών

Ένα τόξο ΑΒ ενός κύκλου (Ο,ρ) λέγεται **τόξο ενός ακτινίου (ή 1 rad)**, αν το τόξο αυτό έχει **μήκος ίσο με την ακτίνα ρ** του κύκλου.

Ορισμός: **Ακτίνιο** (ή **1 rad**) είναι η γωνία η οποία, όταν γίνει επίκεντρη σε έναν κύκλο, βαίνει σε τόξο ενός ακτινίου (ή 1 rad).

Σχέση μεταξύ μοιρών και ακτινίων μιας γωνίας : $\boxed{\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}}$, όπου **μ: οι μοίρες** της γωνίας και **α: τα ακτίνια** της γωνίας αυτής.

Ο παρακάτω πίνακας περιέχει τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μερικών βασικών γωνιών:

ω	0^o και 360^o ή 2π	30^o ή $\frac{\pi}{6}$	45^o ή $\frac{\pi}{4}$	60^o ή $\frac{\pi}{3}$	90^o ή $\frac{\pi}{2}$	180^o ή π	270^o ή $\frac{3\pi}{2}$
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
εφω	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-
σφω	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0

- *Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες*

1. $\mathbf{ημ^2ω + συν^2ω = 1 \Leftrightarrow ημ^2ω = 1 - συν^2ω \Leftrightarrow συν^2ω = 1 - ημ^2ω}$

2. $\mathbf{εφω} = \frac{\mathbf{ημω}}{\mathbf{συνω}}$, $(συνω \neq 0)$ και $\mathbf{σφω} = \frac{\mathbf{συνω}}{\mathbf{ημω}}$, $(ημω \neq 0)$

3. $\mathbf{εφω \cdot σφω = 1}$

4. $\mathbf{συν^2ω} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+εφ^2ω}}$

- *Αναγωγή στο 1^o τεταρτημόριο*

➢ **Αντίθετες γωνίες (-ω, ω)**

συν(-ω) = συνω
ημ(-ω) = - ημω
εφ(-ω) = - εφω
σφ(-ω) = - σφω

(**ίδιο συνημίτονο** και αντίθετοι οι υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί)

➢ **Παραπληρωματικές γωνίες (π-ω , ω)**

ημ(π - ω) = ημω
συν(π - ω) = - συνω
εφ(π - ω) = - εφω
σφ(π - ω) = - σφω

(**ίδιο ημίτονο** και αντίθετοι οι υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί)

- **Γωνίες με άθροισμα π (π + ω, ω)**

ημ(π + ω) = - ημω
συν(π + ω) = - συνω
εφ(π + ω) = εφω
σφ(π + ω) = σφω

(**ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη** και αντίθετοι οι υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί)

- **Συμπληρωματικές γωνίες (π/2 - ω, ω)**

ημ(π/2 -ω) = συνω
συν(π/2 - ω) = ημω
εφ(π/2 - ω) = σφω
σφ(π/2 - ω) = εφω

(**αλλάζει ο τριγωνομερικός** αριθμός)

Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

- **Η εξίσωση ημx = α**

Βρίσκουμε γωνία θ , για την οποία ισχύει: ημθ = α. Οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$\mathbf{ημx = ημθ \Leftrightarrow x = \begin{cases} 2κπ + θ \\ 2(κ+1)π - θ, \quad κ \in Z \end{cases}}$$

- **Η εξίσωση συνx = α**

Βρίσκουμε γωνία θ , για την οποία ισχύει: συνθ = α. Οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$\mathbf{συνx = συνθ \Leftrightarrow x = \begin{cases} 2κπ + θ \\ 2κπ - θ, \quad κ \in Z \end{cases}}$$

- **Η εξίσωση εφx = α**

Βρίσκουμε γωνία θ , για την οποία ισχύει: εφθ = α. Οπότε η εξίσωση γίνεται:

εφx = εφθ ⇔ x = κπ+θ , κ∈Z με συνx≠0

- **Η εξίσωση σφx = α**

Βρίσκουμε γωνία θ , για την οποία ισχύει: σφθ = α. Οπότε η εξίσωση γίνεται:

σφx = σφθ ⇔ x = κπ+θ , κ∈Z με ημx≠0

<u>Παρατηρήσεις:</u>

- Να θυμόμαστε τους τρόπους με τους οποίους απαλλασσόμαστε από το **μείον (-)** , μπροστά από έναν τριγωνομετρικό αριθμό. Δηλ.

- ημx=ημ(-x)
- εφx=εφ(-x)
- σφx=σφ(-x) αλλά
- συνx=συν(π-x)

- Επίσης τον τρόπο με τον οποίο **αλλάζουμε** τριγωνομετρικό αριθμό Δηλ.

ημx = συν(π/2-x)
συνx=ημ(π/2-x)
εφx=σφ(π/2-x)
σφx=εφ(π/2-x)

- Στις περιπτώσεις που έχουμε και **μείον** μπροστά από τον τριγωνομετρικό αριθμό και χρειάζεται να αλλάξουμε τριγωνομετρικό αριθμό , **πρώτα απαλλασσόμαστε από το μείον και μετά αλλάζουμε τριγωνομετρικό αριθμό**

π.χ. –ημx=ημ(-x)=συν(π/2-(-x))=συν(π/2+x)

- Στις εξισώσεις που υπάρχουν εφαπτομένη , συνεφαπτομένη ή παρονομαστές με μεταβλητή , βάζουμε **περιορισμούς** . Στο τέλος για να είναι δεκτές οι λύσεις που βρήκαμε, **ελέγχουμε** αν ικανοποιούν τους περιορισμούς .