ΘΕΩΡΙΑ (και βασικές οδηγίες για τις ασκήσεις)

1.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ορισμός

Έστω A ένα υποσύνολο του R. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το A** μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία **κάθε στοιχείο x ∈A** αντιστοιχίζεται **σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y**. Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με **f(x).**

Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε:

$$f : A \to R$$
$$x \to f(x).$$

— Το γράμμα x, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του A λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το γράμμα y, που παριστάνει την τιμή της f στο x, λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή.**

— Το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f συνήθως συμβολίζεται με D_f.

— Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή:

$$f(A) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}.$$

- Είδαμε παραπάνω ότι για να οριστεί μια συνάρτηση f αρκεί να δοθούν δύο στοιχεία:
  - **το πεδίο ορισμού** της και
  - **η τιμή της, f (x)**, για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

Γραφική παράσταση συνάρτησης

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων M(x, y) για τα οποία ισχύει y = f (x), δηλαδή το σύνολο των σημείων M(x, f(x)), x ∈ A , λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f . Η εξίσωση, λοιπόν, y = f (x) επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f . Επομένως, η y = f (x) είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f.

Επειδή κάθε x∈ A αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο y ∈ R, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το **πολύ ένα κοινό σημείο**.

Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f, τότε:

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f .

β) Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο f (A) των τεταγμένων των σημείων της C_f .

γ) Η τιμή της f στο x_0 ∈A είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ και της C_f .

Σχόλια:

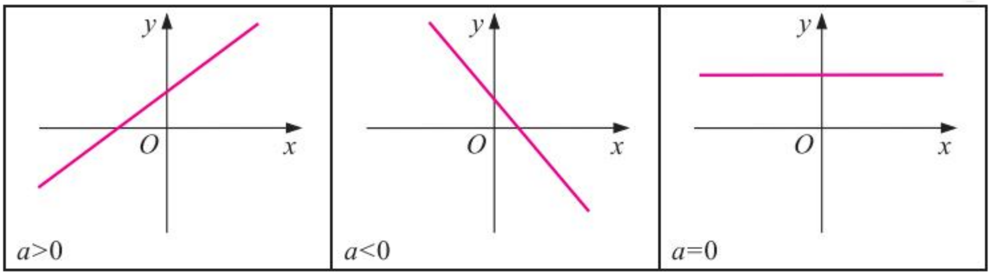
α) Η γραφική παράστασης της συνάρτησης **– f είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα x′x, της γραφικής παράστασης της f,** γιατί αποτελείται από τα σημεία M′(x, – f (x)) που είναι συμμετρικά των M(x, f (x)), ως προς τον άξονα x′x.

β) Η γραφική παράσταση της **| f | αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x′x και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα x′x, των τμημάτων της C_f**

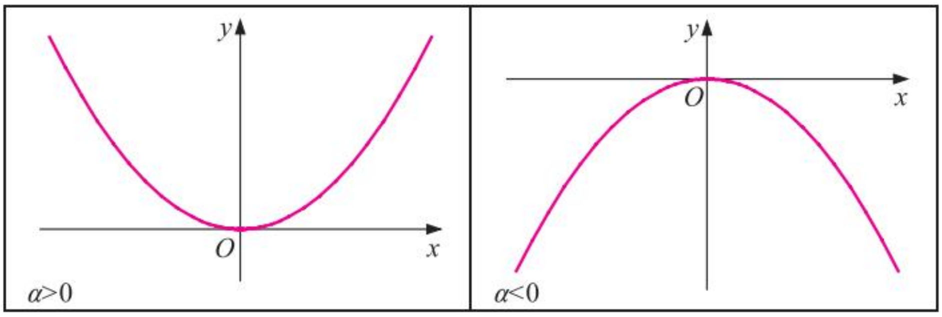
που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν.

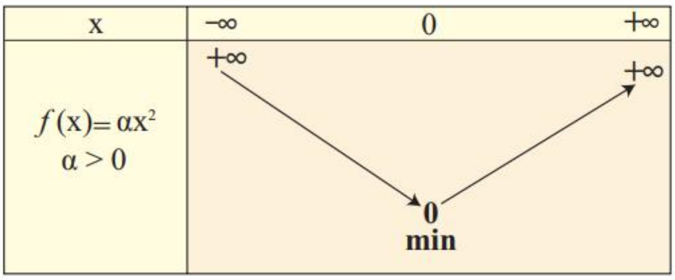
Γραφικές παραστάσεις μερικών βασικών συναρτήσεων

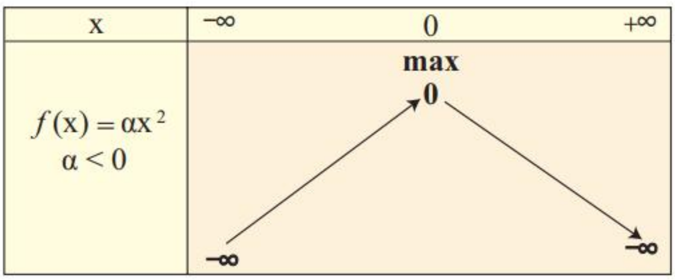
Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$.



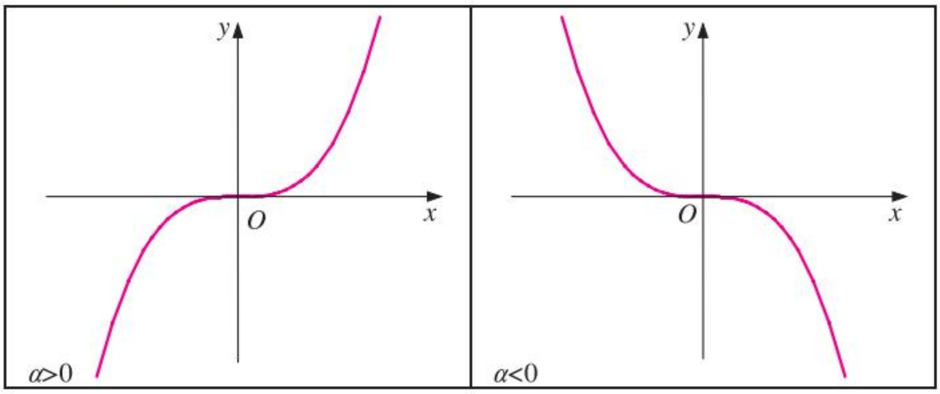
Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$.



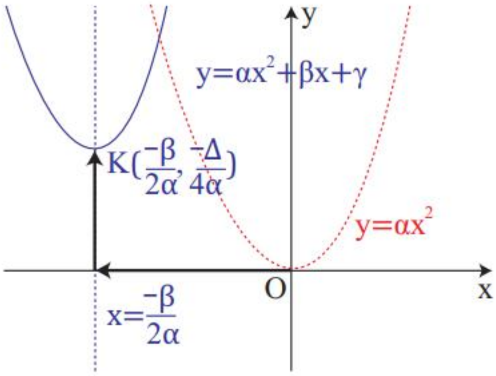


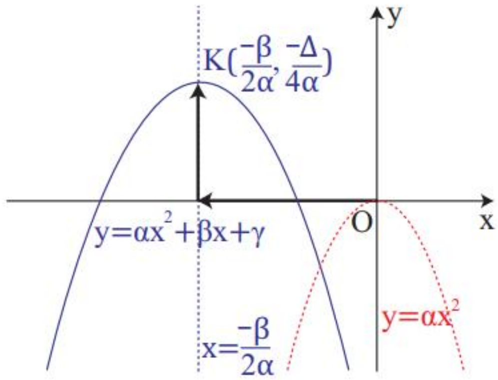


Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3,\ \alpha \neq 0$.



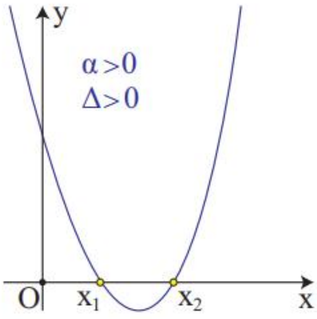
Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ($\alpha \neq 0$)



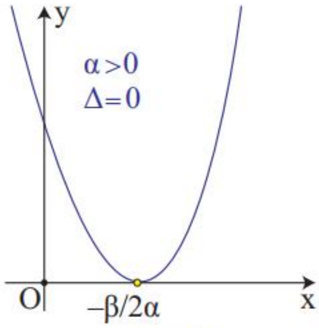


x	$-\infty$	$\frac{-\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ $\alpha > 0$	$+\infty$ ↘	$\frac{-\Delta}{4\alpha}$ min	↗ $+\infty$

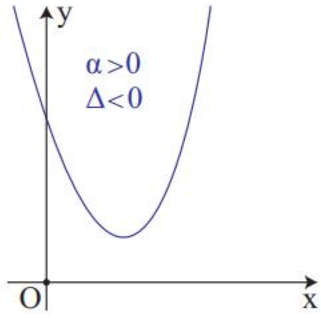
x	$-\infty$	$\frac{-\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ $\alpha < 0$	$-\infty$ ↗	$\frac{-\Delta}{4\alpha}$ max	↘ $-\infty$



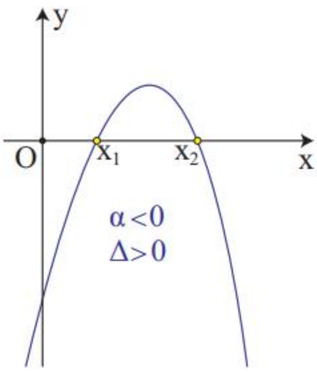
Σχήμα α΄



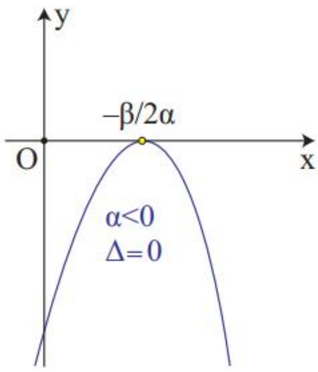
Σχήμα β΄



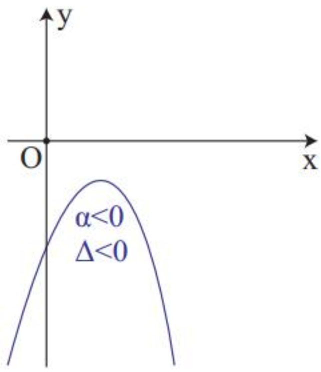
Σχήμα γ΄



Σχήμα α΄

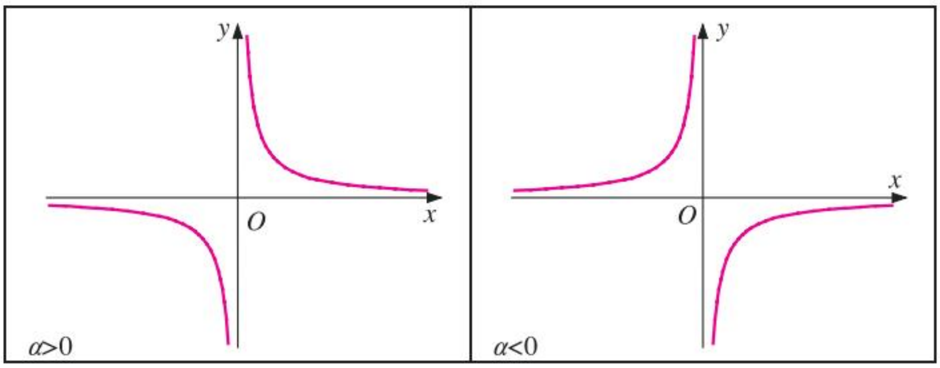


Σχήμα β΄

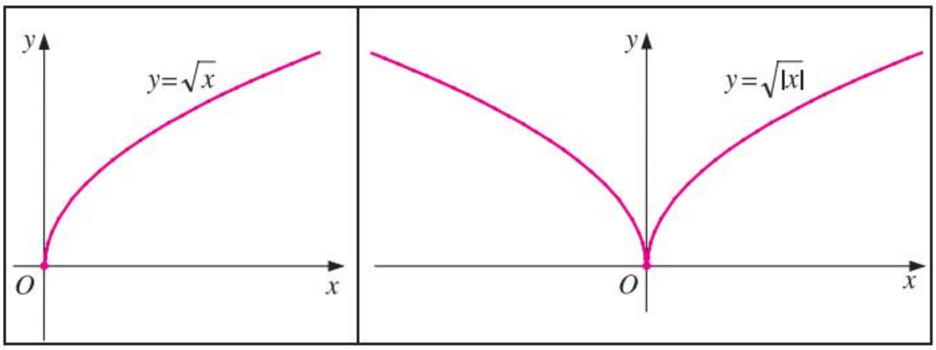


Σχήμα γ΄

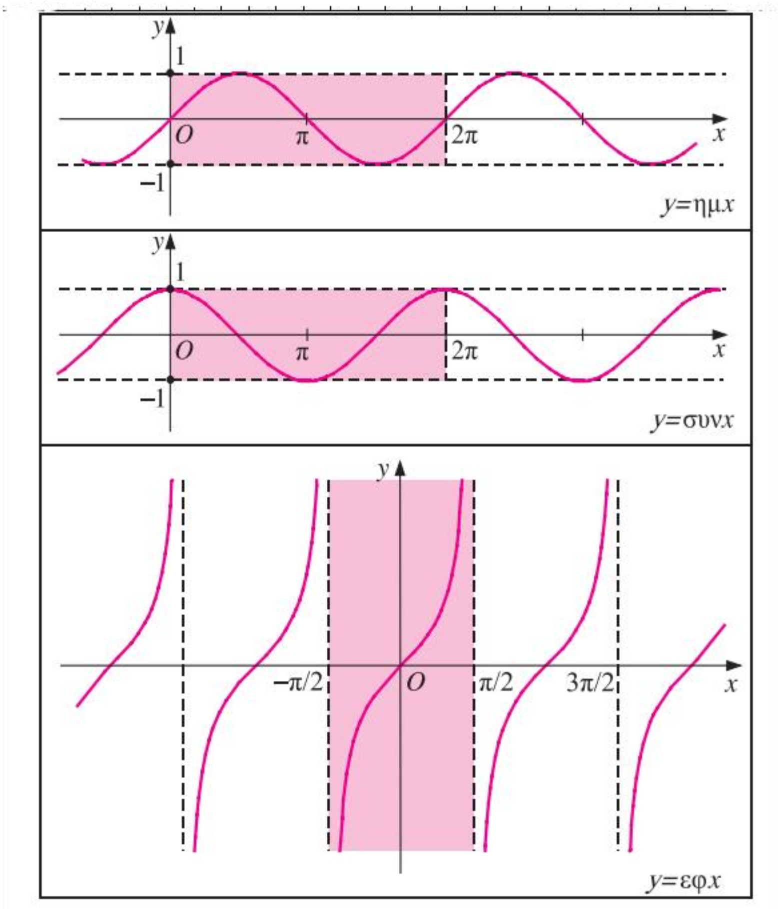
Η ρητή συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha}{x},\ \alpha\neq 0$.



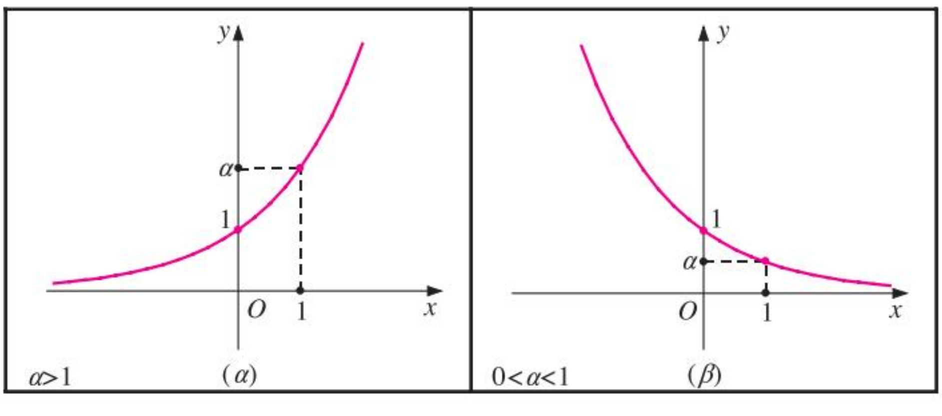
Οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x},\ g(x)=\sqrt{|x|}$.



Οι τριγωνικές συναρτήσεις: f(x) = ημx, f(x) = συνx, f(x) = εφx.



Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $0 < \alpha \neq 1$.



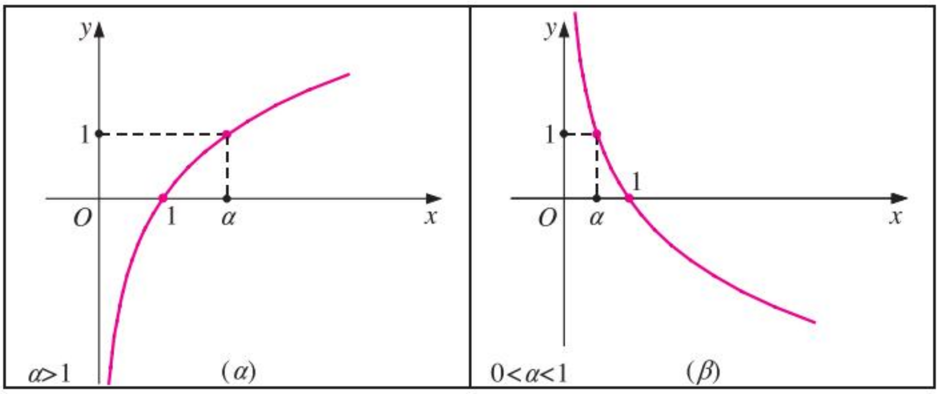
Υπενθυμίζουμε ότι:

αν $\alpha > 1$, τότε: $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$

ενώ

αν $0 < \alpha < 1$, τότε: $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_\alpha x$, $0 < \alpha \neq 1$.



Υπενθυμίζουμε ότι:

1) $\log_\alpha x = y \Leftrightarrow \alpha^y = x$

2) $\log_\alpha \alpha^x = x \qquad \alpha^{\log_\alpha x} = x$

3) $\log_\alpha \alpha = 1 \qquad \log_\alpha 1 = 0$

4) $\log_\alpha (x_1 x_2) = \log_\alpha x_1 + \log_\alpha x_2$

5) $\log_\alpha \left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = \log_\alpha x_1 - \log_\alpha x_2$

6) $\log_\alpha x_1^k = \kappa \log_\alpha x_1$

7) $\alpha > 1$, $\quad : \log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$

$0 < \alpha < 1$, $\quad : \log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

8) $\alpha^x = e^{x\ln\alpha}$, $\qquad \alpha = e^{\ln\alpha}$.

Πεδίο ορισμού βασικών συναρτήσεων

1. **Πολυωνυμική συνάρτηση:** $f(\chi)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\dots\dots+\alpha_1 x+\alpha_0$, με $\alpha_\nu,\alpha_{\nu-1},\dots\dots,\alpha_0\in R$. $D_f=R$.

2. **Ρητή συνάρτηση:** $f(x)=\dfrac{P(\chi)}{Q(\chi)}$ (πηλίκο δύο πολυωνύμων)

$D_f= \{x/Q(x)\neq 0)$

3. **Άρρητη συνάρτηση:** $f(x)=\sqrt{g(\chi)}$

$D_f= \{x\in R/g(x)\geq 0\}$

4. **Τριγωνομετρικές συναρτήσεις:**

α. $f(x)=\eta\mu x$, $D_f = R$

β. $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $D_f = R$

γ. $f(x)=\varepsilon\varphi x$, $D_f = R- \{x/x\in R$ και $x=\kappa\pi+\pi/2, \kappa\in Z\}$

δ. $f(x)=\sigma\varphi x$, $D_f = R- \{x/x\in R$ και $x=\kappa\pi, \kappa\in Z\}$

5. **Λογαριθμική συνάρτηση:** $f(x)=\log_{\alpha}g(x)$, με $1\neq\alpha>0$.
$D_f = \{x/g(x)>0\}$

6. **Εκθετική συνάρτηση:** $f(x)=\alpha^{g(x)}$, $1\neq\alpha>0$.
$D_f = D_g$.
Αν $f(x)=h(x)^{g(x)}$ πρέπει: $h(x)>0$, οπότε: $D_f = D_h\cap D_g$

7. Σε περίπτωση συνδυασμού των παραπάνω περιπτώσεων, βρίσκουμε την τομή των επί μέρους πεδίων ορισμού.

8. Αν έχουμε συνάρτηση πολλαπλού τύπου, βρίσκουμε το πεδίο ορισμού για τον κάθε κλάδο , και μετά παίρνουμε την ένωση όλων των διαστημάτων.
(**Α΄Ομάδα**- Ασκ.1, σελ.27)

Π ρ ο σ ο χ ή

Το πεδίο ορισμού βρίσκεται **ΠΡΙΝ** κάνουμε τις τυχόν υπάρχουσες απλοποιήσεις !!

Εύρεση Συνόλου τιμών

Για να βρούμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f(x), πρώτα βρίσκουμε το πεδίο ορισμού και μετά λύνουμε την εξίσωση f(x)=y ως προς x. Από του περιορισμούς που έχουμε για το x , βρίσκουμε τους αντίστοιχους για το y.

♦ Στην περίπτωση της ρητής συνάρτησης , αφού πρώτα βρούμε το πεδίο ορισμού της, ελέγχουμε αν γίνεται παραγοντοποίηση και απλοποίηση. Μετά λύνουμε ως προς x .
Αν καταλήγουμε σε τριώνυμο: $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, το λύνουμε όπως ξέρουμε (αν χρειαστεί) ως προς x , αφού πάρουμε υπ' όψιν μας τις περιπτώσεις για το συντελεστή του x^2 (δηλ. αν $\alpha=0$ και αν $\alpha\neq0$, στην περίπτωση που το α περιέχει το y).
Για την τελική εύρεση του συνόλου τιμών, λαμβάνουμε υπ' όψιν και τους τυχόν υπάρχοντες περιορισμούς του x από το πεδίο ορισμού.

♦ Αν έχουμε συνάρτηση πολλαπλού τύπου, βρίσκουμε το σύνολο τιμών για τον κάθε κλάδο ξεχωριστά και στο τέλος παίρνουμε την ένωσή τους.

Παρατηρήσεις

- Για να βρούμε τα **σημεία τομής** της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f με τον **άξονα x΄x** θέτουμε **y=f(x)=0** και λύνουμε την εξίσωση. Ενώ για να βρούμε τα **σημεία τομής** της C_f με **τον y΄y** , θέτουμε **x=0** και βρίσκουμε το y=f(0).

- Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται **πάνω από τον άξονα x΄x**, λύνουμε την ανίσωση **f(x)>0**.

- Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται **κάτω από τον άξονα x΄x**, λύνουμε την ανίσωση **f(x)<0**.

- Για να βρούμε τα σημεία **τομής των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων f,g**, λύνουμε την εξίσωση: **f(x)=g(x)**. Την τιμή ή τις τιμές των x που βρίσκουμε την (τις) αντικαθιστούμε στον τύπο της f(x) ή της g(x).

- Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται **πάνω** από τη C_g, λύνουμε την ανίσωση **f(x)>g(x)**.

- Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται **κάτω** από τη C_g, λύνουμε την ανίσωση **f(x)<g(x).**

(**Α΄Ομάδα-**Ασκ. 2, 3 , σελ 27)

● Ισότητα συναρτήσεων

Ορισμός
Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:
● **έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α** και
● **για κάθε x∈A ισχύει f(x) = g(x)**

- Δηλαδή: Για να είναι ίσες δύο συναρτήσεις πρέπει να έχουν **ίδιο τύπο** , αλλά και το **ίδιο πεδίο ορισμού**.

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε f = g.

Έστω τώρα f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντιστοίχως και Γ ένα υποσύνολο των Α και Β. Αν για κάθε x∈Γ ισχύει f(x) = g(x), τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις **f και g είναι ίσες στο σύνολο Γ.**

(Α΄Ομάδα-Ασκ.7, σελ.28**)**

● Πράξεις με συναρτήσεις

Ορίζουμε ως **άθροισμα f + g, διαφορά f – g, γινόμενο fg** και **πηλίκο fg** δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους :

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Το πεδίο ορισμού των f + g, f – g και f·g είναι η **τομή** $\boldsymbol{A\cap B}$ των πεδίων ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A\cap B$, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο:

$$\{\, x \mid x\in A \text{ και } x\in B \text{, με } g(x) \neq 0\}$$

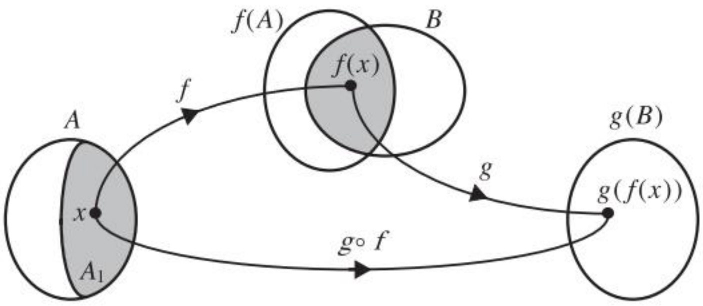
Παρατήρηση
Σε περίπτωση συναρτήσεων πολλαπλού τύπου, για να βρούμε την πράξη που απαιτεί η άσκηση, παίρνουμε τους δυνατούς συνδυασμούς των κλάδων των δύο συναρτήσεων και βρίσκουμε το πεδίο ορισμού και τον τύπο σε κάθε περίπτωση (εφ’ όσον ορίζονται)

(**Α΄Ομάδα-**Ασκ.8,9, σελ 28)

● Σύνθεση συναρτήσεων

Ορισμός
Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της f με την g**, και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο

$(g \circ f)(x) = g((f x))$.



Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το f(x) ανήκει στο πεδίο ορισμού της g.
Δηλαδή είναι το σύνολο:

$D_{gof} = \{ x \in D_f \mid f(x) \in D_g \} \neq \varnothing$

Είναι φανερό ότι η $g \circ f$ ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

Σχόλια:
● Στην παραπάνω εφαρμογή παρατηρούμε ότι $g \circ f \neq f \circ g$. Γενικά, αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $g\circ f$ και $f\circ g$, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.
● Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h\circ(g\circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h\circ g)f$ και ισχύει : $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$

Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των f, g και h και τη συμβολίζουμε με $h\circ g\circ f$. Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

● Παρατηρήσεις:

❖ Για να βρούμε τη σύνθεση δύο συναρτήσεων, πρώτα **ελέγχουμε αν ορίζεται** η σύνθεσή τους και μετά γράφουμε τον τύπο της συνάρτησης που προκύπτει .
❖ Για να ορίζεται η σύνθεση δύο συναρτήσεων πρέπει: $D_{fog}=\{x\in D_g / g(x) \in D_f\}\neq\varnothing$.

Δηλ. λύνουμε το σύστημα: $x\in D_g$ και $g(x) \in D_f$. Αν το σύστημα έχει λύση, ορίζεται η σύνθεση. Αν το σύστημα είναι αδύνατο, η σύνθεση **ΔΕΝ** ορίζεται.

(**Α΄Ομάδα:** Ασκ. 10,11 , σελ.28-29)

♠ Σε περίπτωση συναρτήσεων πολλαπλού τύπου, πρώτα ελέγχουμε αν ορίζεται η σύνθεσή τους , σε κάθε δυνατό συνδυασμό των κλάδων τους και εφ΄ όσον ορίζεται, βρίσκουμε τον τύπο της (fog)(x)=f(g(x)), για κάθε περίπτωση ξεχωριστά.

♠ Όταν μας δίνουν τον τύπο της (fog)(x)= f(g(x)) και της g(x) και θέλουμε να βρούμε τον τύπο της f(x), **θέτουμε** g(x)=ω , λύνουμε ως προς x και αντικαθιστούμε στον τύπο της (fog)(x)= f(g(x)).

(**Β΄Ομάδα:** Άσκ. 6 i, ii , σελ.30)

♠ Όταν μας δίνουν τον τύπο της (fog)(x)= f(g(x)) και της f(x) και θέλουμε να βρούμε τον τύπο της g(x), **θέτουμε** στον τύπο της f(x) στη θέση του x το g(x). Δηλ. βρίσκουμε τον τύπο της f(g(x)) και τον εξισώνουμε με το δοσμένο τύπο.

(Β΄Ομάδα: Άσκ. 6 iii , σελ.30).

◆ 1.3 ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

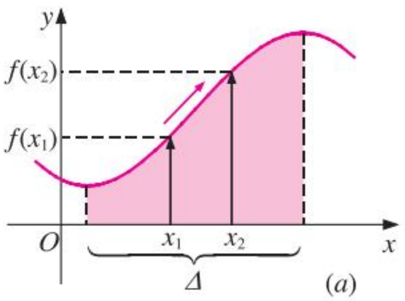
● Μονοτονία συνάρτησης

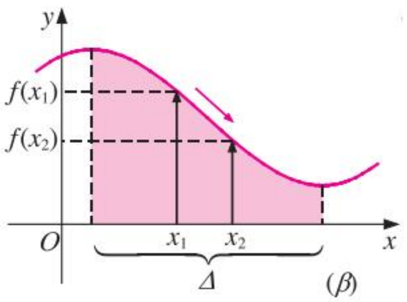
Ορισμός

Μια συνάρτηση f λέγεται (1):

● **γνησίως αύξουσα** σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε **$x_1, x_2 \in \Delta$** με **$x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$** (Σχ. α)

● **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε **$x_1, x_2 \in \Delta$** με **$x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$** (Σχ. β)





❖ Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι **γνησίως μονότονη στο Δ.** Στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού της f είναι ένα διάστημα Δ και η f είναι γνησίως μονότονη σ' αυτό, τότε θα λέμε, απλώς, ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Σ χ ό λ ι ο :

Μια συνάρτηση f λέγεται, απλώς:

• **αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ, όταν για οποιαδήποτε , **$x_1, x_2 \in \Delta$** με **$x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) \leq f(x_2)$**

• **φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ, όταν για οποιαδήποτε , **$x_1, x_2 \in \Delta$** με **$x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) \geq f(x_2)$**

(**Α΄Ομάδα**-Ασκ.1,4, σελ.38-39)

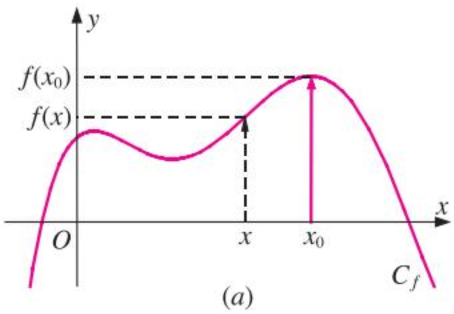
● Ακρότατα συνάρτησης

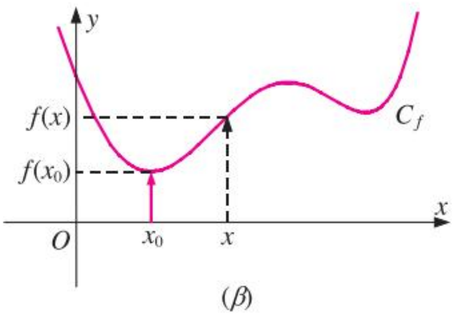
Ορισμός

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

● Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν **$f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$** (Σχ. 27α)

● Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν **$f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$** (Σχ. 27β).





Σ χ ό λ ι ο

Όπως είδαμε και στα προηγούμενα παραδείγματα, άλλες συναρτήσεις παρουσιάζουν μόνο μέγιστο, άλλες μόνο ελάχιστο, άλλες και μέγιστο και ελάχιστο και άλλες ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο.

- Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται **ολικά ακρότατα** της f.

• Σ υ ν ά ρ τ η σ η "1-1"

■ Ορισμός (Προσοχή)

Μια συνάρτηση $f: A \to R$ λέγεται **συνάρτηση 1–1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

αν $\mathbf{x_1 \neq x_2}$, **τότε** $\mathbf{f(x_1) \neq f(x_2)}$

Με απαγωγή σε άτοπο **αποδεικνύεται** ότι:

Μια συνάρτηση $f: A \to R$ είναι **συνάρτηση 1–1**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

αν $\mathbf{f(x_1) = f(x_2)}$, **τότε** $\mathbf{x_1 = x_2}$

Σ χ ό λ ι α

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση f είναι 1–1, αν και μόνο αν:

1. Για κάθε στοιχείο *y* του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x) = y έχει ακριβώς μια λύση ως προς *x*.

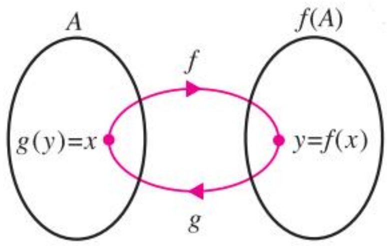
2. Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της *f* το πολύ σε ένα σημείο.

3. Αν μια συνάρτηση είναι **γνησίως μονότονη,** τότε προφανώς, **είναι συνάρτηση "1–1".**

• Α ν τ ί σ τ ρ ο φ η σ υ ν ά ρ τ η σ η

Έστω μια συνάρτηση $f: A \to R$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι 1–1, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, f(A), της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει f(x) = y. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση
$g: f(A) \to R$
με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει f(x) = y
Από τον τρόπο που ορίστηκε η *g* προκύπτει ότι:

- έχει **πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών f(A)** της f,
- έχει **σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A** της f και
- ισχύει η ισοδυναμία: $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$



Αυτό σημαίνει ότι αν μια συνάρτηση f αντιστοιχίζει το x στο y, τότε η g αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως. Η g λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με $\mathbf{f^{-1}}$.

Π ρ ο σ ο χ ή

Επόμένως έχουμε: $\boxed{f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x}$

Οπότε: $\boxed{f^{-1}(f(x)) = x\,,\ x \in A \quad \text{και} \quad f(f^{-1}(y)) = y\,,\ y \in f(A)}$

- Οι γραφικές παραστάσεις C και C′ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι **συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x** που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x′Oy′.

- <u>Π α ρ α τ η ρ ή σ ε ι ς</u>

1. Α ν τ ι σ τ ρ έ ψ ι μ η σ υ ν ά ρ τ η σ η

Για να αποδείξουμε ότι μία συνάρτηση είναι ¨1 – 1¨ σε ένα διάστημα Δ, χρησιμοποιούμε κάποιον από τους παρακάτω τρόπους :

i. Έστω $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Με συνεπαγωγές επιδιώκουμε να καταλήξουμε στο $x_1 = x_2$

ii. Έστω $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$. Με διαδοχικές συνεπαγωγές επιδιώκουμε να καταλήξουμε στη σχέση $f(x_1) \neq f(x_2)$

iii. Αποδεικνύουμε ότι η **f είναι γνησίως μονότονη στο Δ, οπότε είναι και ¨1 – 1¨**

2. Εύρεση αντίστροφης συνάρτησης της f.

- ✓ Αποδεικνύουμε ότι είναι 1 – 1
- ✓ Λύνουμε την εξίσωση f (x)= y ως προς x
- ✓ Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f
- ✓ Θέτουμε $x = f^{-1}(y)$ και αλλάζουμε μεταβλητές (όπου y το x και αντίστροφα)

(**Α΄Ομάδα**-Ασκ.2, σελ.38)

3. Επίλυση εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$

- ➢ Για να βρούμε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$, δηλαδή για να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$, αποδεικνύουμε ότι η f **είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της,** οπότε τα ζητούμενα σημεία βρίσκονται επί της ευθείας y= x . Άρα: $\mathbf{f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x}$
- ➢ Αν η f δεν είναι γνησίως αύξουσα, τότε βρίσκουμε την f^{-1} και λύνουμε απευθείας την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$

◆ 1.4 ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $x_0 \in R$

● Έννοια του ορίου

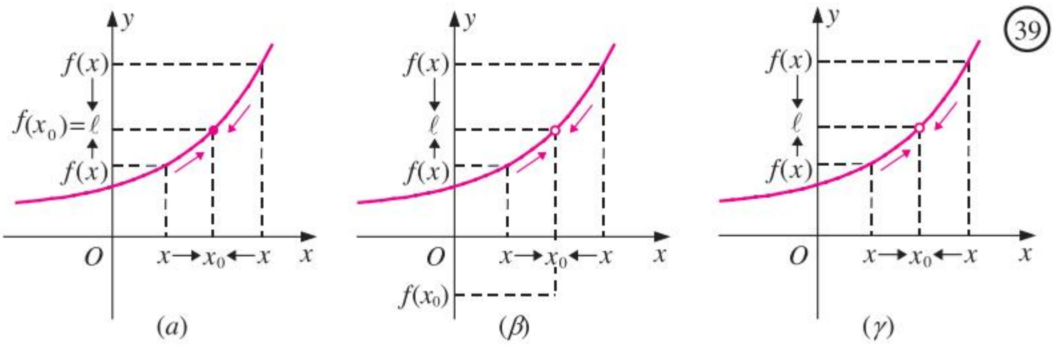
Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0, τότε γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

και διαβάζουμε

"το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0, είναι ℓ" ή

"το όριο της $f(x)$ στο x_0 είναι ℓ".



Σχόλιο

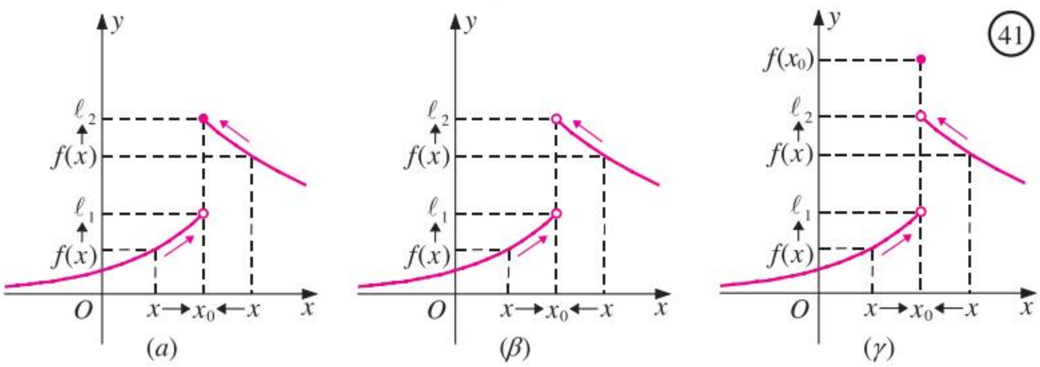
Από τα παραπάνω σχήματα παρατηρούμε ότι:

— Για να αναζητήσουμε το όριο της **f** στο $\mathbf{x_0}$, πρέπει η **f** να ορίζεται όσο θέλουμε "κοντά στο $\mathbf{x_0}$", δηλαδή η **f** να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής

$(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ ή (α,x_0) ή (x_0,β)

— Το $\mathbf{x_0}$ μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (Σχ. 39α, 39β) ή να μην ανήκει σ' αυτό (Σχ. 39γ).

— Η τιμή της **f** στο $\mathbf{x_0}$, όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο $\mathbf{x_0}$ (Σχ. 39α) ή διαφορετική από αυτό. (Σχ. 39β).



Τους αριθμούς $\ell_1 = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ και $\ell_2 = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ τους λέμε **πλευρικά όρια** της f στο x_0 και συγκεκριμένα το ℓ_1 **αριστερό όριο** της f στο x_0, ενώ το ℓ_2 **δεξιό όριο** της f στο x_0.

Από τα παραπάνω σχήματα φαίνεται ότι:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell, \text{ αν και μόνο αν } \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$$

- ## Ορισμός του ορίου στο $x_0 \in R$

(α) $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}(f(x)-\ell)=0$

(β) $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+h)=\ell$

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$$

Σχόλιο

Αποδεικνύεται ότι το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ είναι ανεξάρτητο των άκρων **α**, **β** των διαστημάτων (**α**, **x_0**) και (**x_0**, **β**) στα οποία θεωρούμε ότι είναι ορισμένη η **f.**

ΣΥΜΒΑΣΗ

Στη συνέχεια, όταν λέμε ότι μια συνάρτηση **f** έχει κοντά στο x_0 μια ιδιότητα **P** θα εννοούμε ότι ισχύει μια από τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

α) Η **f** είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ και στο σύνολο αυτό έχει την ιδιότητα **P**.

β) Η **f** είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (**α**, **x_0**), έχει σ' αυτό την ιδιότητα **P**, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (**x_0**, **β**).

γ) Η **f** είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (**x_0**, **β**), έχει σ' αυτό την ιδιότητα **P**, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (**α**, **x_0**).

- ## Όριο ταυτοτικής $f(x) = x$ και σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$

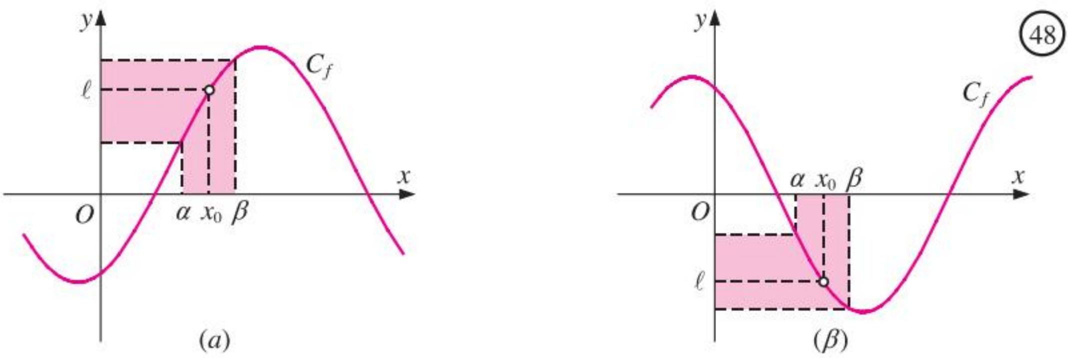
Ισχύει: $\lim_{x\to x_0} x = x_0$ και $\lim_{x\to x_0} c = c$

◆ 1.5 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

● Όριο και διάταξη

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

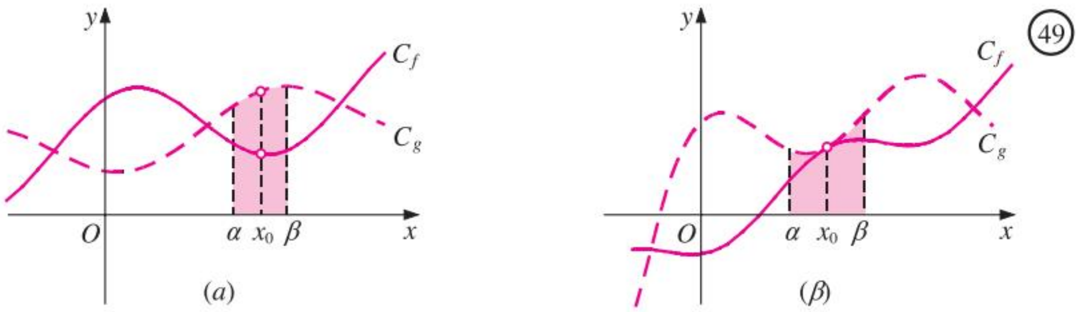
- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 (Σχ. 48α)
- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 (Σχ. 48β)



ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)$$



• Όρια και πράξεις

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, τότε:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)+\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to x_0}(\kappa f(x))=\kappa\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, για κάθε σταθερά $\kappa\in\mathbb{R}$
3. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$
4. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$, εφόσον $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$
5. $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\left|\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right|$
6. $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)}=\sqrt[k]{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}$, εφόσον $f(x)\geq 0$ κοντά στο x_0.

Σχόλιο: Επισημαίνουμε ότι , **όλες οι ιδιότητες ισχύουν με την προϋπόθεση ότι υπάρχουν τα όρια των f και g.**

Οι ιδιότητες 1 και 3 του θεωρήματος ισχύουν και για περισσότερες από δυο συναρτήσεις. Άμεση συνέπεια αυτού είναι:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}[f(x)]^\nu=\left[\lim_{x\to x_0}f(x)\right]^\nu,\quad \nu\in\mathbb{N}^*}$$

➢ $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$

Απόδειξη

— Έστω τώρα το πολυώνυμο

$$P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0 \text{ και } x_0\in\mathbb{R}.$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω ιδιότητες έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}P(x)&=\lim_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0)\\&=\lim_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu)+\lim_{x\to x_0}(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1})+\cdots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0\\&=\alpha_\nu\lim_{x\to x_0}x^\nu+\alpha_{\nu-1}\lim_{x\to x_0}x^{\nu-1}+\cdots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0\\&=\alpha_\nu x_0^\nu+\alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0=P(x_0)\,.\end{aligned}$$

- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, εφ' όσον $Q(x_0)\neq 0$

Απόδειξη

— Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0\in\mathbb{R}$ με $Q(x_0)\neq 0$. Τότε,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

Κριτήριο Παρεμβολής

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν

- $h(x)\le f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\ell$,

τότε

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\ell.$$

Τριγωνομετρικά όρια

Αρχικά ισχύει: **$|\eta\mu x|\le|x|$**, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (**η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x=0$**)

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\eta\mu x=\eta\mu x_0$
2. $\lim\limits_{x\to x_0}\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x_0$
3. **$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$**
4. **$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$**

Όριο σύνθετης συνάρτησης

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο σύνθετης συνάρτησης $\lim\limits_{x\to x_0}f((g(x))$

τότε εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε $u=g(x)$.
2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$
3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=l$

Αποδεικνύεται ότι, αν $g(x)\neq u_0$ κοντά στο x_0, τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με l, δηλαδή ισχύει: $\lim\limits_{x\to x_0}f((g(x))=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)$

- <u>Π α ρ α τ η ρ ή σ ε ι ς στο Πεπερασμένο όριο στο x_0</u>

Πρώτα βρίσκουμε **το πεδίο ορισμού** της συνάρτησης για να ελέγξουμε αν ορίζεται το όριο.
Αν είναι δύσκολο να βρεθεί, διαλέγουμε κατάλληλο διάστημα.

1. Όταν **δεν έχουμε απροσδιοριστία**, αντικαθιστούμε το x με την τιμή του x_0 και βρίσκουμε την τιμή του ορίου.

2. Όταν **έχουμε απροσδιοριστία** της μορφής $\frac{0}{0}$

α. Σε **ρητή συνάρτηση** (Δηλ. **<u>πηλίκο δύο πολυωνύμων</u>**).
Παραγοντοποιούμε αριθμητή και παρονομαστή, για να εμφανισθεί ο όρος **$x-x_0$** , τον οποίο και απλοποιούμε , για να απαλλαγούμε από την απροσδιοριστία.
(**Α΄Ομάδα**-Ασκ.3 - **Β΄Ομάδα**-Ασκ.1 (i, ii), σελ.56 και 58)

β. Σε **άρρητη συνάρτηση** (Δηλ. **της μορφής** $\sqrt[\kappa]{f(x)}$ **με κ∈N* και f(x)≥0**).

i. Αν είναι της μορφής $\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}$ **<u>πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε</u>** με την συζυγή παράσταση, για να προκύψει διαφορά τετραγώνων και να απλοποιηθούν οι ρίζες.

ii. Αν είναι ρίζες μεγαλύτερης τάξης , χρησιμοποιούμε την ταυτότητα:

$\alpha^{\nu}-\beta^{\nu}=(\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\ldots\ldots+\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1})$ και πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την

παράσταση $\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\ldots\ldots+\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1}$, για να προκύψει η ταυτότητα $\alpha^{\nu}-\beta^{\nu}$ και να

απλοποιηθούν οι ρίζες.

<u>Παράδειγμα:</u> $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}=\dfrac{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2})}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2})}=\dfrac{x-2}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2})}$.

(**Α΄Ομάδα**-Ασκ.4 - **Β΄Ομάδα**-Ασκ.2(iv) , σελ.57 και 58)

3. Όταν έχουμε **συναρτήσεις πολλαπλού τύπου.**

i. Σε περίπτωση που το <u>x_0 δεν είναι σημείο αλλαγής τύπου</u>, παίρνουμε τον αντίστοιχο κλάδο της συνάρτησης , που ορίζεται στο διάστημα που ανήκει το x_0 και υπολογίζουμε το όριο.
ii. Στην περίπτωση που το <u>x_0 είναι σημείο αλλαγής τύπου</u>, υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια.
Το <u>όριο δεν υπάρχει</u> όταν τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

<u>Σημείωση</u>: Αν είναι παραμετρική η συνάρτηση, **απαιτούμε** τα πλευρικά όρια να είναι ίσα μεταξύ τους και από αυτήν την εξίσωση προσδιορίζουμε τις τιμές της παραμέτρου
(**Α΄Ομάδα**-Ασκ.5, 9, σελ.57)

4. Όταν έχουμε **συναρτήσεις με απόλυτα.**

i. Αν <u>δεν έχουμε απροσδιοριστία</u>, αντικαθιστούμε το x με την τιμή του x_0 και υπολογίζουμε το όριο.

ii. Αν έχουμε απροσδιοριστία:

α. Όταν το x_0 **δεν** μηδενίζει τα απόλυτα, βρίσκουμε το πρόσημο του ορίου της παράστασης που βρίσκεται μέσα σε κάθε απόλυτο ,οπότε και το πρόσημο της παράστασης μέσα στο απόλυτο, με χρήση των σχέσεων: $\begin{array}{l} \text{αν } \lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0 \text{ τότε } f(x)>0 \\ \text{αν } \lim\limits_{x\to x_0} f(x)<0 \text{ τότε } f(x)<0 \end{array}$ κοντά στο x_0 και απαλλασσόμαστε από τα απόλυτα.

β. Όταν το x_0 μηδενίζει κάποιο απόλυτο, τότε με τη βοήθεια πίνακα βρίσκουμε το πρόσημο των παραστάσεων μέσα στα απόλυτα και περιορίζοντας το x_0 σε κατάλληλο διάστημα , απαλλασσόμαστε από τα απόλυτα και υπολογίζουμε πλευρικά όρια.
(**Β΄Ομάδα**-Ασκ.2(i, ii, iii), σελ.58)

5. Όταν έχουμε **τριγωνομετρικές συναρτήσεις.**

Χρησιμοποιούμε συνήθως τους τύπους: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$, $\lim\limits_{f(x)\to 0}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=1$ ή $\lim\limits_{f(x)\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu f(x)-1}{f(x)}=0$, για τον υπολογισμό των ορίων.
(**Α΄Ομάδα**-Ασκ.6,7, σελ.57)

6. Υπολογισμός ορίου με **αντικατάσταση.**

Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε όριο της μορφής $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))$, τότε:

θέτουμε $g(x)=\psi$, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\psi_0$ και το όριο γίνεται : $\lim\limits_{\psi\to\psi_0} f(\psi)$.

Σχόλιο: Όταν έχουμε ρίζες με το ίδιο υπόρριζο, αλλά διαφορετική τάξη, βρίσκουμε το Ε.Κ.Π των δεικτών των ριζών και θέτουμε τη ρίζα με δείκτη το Ε.Κ.Π ίσο (για παράδειγμα) με ψ. Μετά υπολογίζουμε με την χρήση του ψ τα ριζικά.
(**Β΄Ομάδα**-Ασκ.1(iii), σελ.58)

7. Υπολογισμός ορίου με **βοηθητική συνάρτηση.**

Σε περιπτώσεις που ζητάμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και η f(x) είναι όρος σε μια συνάρτηση της οποίας ξέρουμε το όριο στο x_0, **θέτουμε** τη συνάρτηση για παράδειγμα g(x), λύνουμε ως προς f(x) και υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των ορίων. (**Β΄Ομάδα**-Ασκ.4, σελ.58)

8. Υπολογισμός ορίου με **το κριτήριο παρεμβολής.**

Όταν δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ με τους παραπάνω τρόπους , όπως για παράδειγμα όταν έχουμε ανισοτικές σχέσεις ή στη συνάρτηση περιέχεται ημx, συνx

(και δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$ ή $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$ ή να κάνουμε αντικατάσταση), τότε **εφαρμόζουμε το κριτήριο παρεμβολής.**
(Χρησιμοποιούμε τους τύπους: $|\eta\mu x|\le 1$, $|\sigma\upsilon\nu x|\le 1$ ή $|\eta\mu x|\le|x|$).
(**Α΄Ομάδα**-Ασκ.8, σελ.57)

1.6 ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ $x_0 \in R$

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, ενώ

  αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} (-f(x)) = -\infty$, ενώ

  αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} (-f(x)) = +\infty$.

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$, ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$.

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$.

  $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^{2\nu}} = +\infty$, $\nu \in \mathbb{N}^*$

  $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty$, $\nu \in \mathbb{N}$

  ενώ

  $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty$, $\nu \in \mathbb{N}$

Επομένως, δεν υπάρχει στο μηδέν το όριο της $f(x) = \dfrac{1}{x^{2\nu+1}}$, $\nu \in N$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (όριο αθροίσματος)

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$						
το όριο της f είναι:	$\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
τότε το όριο της $f+g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (όριο γινομένου)

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$,										
το όριο της f είναι:	$\alpha>0$	$\alpha<0$	$\alpha>0$	$\alpha<0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της $f\cdot g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Στους πίνακες των παραπάνω θεωρημάτων, όπου υπάρχει ερωτηματικό, **σημαίνει ότι το όριο (αν υπάρχει) εξαρτάται κάθε φορά από τις συναρτήσεις που παίρνουμε.** Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι έχουμε **απροσδιόριστη μορφή**. Δηλαδή, απροσδιόριστες μορφές για τα όρια αθροίσματος και γινομένου συναρτήσεων είναι οι:

$(+\infty) + (-\infty)$ και **$0\cdot(\pm\infty)$**

Απροσδιόριστες μορφές για τα όρια της διαφοράς και του πηλίκου συναρτήσεων είναι οι:

$(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

- <u>Π α ρ α τ η ρ ή σ ε ι ς στο Μη πεπερασμένο όριο στο x_0</u>

- Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή.
- Χωρίζουμε την παράσταση σε δύο ποσότητες. Η μία περιέχει την ποσότητα της οποίας το όριο είναι πραγματικός αριθμός και η δεύτερη την απροσδιοριστία $\frac{\alpha}{0}$.

  i. Αν ξέρουμε το πρόσημο του παρονομαστή τότε το όριο είναι $+\infty$ ή $-\infty$.
  ii. Αν δεν ξέρουμε το πρόσημο του παρονομαστή, παίρνουμε πλευρικά όρια.

<u>Χρήσιμες ιδιότητες</u>:

Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ τότε:

α. Αν $f(x)>0$ τότε $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty$ β. Αν $f(x)<0$ τότε $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=-\infty$.

(**Α΄Ομάδα**-Ασκ.1,2 - **Β΄Ομάδα**-Ασκ.1 , σελ.63,64)

- <u>Παραμετρικά όρια</u>

- ✓ Αν έχουμε συνάρτηση πολλαπλού τύπου, βρίσκουμε τα πλευρικά όρια και απαιτούμε να είναι ίσα.
- ✓ Αν έχουμε ρητή συνάρτηση της μορφής $\frac{\alpha}{0}$, βρίσκουμε χωριστά το πρόσημο του αριθμητή και του παρονομαστή και διακρίνουμε περιπτώσεις.

(**Β΄Ομάδα**-Ασκ.3, σελ.64)

◆ 1.7 ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο +∞, πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής (α,+∞).

Ανάλογα για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο -∞, πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής (-∞, β).

Για τον υπολογισμό του ορίου στο +∞ ή -∞ ενός μεγάλου αριθμού συναρτήσεων χρειαζόμαστε τα παρακάτω βασικά όρια:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\nu} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\nu}} = 0,\ \nu\in\mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^{\nu} = \begin{cases} +\infty, & \nu \\ -\infty, & \nu \end{cases} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^{\nu}} = 0,\ \nu\in\mathbb{N}^*.$$

Για τα όρια στο +∞, -∞ ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο x_0 με την προϋπόθεση ότι:
— οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και
— δεν καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή.

● Όριο πολυωνυμικής και ρητής συνάρτησης

Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_0$, με $\alpha_\nu \neq 0$ ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} (\alpha_\nu x^\nu) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} (\alpha_\nu x^\nu)$$

Για τη ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\kappa x^\kappa + \beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0}$, $\alpha_\nu \neq 0, \beta_\kappa \neq 0$

ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right)$$

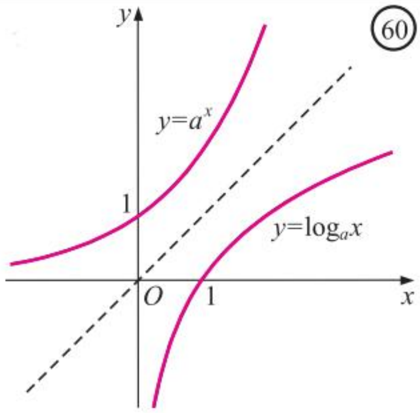
● Όρια εκθετικής – λογαριθμικής συνάρτησης

Αποδεικνύεται ότι:

● Αν $\alpha > 1$ (Σχ. 60), τότε

$$\lim_{x\to-\infty} \alpha^x = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$$

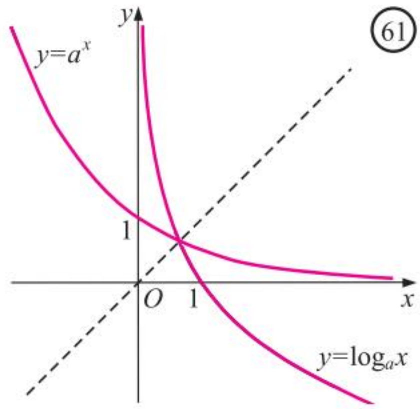
$$\lim_{x\to 0} \log_\alpha x = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \log_\alpha x = +\infty$$



● Αν $0 < \alpha < 1$ (Σχ. 61), τότε

$$\lim_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \log_\alpha x = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \log_\alpha x = -\infty$$



◆ Ορισμός ακολουθίας

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$

● Παρατηρήσεις στο Όριο συνάρτησης στο άπειρο

1. Όριο πολυωνυμικής συνάρτησης.
Υπολογίζουμε το όριο του μεγιστοβάθμιου όρου.
(**Α΄Ομάδα**-Ασκ.1(i,ii), σελ.68)

2. Όριο ρητής συνάρτησης .
Υπολογίζουμε το όριο του πηλίκου των μεγιστοβάθμιων όρων των δύο πολυωνύμων.
(**Α΄Ομάδα**-Ασκ.1(iii,iv,v,vi), σελ.68)

3. Όριο άρρητης συνάρτησης.

i. Αν δεν έχουμε απροσδιόριστη μορφή , βγάζουμε στο υπόρριζο κοινό παράγοντα το μεγιστοβάθμιο όρο, υπολογίζουμε τη ρίζα του όρου αυτού που συνήθως μας οδηγεί σε $|x|$ και αν το $x\to+\infty$ τότε $|x|=x$, ενώ αν το $x\to-\infty$ τότε $|x|=-x$. Το όριο προκύπτει εύκολα.

ii. Αν έχουμε απροσδιόριστη μορφή $0\cdot\infty$ τότε πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή παράσταση . Βγάζουμε κοινό παράγοντα από αριθμητή και παρονομαστή το μεγιστοβάθμιο όρο και υπολογίζουμε το όριο.
(**Α΄Ομάδα**-Ασκ.2, 3, 4(ii), σελ.69)

4. Όριο συνάρτησης με απόλυτα.
Υπολογίζουμε το πρόσημο του ορίου της παράστασης που είναι μέσα στο κάθε απόλυτο , οπότε και το πρόσημο της παράστασης . Βγάζουμε τα απόλυτα και συνεχίζουμε όπως ξέρουμε.

Χρήσιμες ιδιότητες:

α. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L>0$, τότε υπάρχει α>0, ώστε f(x)>0 για κάθε χ>α

β. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L<0$, τότε υπάρχει α>0, ώστε f(x)<0 για κάθε χ>α

γ. Αν $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L>0$, τότε υπάρχει α<0, ώστε f(x)>0 για κάθε χ<α

δ. Αν $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L<0$, τότε υπάρχει α<0, ώστε f(x)<0 για κάθε χ<α.

(**Β΄Ομάδα**-Ασκ.4(i, iii), σελ.69)

5. Όρια με παραμέτρους.
Βγάζουμε κοινό παράγοντα το μεγιστοβάθμιο όρο και διακρίνουμε περιπτώσεις .
(**Β΄Ομάδα**-Ασκ. 1, 2, 3 , σελ.69)

6. Όριο τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

α. Βγάζουμε κοινό παράγοντα μια θετική δύναμη του x για να δημιουργήσουμε τους όρους : $\frac{\eta\mu x}{x^\nu}, \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^\nu}$, που με κριτήριο παρεμβολής το όριό τους είναι ίσο με το 0 όταν x⟶+∞ ή x⟶-∞.

β. Εφαρμόζουμε κριτήριο παρεμβολής ή κάνουμε αντικατάσταση όπως αναφέραμε σε προηγούμενες περιπτώσεις.

7. Όριο εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων.

1. Χρήσιμες σχέσεις:

α. $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x=0$, α>1

β. $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x=+\infty$, 0<α<1

γ. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0} \ln x=-\infty$.

2. Όταν έχουμε δυνάμεις με διαφορετικές βάσεις και x⟶+∞, τότε βγάζουμε κοινό παράγοντα τη δύναμη με τη μεγαλύτερη βάση, για να δημιουργήσουμε το $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x=0$ όταν 0<α<1

Όταν έχουμε δυνάμεις με διαφορετικές βάσεις και x⟶-∞, τότε βγάζουμε κοινό παράγοντα τη δύναμη με τη μικρότερη βάση, για να δημιουργήσουμε το $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x=0$ όταν α>1.

3. Όταν έχουμε εκθετικά όρια με παράμετρο για παράδειγμα α , στη βάση της δύναμης , διακρίνουμε περιπτώσεις για τη βάση. Δηλ. αν είναι: 0<α<1 ή α>1 ή α=1 και υπολογίζουμε το όριο σε κάθε περίπτωση.

◆ 1.8 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός
Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο x_0**, όταν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

✓ Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, μια συνάρτηση f **δεν είναι** συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν:
α) **Δεν υπάρχει το όριό** της στο x_0 ή
β) Υπάρχει το όριό της στο x_0, αλλά **είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$**, στο σημείο x_0.

Ορισμός
Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, απλά, **συνεχής συνάρτηση**.

✓ Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση P είναι συνεχής,
✓ Κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής,
✓ Οι συναρτήσεις $f(x) = ημx$ και $g(x) = συνx$ είναι συνεχείς,
✓ Οι συναρτήσεις $f(x) = α^x$ και $f(x) = \log_α x$ με $α>0$ και $α\neq 1$ είναι συνεχείς.

● Πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις:

$$f+g,\ c\cdot f,\ \text{όπου}\ c\in\mathbb{R},\ f\cdot g,\ \frac{f}{g},\ |f|\ \text{και}\ \sqrt[\nu]{f}$$

με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0.

ΘΕΩΡΗΜΑ

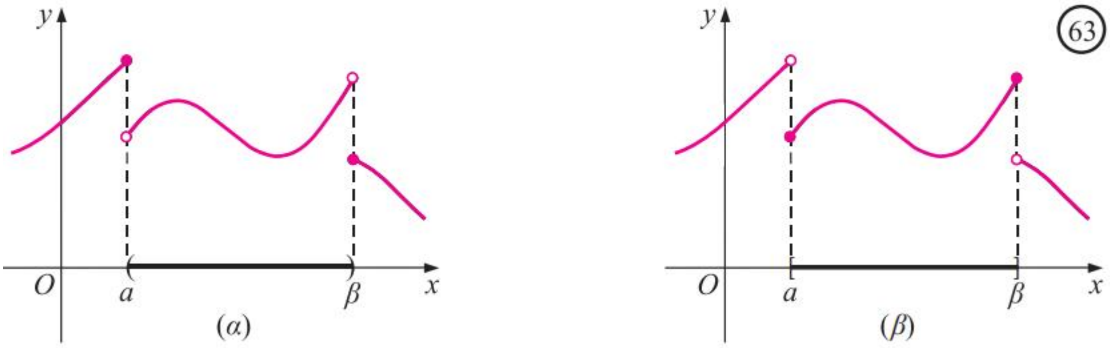
Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

- **Συνέχεια συνάρτησης σε διάστημα και βασικά θεωρήματα**

Ορισμός

- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β)**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β). (Σχ. 63α)
- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha) \text{ και } \lim_{x\to\beta^-} f(x) = f(\beta) \text{ (Σχ. 63β)}$$

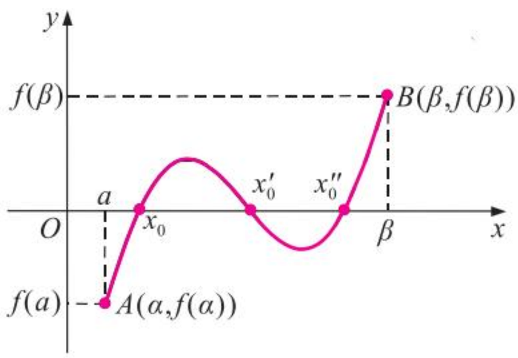


Ανάλογοι ορισμοί διατυπώνονται για διαστήματα της μορφής $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$.

Θεώρημα του Bolzano

Γεωμετρική ερμηνεία

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο [α, β]. Επειδή τα σημεία A(α, f(α)) και B(β, f(β)) βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα x′x, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.



ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_0) = 0.$$

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α, β).

Σ χ ό λ ι ο

- Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και **δε μηδενίζεται σ' αυτό,** τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή **διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.**
- Μια συνεχής συνάρτηση f **διατηρεί πρόσημο σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.**
- Ο προσδιορισμός του προσήμου της f για τις διάφορες τιμές του x γίνεται ως εξής:
  α) Βρίσκουμε τις ρίζες της f.
  β) Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες, επιλέγουμε έναν αριθμό και βρίσκουμε το πρόσημο της f στον αριθμό αυτό. Το πρόσημο αυτό είναι και το πρόσημο της f στο αντίστοιχο διάστημα.

Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος του Bolzano και είναι γνωστό ως θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε

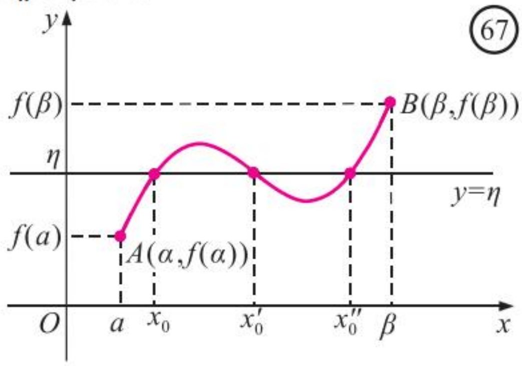
$$f(x_0) = \eta$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$ (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta) < 0$,

αφού
$g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και
$g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$.
Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$. ■



Σ χ ό λ ι ο

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], τότε, δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

◆ Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα .

ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέγιστης και ελάχιστης τιμής)

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α, β], τότε η f παίρνει στο [α, β] μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

Δηλαδή, υπάρχουν x_1, $x_2 \in [\alpha,\beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

$$\mathbf{m \leq f(x) \leq M, \text{ για κάθε } x \in [\alpha,\beta]}$$

<u>Σχόλιο</u>

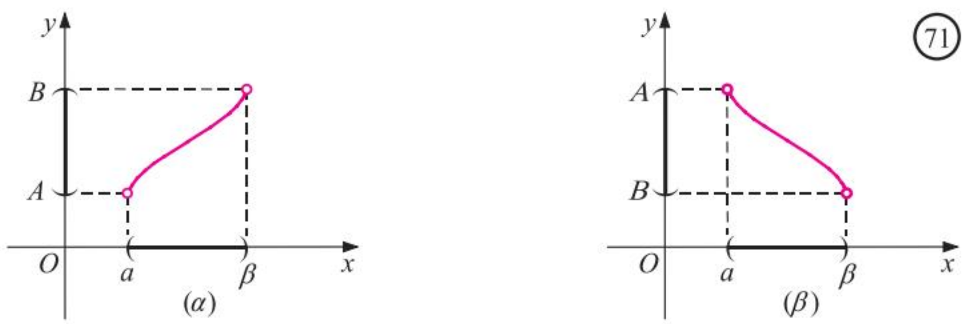
Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το **σύνολο τιμών** μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το [α, β] είναι το κλειστό διάστημα **[m, M]**, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

Αποδεικνύεται ότι:

Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) (Σχ. 71α), όπου

$$A = \lim_{x\to\alpha^+} f(x) \quad \text{και} \quad B = \lim_{x\to\beta^-} f(x).$$

Αν, όμως, η f είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** στο (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B, A) (Σχ. 71β).



- <u>Παρατηρήσεις στο Θ. Bolzano</u>

1. Δεν ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος Bolzano.

2. Ύπαρξη ρίζας εξίσωσης στο ανοικτό διάστημα (α,β)

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο α΄μέλος της εξίσωσης
- Θεωρούμε συνάρτηση f(x) ίση με το πρώτο μέλος της εξίσωσης
- Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano για την f στο στο διάστημα [α,β]. (**Α΄Ομάδα**-Ασκ.6, σελ.80)

3. Ύπαρξη ρίζας εξίσωσης με παρονομαστές στο ανοικτό διάστημα (α,β)

Όταν η εξίσωση περιέχει παρονομάστες , οι οποίοι μηδενίζονται από κάποιο από τα άκρα του διαστήματος:

- Πρώτα κάνουμε απαλοιφή παρονοματών.
- Θέτουμε συνάρτηση f(x) και αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση f(x) =0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β).
- Αποδεικνύουμε ότι η η ρίζα της f(x) = 0 είναι λύση και της αρχικής εξίσωσης.

(**Β΄Ομάδα**-Ασκ.5, σελ.82)

4. Ύπαρξη $x_0 \in (\alpha, \beta)$ που ικανοποιεί μια ισότητα

- ✓ Στην ισότητα που μας δίνεται κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών, αν υπάρχουν, μεταφέρουμε τους όρους στο α΄μέλος και στη θεση του x_0 βάζουμε το x.
- ✓ Θέτουμε συνάρτηση g(x) ίση με το α΄μέλος της εξίσωσης.
- ✓ Εφαρμόζουμε Θ. Bolzano και αποδεικνύουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$
- ✓ Η ισότητα αυτή οδηγεί στην αρχική ισότητα.

(**Β΄Ομάδα**-Ασκ.4, σελ.81)

5. Ύπαρξη $x_0 \in [\alpha, \beta]$ που ικανοποιεί μια ισότητα

- Στην ισότητα που μας δίνεται κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών, αν υπάρχουν, μεταφέρουμε τους όρους στο α΄μέλος και στη θεση του x_0 βάζουμε το x.
- Θέτουμε συνάρτηση g(x) ίση με το α΄μέλος της εξίσωσης, αποδεικνύουμε ότι είναι συνεχής στο [α, β] και ότι $g(\alpha)g(\beta) \leq 0$.
- Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i. Αν $g(\alpha)g(\beta) = 0 \Leftrightarrow g(\alpha) = 0$ ή $g(\beta) = 0$ οπότε $x_0 = \alpha$ ή $x_0 = \beta$

ii. Αν $g(\alpha)g(\beta) < 0$, εφαρμόζουμε Θ. Bolzano και αποδεικνύουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

iii. Άρα , σε κάθε περίπτωση υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

6. Ύπαρξη μοναδικής ρίζας της εξίσωσης f(x) = 0 στο ανοικτό διάστημα (α,β)

- ✧ Με τη βοήθεια του Θ. Bolzano βρίσκουμε ότι η εξίσωση έχει **μια τουλάχιστον ρίζα** στο
- ✧ (α, β).
- ✧ Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) , οπότε η εξίσωση έχει **το πολύ μία ρίζα** στο (α, β)
- ✧ Αρα τελικά συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα στο (α, β).

7. Ύπαρξη ν τουλάχιστον ριζών της εξίσωσης f(x) = 0, στο (α, β)

Χωρίζουμε το (α, β) σε **ν υποδιαστήματα** και εφαρμόζουμε Θ. Bolzano σε κάθε ένα από αυτά.

8. Ύπαρξη ακριβώς ν ριζών της πολυωνυμικής εξίσωσης P(x) = 0, στο (α, β)

Αποδεικνύουμε ότι έχει ν τουλάχιστον ρίζες (παρατήρηση 7) και αν είναι ν βαθμού , έχει ακριβώς ν ρίζες.

(**Α΄Ομάδα**-Ασκ.8, σελ.81)

9. Προσδιορισμός του προσήμου μιας συνεχούς συνάρτησης f

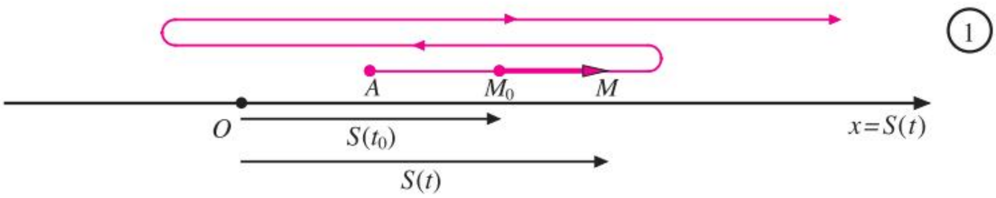
- ➢ Βρίσκουμε τις ρίζες της f και σχηματίζουμε πίνακα προσήμων.
- ➢ Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες, επιλέγουμε έναν αριθμό και βρίσκουμε το πρόσημο της f στον αριθμό αυτό. Το πρόσημο αυτό είναι και το πρόσημο της f στο αντίστοιχο διάστημα.

(**Β΄Ομάδα**-Ασκ.7,σελ.82)

◆ 2.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

● Στιγμιαία ταχύτητα

Ας θεωρήσουμε ένα σώμα που κινείται κατά μήκος ενός άξονα και ας υποθέσουμε ότι S = S(t) είναι η τετμημένη του σώματος αυτού τη χρονική στιγμή t.



Η συνάρτηση **S** καθορίζει τη θέση του σώματος τη χρονική στιγμή t και ονομάζεται **συνάρτηση θέσης** του κινητού.

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι κάποια χρονική στιγμή t_0 το κινητό βρίσκεται στη θέση M_0 και ότι μετά από παρέλευση χρόνου h, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t = t_0 + h$, βρίσκεται στη θέση Μ. (Σχ. 1). Στο χρονικό διάστημα από t_0 έως t η μετατόπιση του κινητού είναι ίση με $S(t) – S(t_0)$. Άρα, **η μέση ταχύτητα** του κινητού σ' αυτό το χρονικό διάστημα είναι

$$\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}=\frac{\text{μετατόπιση}}{\text{χρόνος}}.$$

Όσο το t είναι πλησιέστερα στο t_0, τόσο η μέση ταχύτητα του κινητού δίνει με καλύτερη προσέγγιση το ρυθμό αλλαγής της θέσης του κινητού κοντά στο t_0. Για το λόγο αυτό το όριο της μέσης ταχύτητας, καθώς το t τείνει στο t_0, το ονομάζουμε **στιγμιαία ταχύτητα** του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και τη συμβολίζουμε με $υ(t_0)$. Δηλαδή:

$$\upsilon(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}.$$

Σχόλιο

Όταν ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά, τότε κοντά στο t_0 ισχύει $\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}>0$, οπότε είναι $\upsilon(t_0)\geq 0$, ενώ, όταν το κινητό κινείται προς τα αριστερά κοντά στο t_0 ισχύει $\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}<0$, οπότε είναι $\upsilon(t_0)\leq 0$.

● Πρόβλημα εφαπτομένης

Ορισμός

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A, την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι :

$$y - f(x_0) = \lambda(x - x_0)$$

όπου

$$\lambda = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- Ορισμός παραγώγου συνάρτησης σε σημείο

Ορισμός

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0** του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.
Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.
Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Αν, τώρα, στην ισότητα $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ θέσουμε $x = x_0 + h$, τότε έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Πολλές φορές το $h = x - x_0$ συμβολίζεται με Δx, ενώ το $f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ συμβολίζεται με $\Delta f(x_0)$, οπότε ο παραπάνω τύπος γράφεται:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Η τελευταία ισότητα οδήγησε το Leibniz να συμβολίσει την παράγωγο στο x_0 με $\frac{df(x_0)}{dx}$ ή $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$. Ο συμβολισμός $f'(x_0)$ είναι μεταγενέστερος και οφείλεται στον Lagrange.
Είναι φανερό ότι, αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της f, τότε:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν και μόνο αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι ίσα.

Σχόλια

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό:
• Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t0, είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x = S(t)$ τη χρονική στιγμή t_0. Δηλαδή, είναι
$\upsilon(t_0) = S'(t_0)$.

• Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε της Cf μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f, στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0. Δηλαδή, είναι
$\lambda = f'(x_0)$,
οπότε η **εξίσωση της ε φ α π τ ο μ έ ν η ς (ε)** είναι:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Την κλίση **$f'(x_0)$** της εφαπτομένης ε στο $A(x_0, f(x_0))$ θα τη λέμε και **κλίση της C_f στο A** ή **κλίση της f στο x_0**.

● Π α ρ ά γ ω γ ο ς κ α ι σ υ ν έ χ ε ι α

ΘΕΩΡΗΜΑ
Αν μια συνάρτηση *f* είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.
Απόδειξη
Για $x \neq x_0$ έχουμε

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0),$$

οπότε

$$\lim_{x \to x_0}[f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0}\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)\right]$$

$$= \lim_{x \to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0}(x - x_0)$$

$$= f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

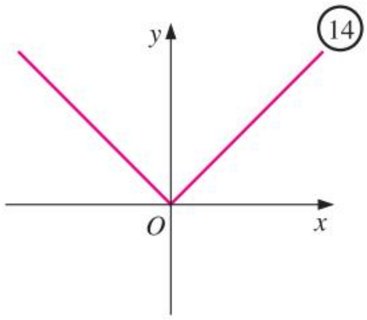
αφού η *f* είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η *f* είναι συνεχής στο x_0. ■

➢ **Δεν ισχύει το αντίστροφο**.
Παραδειγμα

Έστω η συνάρτηση $f(x) = |x|$. Η *f* είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού

$$\lim_{x \to 0^+}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0}\frac{x}{x} = 1, \text{ ενώ}$$

$$\lim_{x \to 0^-}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0}\frac{-x}{x} = -1.$$



Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι μια συνάρτηση *f* μπορεί να είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό.

Σ χ ό λ ι ο
Αν μια συνάρτηση **f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο** x_0, τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, **δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0**.

◆ 2.2 ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ορισμοί ΠΡΟΣΟΧΗ

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α. Θα λέμε ότι:

— Η f είναι **παραγωγίσιμη στο Α** ή, απλά, **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

— Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β)** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

— Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει :

Ορισμός

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α και A_1 το σύνολο των σημείων του Α στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$f' : A_1 \to R$$
$$x \to f'(x)$$

η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της f** ή απλά **παράγωγος της f**.

Ορισμοί

- ✓ Αν υποθέσουμε ότι το A_1 είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων, τότε η παράγωγος της **f ′** , αν υπάρχει, λέγεται **δεύτερη παράγωγος της f** και συμβολίζεται με f''.

- ✓ Επαγωγικά ορίζεται η **νιοστή παράγωγος της f**, με $\nu \geq 3$, και συμβολίζεται με $f^{(\nu)}$.
Δηλαδή: $f^{(\nu)} = [f^{(\nu-1)}]', \nu \geq 3$.

● Παράγωγος μερικών βασικών συναρτήσεων

❖ Έστω η **σταθερή** συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in R$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x) = 0$, δηλαδή $(c)' = 0$

Απόδειξη

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του R, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{c-c}{x-x_0} = 0.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0,$$

δηλαδή $(c)' = 0$. ■

❖ Έστω η συνάρτηση **f(x) = x**. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x) = 1$, δηλαδή **(x)′ = 1**

Απόδειξη

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του R, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1,$$

δηλαδή $(x)' = 1$. ■

❖ Έστω η συνάρτηση **f(x) = x^ν,** $\nu \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x) = \nu x^{\nu-1}$, δηλαδή **$(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$**

Απόδειξη

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του R, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^\nu - x_0^\nu}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0} = x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1},$$

οπότε

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1}) = x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1} = \nu x_0^{\nu-1},$$

δηλαδή $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$. ■

❖ Έστω η συνάρτηση **$f(x) = \sqrt{x}$**. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή **$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$**.

Απόδειξη

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0, +\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

οπότε

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

δηλαδή $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Όπως είδαμε στην παράγραφο 3.1 η $f(x) = \sqrt{x}$ **δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.** ■

❖ Έστω συνάρτηση **f(x) = ημx**. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x) = συνx$, δηλαδή **(ημx)΄ = συνx**

❖ Έστω η συνάρτηση **f(x) = συνx**. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x) = -ημx$, δηλαδή **(συνx)′ = – ημx .**

Σ χ ό λ ι ο

Τα όρια

$$\lim_{x\to 0}\frac{ημx}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{συνx-1}{x}=0,$$

τα οποία χρησιμοποιήσαμε για να υπολογίσουμε την παράγωγο των συναρτήσεων $f(x) = ημx$, $g(x) = συνx$ είναι η παράγωγος στο $x_0 = 0$ των συναρτήσεων f, g αντιστοίχως, αφού

$$\lim_{x\to 0}\frac{ημx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{ημx-ημ0}{x-0}=f'(0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{συνx-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{συνx-συν0}{x-0}=g'(0).$$

❖ Έστω η συνάρτηση **f(x) = e^x** . Αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x) = e^x$, δηλαδή **$(e^x)' = e^x$**

❖ Έστω η συνάρτηση f(x) = ln x. Αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) και ισχύει **$f'(x) = \frac{1}{x}$** δηλαδή **$(\ln x)' = \frac{1}{x}$.**

◆ 2.3 ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

● Παράγωγος αθροίσματος

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Αν οι συναρτήσεις f, g **είναι παραγωγίσιμες στο x_0**, τότε η συνάρτηση f + g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Απόδειξη

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)+g'(x_0),$$

δηλαδή

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0). \quad \blacksquare$$

- Αν οι συναρτήσεις **f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα *Δ***, τότε **για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:**

  $$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

- Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Δηλαδή, αν f_1, f_2, …, f_k , είναι παραγωγίσιμες στο Δ, τότε :

  $$(f_1+ f_2+ \ldots + f_k)'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_k'(x)$$

● Παράγωγος γινομένου

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση f·g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

✧ Το παραπάνω θεώρημα επεκτείνεται και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις.

Απόδειξη

Για τρεις παραγωγίσιμες συναρτήσεις ισχύει:

$$\begin{aligned}(f(x)g(x)h(x))' &= [(f(x)g(x))\cdot h(x)]' = (f(x)g(x))'\cdot h(x) + (f(x)g(x))\cdot h'(x)\\ &=[f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]h(x) + f(x)g(x)h'(x)\\ &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).\end{aligned}$$

✓ Αν f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ και $c \in R$, επειδή $(c)' = 0$, σύμφωνα με το θεώρημα 2, έχουμε: $(cf(x))' = cf'(x)$

- **Παράγωγος πηλίκου**

ΘΕΩΡΗΜΑ 3

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι **παραγωγίσιμες στο x_0** και $g(x_0)\neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

- Αν οι συναρτήσεις f, g **είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ** και για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει $g(x)\neq 0$, τότε για κάθε $x\in\Delta$ έχουμε:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in N^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή $(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$

Απόδειξη

Πράγματι, για κάθε $x\in R^*$ έχουμε:

$$(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^\nu}\right)' = \frac{(1)'x^\nu - 1(x^\nu)'}{(x^\nu)^2} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}. \ \blacksquare$$

Είδαμε, όμως, πιο πριν ότι $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$, για κάθε φυσικό $\nu > 1$. Επομένως, αν $\kappa \in Z - \{0,1\}$, τότε $(x^\kappa)' = \kappa x^{\kappa-1}$.

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R_1 = R - \{x/\sigma\upsilon\nu x=0\}$ και ισχύει: $(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

Απόδειξη

Πράγματι, για κάθε $x\in R_1$ έχουμε:

$$(\varepsilon\varphi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \cdot (-\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R_2 = R - \{x/\eta\mu x=0\}$ και ισχύει: $(\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$

• Π α ρ ά γ ω γ ο ς σ ύ ν θ ε τ η ς σ υ ν ά ρ τ η σ η ς

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει :

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g(x_0)$$

→ Γενικά, αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο g(Δ), τότε η συνάρτηση f g είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g(x)$$

Δηλαδή, αν $\boldsymbol{u = g(x)}$, τότε

$$(f(u))' = f'(u) \cdot u'.$$

Με το συμβολισμό του Leibniz, αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$, έχουμε τον τύπο

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

που είναι γνωστός ως **κανόνας της αλυσίδας**.

Π α ρ α τ ή ρ η σ η

Το σύμβολο $\frac{dy}{dx}$ δεν είναι πηλίκο. Στον κανόνα της αλυσίδας απλά συμπεριφέρεται ως πηλίκο.

• Η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (1)}$$

Απόδειξη

Πράγματι, αν $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

• Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \alpha^x \ln\alpha$, δηλαδή

$$\boxed{(\alpha^x)' = \alpha^x \ln\alpha}$$

Απόδειξη

Πράγματι, αν $y = \alpha^x = e^{x \ln \alpha}$ και θέσουμε $u = x \ln\alpha$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \ln \alpha} \cdot \ln\alpha = \alpha^x \ln\alpha.$$

- Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει

$$\boxed{(\ln|x|)' = \frac{1}{x}}$$

Απόδειξη

Πράγματι·

— αν $x > 0$, τότε $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, ενώ

— αν $x < 0$, τότε $\ln|x| = \ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = \ln u$. Επομένως,

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

και άρα $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

Ανακεφαλαιώνοντας, αν η συνάρτηση $\boldsymbol{u = f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη, τότε έχουμε:

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$	$(\varepsilon\varphi u)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 u} \cdot u'$
$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$	$(\sigma\varphi u)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 u} \cdot u'$
$(\eta\mu u)' = \sigma\upsilon\nu u \cdot u'$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
$(\sigma\upsilon\nu u)' = -\eta\mu u \cdot u'$	$(\alpha^u)' = \alpha^u \ln\alpha \cdot u'$
$(\ln|u|)' = \frac{1}{u} \cdot u'$	

Π α ρ α τ ή ρ η σ η

Παράγωγος της συνάρτησης $\boldsymbol{(f(x))^{g(x)}}$ με $f(x) > 0$ και $g(x) \in \mathbb{R}$.
Ισχύει $(f(x))^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$. Οπότε παραγωγίζουμε την $\boldsymbol{e^{g(x)\ln f(x)}}$.

- Π α ρ α τ η ρ ή σ ε ι ς στην εξίσωση εφαπτομένης

1. **Εξίσωση εφαπτομένης όταν ξέρουμε το σημείο επαφής $M(x_0, f(x_0))$**
   Χρησιμοποιούμε τον τύπο : $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
   (**Β΄Ομαδα**-Ασκ.2, σελ.110)

2. **Εξίσωση εφαπτομένης όταν ξέρουμε την κλίση της**
   - Θεωρούμε $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής
   - Η εφαπτομένη στο σημείο αυτό έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(x_0)$
   - Λύνουμε την εξίσωση και βρίσκουμε την τιμή (ή τις τιμές) του x_0, οπότε και το σημείο M, από όπου και την εξίσωση της εφαπτομένης.

   (**Α΄Ομάδα**-Ασκ.5, 8, 9 - Β΄Ομαδα-Ασκ.8 ,σελ.121-22)

3. **Εξίσωση εφαπτομένης που διέρχεται από γνωστό σημείο Α(α,β)**

Ελέγχουμε αν το σημείο Α είναι σημείο επαφής.

Α) Αν είναι σημείο επαφής , χρησιμοποιούμε τον τύπο $y - f(x_0) = f\,'(x_0)(x - x_0)$ (1) και βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης

Β) Αν **δεν είναι σημείο επαφής**, αντικαθιστούμε στην (1) τα x, y με τις τιμές α, β αντίστοιχα και από τη λύση της εξίσωσης $\beta - f(x_0) = f\,'(x_0)(\alpha - x_0)$ βρίσκουμε την τιμή (ή τις τιμές) του x_0 και στη συνέχεια την εξίσωση της εφαπτομένης. (**Α΄Ομάδα**-Ασκ.10 , σελ.122)

4. Συνθήκες για να εφάπτεται μια ευθεία ε: $y = \alpha x + \beta$ στη C_f μιας συνάρτησης f.

Πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις: $\mathbf{f(x_0) = \alpha}$

και $\mathbf{f(x_0) = \alpha x_0 + \beta}$

Από τη λύση του συστήματος υπολογίζουμε το x_0 και στη συνέχεια βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης.
(**Α΄Ομάδα**- Ασκ.11 - **Β΄Ομάδα**-Ασκ.2, σελ.121-122)

5. Κοινή εφαπτομένη των C_f , C_g δύο συναρτήσεων f, g σε κοινό τους σημείο $M(x_0, y_0)$

Πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις: $\mathbf{f(x_0) = g(x_0)}$

και $\mathbf{f\,'(x_0) = g\,'(x_0)}$

Από τη λύση του συστήματος υπολογίζουμε το x_0 και στη συνέχεια βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης .
(**Β΄Ομάδα**-Ασκ.3, σελ.122)

6. Κοινή εφαπτομένη των C_f , C_g δύο συναρτήσεων f, g σε μη κοινό τους σημείο

- Έστω $A(\alpha, f(\alpha))$, το σημείο επαφής της ζητούμενης ευθείας (ε) με την C_f και $B(\beta,f(\beta))$, το σημείο επαφής της (ε) με τη C_g .
- Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $A(\alpha,f(\alpha))$ είναι:
  $y - f(\alpha) = f\,'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow y = f\,'(\alpha)x + f(\alpha) - \alpha f\,'(\alpha)$
  Η εξίσωση εφαπτομένης της C_g στο $B(\beta,g(\beta))$ είναι:
  $y - g(\beta) = g\,'(\beta)(x - \beta) \Leftrightarrow y = g\,'(\beta)x + g(\beta) - \beta g\,'(\beta)$
- Για να ταυτίζονται οι δύο ευθείες πρέπει:
  $f\,'(\alpha) = g\,'(\beta)$
  και $f(\alpha) - \alpha f\,'(\alpha) = g(\beta) - \beta g\,'(\beta)$
- Από τη λύση του συστήματος βρίσκουμε τα α, β και στη συνέχεια την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης.
  (**Β΄Ομάδα**-Ασκ.4,10, σελ.122-123)

◆ 2.4 ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του** y **ως προς το** x **στο σημείο x_0** την παράγωγο $\mathbf{f\,'(x_0)}$.

➢ Για παράδειγμα, ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας υ ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος $\upsilon'(t_0)$, της ταχύτητας υ ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0. Η παράγωγος $\upsilon'(t_0)$ λέγεται **επιτάχυνση** του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με $\boldsymbol{\alpha}(t_0)$. Είναι δηλαδή $\alpha(t_0) = \upsilon'(t_0) = S''(t_0)$.

➢ Στην οικονομία, το κόστος παραγωγής Κ, η είσπραξη Ε και το κέρδος Ρ εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος. Έτσι, η παράγωγος $K'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους Κ ως προς την ποσότητα x, όταν $x = x_0$ και λέγεται **οριακό κόστος στο x_0.** Ανάλογα, ορίζονται και οι έννοιες **οριακή είσπραξη στο** x_0 και **οριακό κέρδος στο x_0**.

◆ 2.5 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

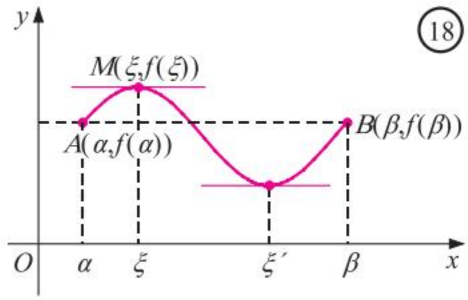
ΘΕΩΡΗΜΑ (Rolle)

Αν μια συνάρτηση f είναι:
- συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β]
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 0$

Γεωμετρική ερμηνεία

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της Cf στο M(ξ, f(ξ)) να είναι παράλληλη στον άξονα των x.



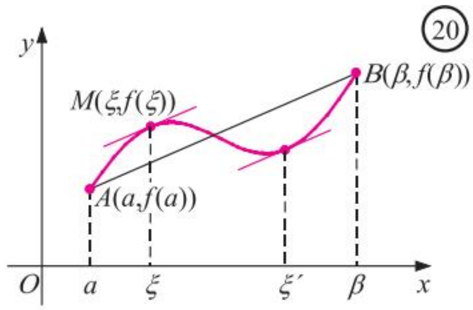
ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού Θ.Μ.Τ.)

Αν μια συνάρτηση f είναι:
- συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β] και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

Γεωμετρική ερμηνεία

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M(ξ, f(ξ)) να είναι παράλληλη της ευθείας AB.



● Παρατηρήσεις στο Θ. Rolle

1. Αρχική συνάρτηση

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της f στο Δ** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $\mathbf{F'(x) = f(x)}$, για κάθε $x \in \Delta$.

2. Ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας της εξίσωσης f(x) = 0 σε ένα διάστημα (α,β) με εφαρμογή του Θ. Rolle σε μια αρχική της f.

♦ Βρίσκουμε μια αρχική F της f για την οποία ισχύει $F'(x) = f(x)$.
♦ Εφαρμόζουμε Θ. Rolle (εφ' οσον ισχύουν οι προϋποθέσεις) στην F στο $[\alpha,\beta]$, οπότε η εξίσωση $F'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β).

3. Ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας $x_0 \in (\alpha,\beta)$, που ικανοποιεί μια σχέση, με εφαρμογή του Θ. Rolle σε μια αρχική της f.

♦ Στη σχέση που μας δίνεται θέτουμε στη θέση του x_0 το x , μεταφέρουμε όλους τους όρους στο α΄μέλος και καταλήγουμε σε μια σχέση $g(x) = 0$
♦ Βρίσκουμε μια αρχική G της g (αν **δεν εφαρμόζεται το Θ. Bolzano**).
♦ Εφαρμόζουμε Θ. Rolle στην G στο $[\alpha,\beta]$ (εφ' οσον ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle), οπότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha,\beta)$: $G'(x_0) = 0 \Leftrightarrow g(x_0) = 0$ (1) και φέρνουμε την (1) στην αρχική μορφή.
(**Β΄Ομάδα**-Ασκ.3, σελ.132)

4. **Α.** Όταν έχουμε εξισώσεις της μορφής $f'(x) = f(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε υπάρχει $c \in R$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $\mathbf{f(x) = ce^x}$

Β. Όταν έχουμε εξισώσεις της μορφής: $\mathbf{f'(x)+\lambda f(x)=h(x)}$, πολ/ζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με τον παράγοντα $\mathbf{e^{\lambda x}}$, για να προκύψει η παράγωγος της συνάρτησης:

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{e^{\lambda x}}$$

Γ. Όταν έχουμε εξισώσεις της μορφής: $\mathbf{f'(x)+g(x)f(x)=h(x)}$, πολ/ζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με τον παράγοντα $\mathbf{e^{G(x)}}$, με $G'(x)=g(x)$, για να προκύψει η παράγωγος της συνάρτησης: $\varphi(x) = \frac{f(x)}{e^{G(x)}}$.

5. Ύπαρξη μίας ή δύο κ.λ.π το πολύ ριζών:
Θεωρούμε ότι έχει δύο ή τρεις κ.λ.π ρίζες ανάλογα, και με **Θ. Rolle** καταλήγουμε σε **ΆΤΟΠΟ**.
(**Β΄Ομάδα**-Ασκ.7, σελ.132)

6. Ύπαρξη ΑΚΡΙΒΩΣ μιας, δύο κ.λ.π ριζών:
Πρώτα αποδεικνύουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα και μετά με **Θ. Rolle** και **ΑΤΟΠΟ** ή με **ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ** ότι δεν υπάρχει άλλη.
(Για 2 ή 3 κ.λ.π ρίζες, χωρίζουμε το διάστημα σε υποδιαστήματα και εφαρμόζουμε τα ίδια)

Σ χ ό λ ι α

Α. Στις πολυωνυμικές συναρτήσεις από το βαθμό τους καταλαβαίνουμε πόσες ρίζες **ΤΟ ΠΟΛΥ** έχουν.
Β. Το **Θ. Bolzano** βρίσκει ρίζες στην $\mathbf{f(x)=0}$, ενώ το **Θ. Rolle** στην $\mathbf{f'(x)=0}$.
Γ. Τα θεωρήματα αποδεικνύουν την **ύπαρξη ριζών** και δεν βρίσκουν τις ίδιες τις ρίζες.

● *Π α ρ α τ η ρ ή σ ε ι ς* στο Θ.Μ.Τ.

1. Ύπαρξη $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_\nu \in (\alpha,\beta)$ που ικανοποιούν σχέση της μορφής :
$f'(x_1) + f'(x_2) + \ldots\ldots + f'(x_\nu) = \lambda$

Χωρίζουμε το (α,β) σε **ν** υποδιαστήματα(που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία) και εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ σε καθένα από αυτά.

2. Θ.Μ.Τ και Θ Rolle
Για να αποδείξουμε ότι υπάρχει x_0, ώστε $f''(x_0) = 0$:

Εφαρμόζουμε Θ. Rolle στην f ΄ σε κάποιο διάστημα $[x_1, x_2]$, που σημαίνει ότι πρέπει να βρούμε δύο αριθμούς $x_1 \neq x_2$ με $f'(x_1) = f'(x_2)$.
(Οι τιμές αυτές βρίσκονται με εφαρμογή Θ.Μ.Τ σε κατάλληλα διαστήματα)

3. Απόδειξη ανισότητας με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ.

Όταν δίνεται μια ανισοτική σχέση για την f ΄ και ζητάται ανισοτική σχέση για την f, τότε η απόδειξη της ζητούμενης ανισοτικής σχέσης μπορει να γίνει με εφαρμογή Θ.Μ.Τ.

4. Απόδειξη ανισότητας δύο μεταβλητών με τη βοήθεια τουν Θ.Μ.Τ.

- Προσπαθούμε να φέρουμε την ανισότητα στη μορφή: $\kappa \leq \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \leq \lambda$
- Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ στο $[\alpha,\beta]$, οπότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$: $f'(x_0) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$
- Ξεκινάμε από την ανισότητα $\alpha < x_0 < \beta$ και κατασκευαστικά καταλήγουμε στη ζητούμενη ανισότητα. (**Α΄Ομάδα**-Ασκ.3 - **Β΄Ομάδα**-Ασκ.5, σελ.131-132)

5. Απόδειξη ανισότητας με γνωστή τη μονοτονία της f ΄

Ανισότητες που έχουν ή μπορούν να πάρουν τη μορφή : $\kappa < \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} < \lambda$ αποδεικνύονται ως εξής:

- Από το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha,\beta]$ υπάρχει ένα τουλάχοστον $x_0 \in(\alpha,\beta)$:
$$f'(x_0) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$
- Στη συνέχεια **ανάλογα με το είδος της μονοτονίας της f ΄**, αφού $x_0 \in(\alpha,\beta)$:

Αν f ΄ είναι γνησίως αύξουσα : $\alpha < x_0 < \beta \Leftrightarrow f'(\alpha) < f'(x_0) < f'(\beta) \Leftrightarrow f'(\alpha) < \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} < f'(\beta)$

Αν f ΄ είναι γνησίως φθίνουσα : $\alpha < x_0 < \beta \Leftrightarrow f'(\alpha) > f'(x_0) > f'(\beta) \Leftrightarrow f'(\alpha) > \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} > f'(\beta)$

- Φέρνουμε την ανισότητα στη ζητούμενη μορφή.

■ (Ολες οι παρατηρήσεις αφορούν **ΣΥΝΕΧΕΊΣ** συναρτήσεις)

◆ 2.6 ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν
- η f είναι συνεχής στο Δ και
- f ′(x) = 0 για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι σταθερή σε **όλο** το διάστημα Δ.

Απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.

- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \qquad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$. ■

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν
- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- f ′(x) = g′(x) για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

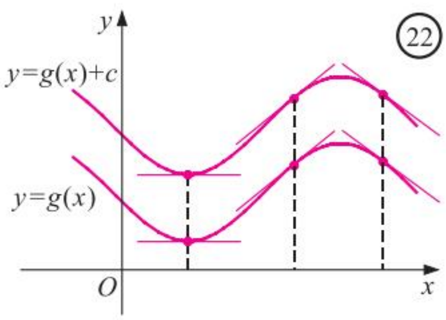
τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε x ∈ Δ να ισχύει: f(x) = g(x) + c

Απόδειξη

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει σταθερά C τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$. ■



Σχόλιο

Το παραπάνω θεώρημα καθώς και το πόρισμά του ισχύουν σε **διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.**

Παρατηρήσεις

1. Σταθερή συνάρτηση και εύρεση τύπου

Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση f είναι στεθερή σε ένα δαστημα Δ

- Αποδεικνύουμε ότι η f είναι συνεχής
- Αποδεικνύουμε ότι $f\,'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.
- Οπότε $f(x) = c$ για κάθε $x \in Δ$. Για τον υπολογισμό του c , πρέπει να μας δίνεται μια αρχική συνθήκη: $f(x_0) = κ$. Οπότε $c = κ$ και τελικά $f(x) = κ$

2. $f\,'(x) = 0$ με $x \in Δ_1 \cup Δ_2$

Π ρ ο σ ο χ ή

Αν $f\,'(x) = 0$ με $x \in Δ_1 \cup Δ_2$ δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η f είναι σταθερή, γιατί το αντίστοιχο θεώρημα **ισχύει σε διάστημα** και **όχι σε ένωση διαστημάτων**.

Έτσι γράφουμε : $f\,'(x) = 0$, για $x \in Δ_1$, οπότε $f(x) = c_1$

$f\,'(x) = 0$, για $x \in Δ_2$, οπότε $f(x) = c_2$

Άρα τελικά $f(x) = \begin{cases} c_1 , \text{αν } x \in Δ_1 \\ c_2, \text{ αν } x \in Δ_2 \end{cases}$

Ανάλογα εργαζόμαστε αν $x \in Δ_1 \cup Δ_2 \cup Δ_3 \cup \ldots\ldots$

3. Προσδιορισμός τύπου f(x) από σχέση της μορφής $f\,'(x) = g(x)$

- Βρίσκουμε μια αρχική συνάρτηση G της g , δηλαδή μια συνάρτηση G για την οποία ισχύει: $G\,'(x) = g(x)$
- Τότε για κάθε $x \in Δ$ ισχύει ότι: $f\,'(x) = g(x) \Leftrightarrow f\,'(x) = G\,'(x) \Leftrightarrow f(x) = G(x) + c$

4. $f\,'(x) = g\,'(x)$ με $x \in Δ_1 \cup Δ_2$

Π ρ ο σ ο χ ή

Γράφουμε : $f\,'(x) = g\,'(x)$, για $x \in Δ_1$, οπότε $f(x) = g(x) + c_1$

$f\,'(x) = g\,'(x)$, για $x \in Δ_2$, οπότε $f(x) = g(x) + c_2$

Άρα τελικά $f(x) = \begin{cases} g(x) + c_1 , \text{αν } x \in Δ_1 \\ g(x) + c_2, \text{ αν } x \in Δ_2 \end{cases}$

Ανάλογα εργαζόμαστε αν $x \in Δ_1 \cup Δ_2 \cup Δ_3 \cup \ldots\ldots$

• Μονοτονία συνάρτησης

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.
● Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.
● Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

Απόδειξη

● Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε

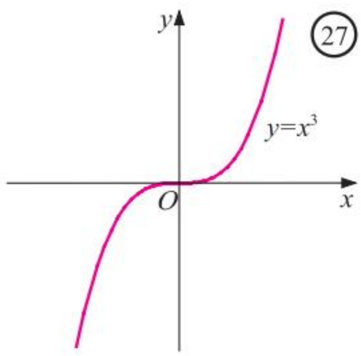
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

● Στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$ εργαζόμαστε αναλόγως. ■

Σχόλιο

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος **δεν ισχύει**. Δηλαδή, αν η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο Δ, η παράγωγός της **δεν είναι υποχρεωτικά** θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του Δ.
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο R, εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το R, αφού $f'(0) = 0$. Ισχύει όμως $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in$ R.



• Παρατηρήσεις στη μονοτονία

1. Εύρεση μονοτονίας συνάρτησης f

✧ Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού D_f της συνάρτησης f
✧ Εξετάζουμε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής
✧ Βρίσκουμε την f'
✧ Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0$
✧ Σχηματίζουμε πίνακα με το πρόσημο της f', όπου σημειώνουμε τα άκρα του D_f και τις ρίζες της f'
✧ Συμπληρώνουμε τον πίνακα με το είδος της μονοτονίας της f σε κάθε διάστημα.
(**Α΄Ομάδα**-Ασκ.2,4, σελ.138)

2. Εύρεση συνόλου τιμών συνάρτησης f

- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού D_f της συνάρτησης f
- Εξετάζουμε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής
- Μελετάμε την f ως προς τη μονοτονία
- Βρίσκουμε τα διαστήματα Δ_1 , Δ_2 , ... του πεδίου ορισμού της f , σε καθένα από τα οποία η f διατηρεί το ίδιο είδος μονοτονίας
- Βρίσκουμε τα διαστήματα $f(\Delta_1)$, $f(\Delta_2)$,......
- Το σύνολο τιμών της f είναι η ένωση των διαστημάτων, δηλαδή:
  $f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup .....$
  (**Α΄Ομάδα**-Ασκ.5(ii), σελ. 138)

3. Μονοτονία συνάρτησης πολλαπλού τύπου

Για να μελετήσουμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης της μορφής

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{αν } x \leq x_0 \\ f_2(x), & \text{αν } x > x_0 \end{cases}$$

εργαζόμαστε ως εξής:

- Εξετάζουμε αν η f ειναι συνεχής στο x_0
- Βρίσκουμε την f_1' για $x < x_0$ και f_2' για $x > x_0$. Δεν χρειάζεται να εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
- Βρίσκουμε το πρόσημο της f_1' για $x < x_0$ και f_2' για $x > x_0$
- Σχηματίζουμε τον πίνακα προσήμων για την f
- Συμπληρώνουμε τον πίνακα με τη μονοτονία της f.
  (**Α΄Ομάδα**-Ασκ.3, σελ.138)

4. Η f΄ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0

Θεωρούμε μια συνάρτηση f που ορίζεται σε ένα διάστημα (α, β) και έστω $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

Αν ισχύει **$f'(x) > 0$** για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε **όλο** το διάστημα (α, β).

Αν ισχύει **$f'(x) < 0$** για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε **όλο** το διάστημα (α, β).

(**Α΄Ομάδα**-Ασκ.6, σελ.138)

5. Μονοτονία και εξισώσεις

1η περίπτωση

Ισχύει: Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση f έχει το πολύ μία ρίζα.

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους της εξίσωσης στο α ΄μέλος , δηλαδή τη φέρνουμε στη μορφή $f(x) = 0$
- Βρίσκουμε μια προφανή ρίζα
- Αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη , οπότε η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

2η περίπτωση (Συνάρτηση που αλλάζει η μονοτονία)

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους της εξίσωσης στο α ΄μέλος , δηλαδή τη φέρνουμε στη μορφή $f(x) = 0$
- Βρίσκουμε μια προφανή ρίζα ρ (Δηλ. $f(\rho) = 0$)
- Μπορούμε να αποδείξουμε ότι η ρ είναι μοναδική, χωρίς η f να είναι γνησίως μονότονη.
  Δηλαδή:
  - Αν f είναι γνησίως αύξουσα για $x < \rho \Leftrightarrow f(x) < f(\rho) \Leftrightarrow f(x) < 0$
  - Αν f είναι γνησίως φθίνουσα για $x > \rho \Leftrightarrow f(x) < f(\rho) \Leftrightarrow f(x) < 0$

  Άρα για κάθε $x \neq \rho$, $f(x) < 0$, οπότε η ρίζα ρ είναι μοναδική.

  - Αν f είναι γνησίως φθίνουσα για $x < \rho \Leftrightarrow f(x) > f(\rho) \Leftrightarrow f(x) > 0$
  - Αν f είναι γνησίως αύξουσα για $x > \rho \Leftrightarrow f(x) > f(\rho) \Leftrightarrow f(x) > 0$

Άρα για κάθε $x \neq \rho$, $f(x) > 0$, οπότε η ρίζα ρ είναι μοναδική.
(**Α΄Ομάδα**-Ασκ.5,6 - **Β΄Ομάδα**-Ασκ.2, σελ.138-139)

6. Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι και 1-1

Με χρήση της παραπάνω πρότασης μπορούμε να λύσουμε μια εξίσωση
- Φέρνουμε την εξίσωση στη μορφή $f(g(x)) = f(h(x))$ (1)
- Αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη , άρα και 1-1
- Η (1) $\Leftrightarrow g(x) = h(x)$
- Λύνουμε την τελευταία εξίσωση.

7. Ύπαρξη μοναδικής ρίζας με τη βοήθεια του Θ. Bolzano

Για να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση έχει μοναδική λύση σε ένα διάστημα (α, β):
- Μεταφέρουμε όλους τους όρους της εξίσωσης στο α ΄μέλος , δηλαδή τη φέρνουμε στη μορφή $f(x) = 0$
- Αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α,β) με εφαρμογή του Θ. Bolzano στο [α, β]
- Αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη, οπότε η ρίζα είναι μοναδική.

8. Ύπαρξη μοναδικής ρίζας με τη βοήθεια του συνόλου τιμών

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους της εξίσωσης στο α ΄μέλος , δηλαδή τη φέρνουμε στη μορφή $f(x) = 0$
- Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f. Αν το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών , τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα
- Αν η f είναι και γνησίως μονότονη , η παραπάνω ρίζα είναι μοναδική.

9. Πλήθος ριζών εξίσωσης

Αν μια εξίσωση περιέχει μια παράμετρο $\lambda \in R$, τότε για να βρούμε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$, εργαζόμαστε ως εξής:
- Φέρνουμε την εξίσωση στη μορφή $f(x) = \lambda$
- Μελετάμε την f ως προς τη μονοτονία και βρίσκουμε τα διαστήματα Δ_1, Δ_2, ... στα οποία η f διατηρεί μονοτονία
- Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$, βρίσκουμε σε πόσα από τα διαστήματα $f(\Delta_1)$, $f(\Delta_2)$,.......ανήκει το λ , οπότε τόσες θα είναι και οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = \lambda$.

(**Β΄Ομάδα**-Ασκ.5, σελ.138)

10. Επίλυση ανίσωσης με τη βοήθεια της μονοτονίας

- Φέρνουμε την ανίσωση στη μορφή $f(g(x)) < f(h(x))$, όπου f είναι γνησίως μονότονη συνάρτηση
- Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:
  - Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε έχουμε $f(g(x)) < f(h(x)) \Leftrightarrow g(x) < h(x)$
  - Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε έχουμε $f(g(x)) < f(h(x)) \Leftrightarrow g(x) > h(x)$
- Λύνουμε την ανίσωση που προκύπτει.

11. Απόδειξη ανισοτήτων

Για να αποδείξουμε μια ανισότητα της μορφής $f(x) \geq g(x)$, εργαζόμαστε ως εξής:
- Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο α΄μέλος και η ανίσωση γίνεται : $f(x) - g(x) \geq 0$
- Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$
- Μελετάμε την h ως προς τη μονοτονία.

(**Β΄Ομάδα**-Ασκ.7,8, σελ.140)

◆ 2.7 ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

● Η έννοια του τοπικού ακροτάτου

ΟΡΙΣΜΟΣ
Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο της** f.

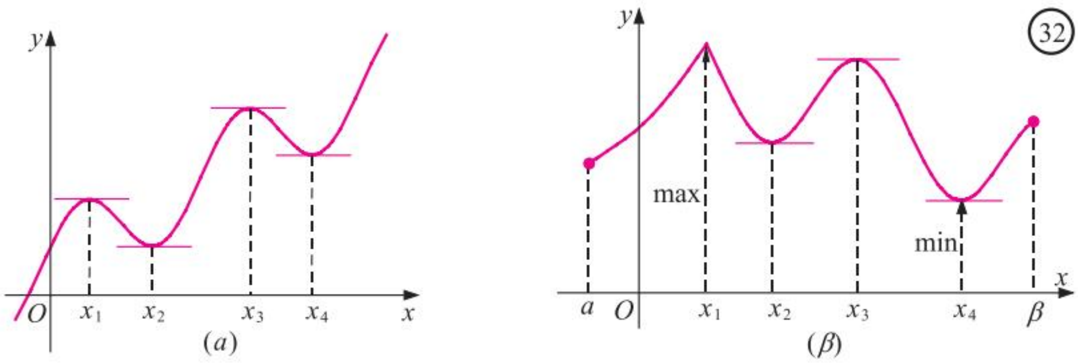
✓ Αν η ανισότητα **$f(x) \leq f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$**, τότε, η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό μέγιστο** ή απλά **μέγιστο**, το $f(x_0)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ
Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο της** f.

✓ Αν η ανισότητα **$f(x) \geq f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$**, τότε, η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό ελάχιστο**ή απλά **ελάχιστο**, το $f(x_0)$.

Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της f λέγονται **τοπικά ακρότατα** ή, απλά, **ακρότατα** αυτής, ενώ τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα λέγονται **θέσεις τοπικών ακροτάτων**. Το μέγιστο και το ελάχιστο της f λέγονται **ολικά ακρότατα** αυτής.

Σχόλια
i) Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο (Σχ.32α)



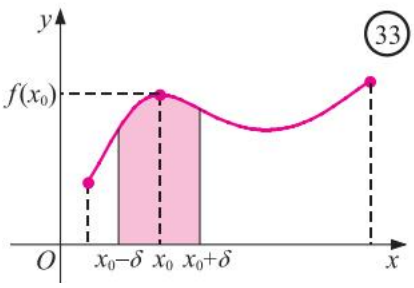
ii) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, ενώ αν παρουσιάζει, ελάχιστο, τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα. (Σχ. 32β). Το μεγαλύτερο όμως από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής. Επίσης το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης (Σχ. 32α).

● Προσδιορισμός των τοπικών ακροτάτων

ΘΕΩΡΗΜΑ (Fermat)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε: **$f'(x_0) = 0$**

Απόδειξη



Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και

$f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (1)

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, Ισχύει:

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Επομένως,

— αν $x \in (x_0-\delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0 \qquad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0. \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$.
Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη. ■

Γεωμετρική ερμηνεία του Θ. Fermat

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ στο οποίο η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ **η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.**

Παρατηρήσεις στο Θ. Fermat

1. Το **Θ. Fermat** αναφέρεται σε εσωτερικά σημεία του διαστήματος που ορίζεται η συνάρτηση και **όχι στα άκρα του**.

2. Δεν αρκεί η f να παρουσιάζει ακρότατο σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 . Πρέπει να είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

3. Δεν ισχύει το αντίστροφο του Θ. Fermat. Δηλαδή μπορεί για μια συνάρτηση f να ισχύει

$f'(x_0) = 0$ και το x_0 να μην είναι θέση ακροτάτου.

4. Αν μια συνάρτηση είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ, τότε τα εσωτερικά σημεία του Δ , στα οποία η f' είναι διάφορη από το μηδέν, δεν είναι θέση τοπικών ακροτάτων.

- Οι ***π ι θ α ν έ ς θ έ σ ε ι ς τ ω ν τ ο π ι κ ώ ν α κ ρ ο τ ά τ ω ν*** μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα *Δ* είναι:
  1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία **η παράγωγος της f μηδενίζεται.**
  2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία **η f δεν παραγωγίζεται.**
  3. Τα **άκρα του Δ** (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

Τα *ε σ ω τ ε ρ ι κ ά* σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται **κρίσιμα σημεία** της f στο διάστημα Δ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f. (Σχ. 35α)

ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f. (Σχ. 35β)

iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι **γνησίως μονότονη στο (α, β)**. (Σχ. 35γ).

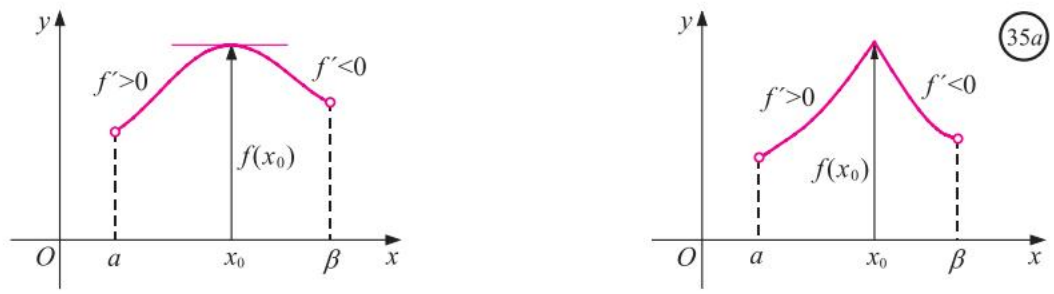
Απόδειξη

i) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε

$$f(x) \le f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_0]. \quad (1)$$

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \le f(x_0), \text{ για κάθε } x \in [x_0, \beta). \quad (2)$$



Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x) \le f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (\alpha, \beta),$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.

iii) Έστω ότι

$f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β). Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

— Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. ■

Σ χ ό λ ι α

• Όπως είδαμε στην απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος στην πρώτη περίπτωση το $f(x_0)$ είναι η μέγιστη τιμή της f στο (α, β), ενώ στη δεύτερη περίπτωση το $f(x_0)$ είναι η ελάχιστη τιμή της f στο (α, β).

• Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα [α, β], όπως γνωρίζουμε η f παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο. Για την εύρεση του μέγιστου και ελάχιστου εργαζόμαστε ως εξής:

1. Βρίσκουμε τα **κρίσιμα σημεία της f.**

2. Υπολογίζουμε τις τιμές της f **στα σημεία αυτά** και **στα άκρα των διαστημάτων.**

3. Από αυτές τις τιμές **η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο** και **η μικρότερη το ελάχιστο** της f.

● *Π α ρ α τ η ρ ή σ ε ι ς* στα ακρότατα

1. Εύρεση ακροτάτων συνάρτησης f από τον πίνακα μονοτονίας

- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
- Βρίσκουμε την $f\,'(x)$
- Λύνουμε την εξίσωση $f\,'(x) = 0$ και βρίσκουμε το πρόσημο της $f\,'$
- Σχηματίζουμε τον πίνακα με τη μονοτονία της f

Αν σε κάποιο σημείο $x_0 \in D_f$ η f είναι συνεχής και αλλάζει μονοτονία , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ακρότατο της f. Το είδος του ακροτάτου εξαρτάται από το είδος της μονοτονίας που έχει η συνάρτηση εκατέρωθεν του x_0. (**Α΄Ομάδα-**Ασκ.2, **Β΄Ομάδα**-Ασκ.1, σελ.149 και 151))

2. Εύρεση ακροτάτων συνάρτησης πολλαπλού τύπου

Για να βρούμε τα ακρότατα μιας συνάρτησης της μορφής:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{αν } x \le x_0 \\ f_2(x), & \text{αν } x > x_0 \end{cases}$$

εργαζόμαστε ως εξής:

- Αποδεικνύουμε ότι η f ειναι συνεχής στο x_0
- Βρίσκουμε την $f_1{}'(x)$ για $x < x_0$ και $f_2{}'(x)$ για $x > x_0$. **Δεν χρειάζεται να εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .**
- Βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο της $f_1{}'$ για $x < x_0$ και $f_2{}'$ για $x > x_0$
- Σχηματίζουμε τον πίνακα με το πρόσημο της $f\,'$ και τη μονοτονία της f
- Αν η f αλλάζει μονοτονία εκατέρωθεν του x_0 , τότε η f έχει τοπικό ακρότατο στο x_0. (**Α΄Ομάδα-**Ασκ.3, σελ.150)

3. Εύρεση του συνόλου τιμών συνεχούς συνάρτησης f σε κλειστό διάστημα

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], τότε παρουσιάζει ελάχιστο μ και μέγιστο Μ . Το σύνολο τιμών είναι το [μ, Μ]. Για να βρούμε το μέγιστο και το ελάχιστο της f εργαζόμαστε ως εξής:

- Βρίσκουμε τις **θέσεις πιθανών ακροτάτων** της f που είναι
  - τα **κρίσιμα σημεία** της f, δηλαδή τα σημεία στα οποία μηδενίζεται η $f\,'$είτε η f δεν είναι παραγωγισιμη
  - τα **άκρα κλειστών διαστημάτων** του πεδίου ορισμού
- Υπολογίζουμε τις τιμές της f στις παραπάνω θέσεις
- Από τις παραπάνω τιμές, η μικρότερη είναι το ελάχιστο και η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο της f.

4. Προσδιορισμός παραμέτρων με δεδομένα ακρότατα

Όταν ο τύπος της συνάρτησης f περιέχει παραμέτρους και γνωρίζουμε ότι στο x_0 έχει τοπικά ακρότατα, για να βρούμε τις τιμές των παραμέτρων εργαζόμαστε ως εξής:

- Διαπιστώνουμε ότι το x_0 είναι εσωτερικό σημείο κάποιου διαστήματος Δ του D_f και ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0
- Σύμφωνα με το Θ. Fermat ισχύει $f\,'(x_0) = 0$
- Από τη σχέση αυτή και ίσως κάποα άλλα δεδομένα προσδιορίζουμε τις τιμές των

παραμέτρων.

- Επειδή δεν ισχύει το αντίστροφο του Θ. Fermat, **πρέπει να εξετάσουμε αν είναι δεκτές οι τιμές που βρήκαμε.** Έτσι αντικαθιστούμε στον τύπο της f τις τιμές των παραμέτρων και μελετάμε την f ως προς τα ακρότατα. (**Α΄Ομάδα**-Ασκ.5, σελ.150)

5. Η f δεν έχει ακρότατα

Όταν μας ζητούν να αποδείξουμε ότι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα , εργαζόμαστε με τη μέθοδο απαγωγής σε άτοπο. Δηλασή , υποθέτουμε ότι η συνάρτηση έχει ακρότατο σε κάποιο x_0 που είναι εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της f , οπότε πρέπει να ισχύει $f\,'(x_0) = 0$ (Θ. Fermat). Με τη βοήθεια αυτής της σχέσης καταλήγουμε σε άτοπο. (**Β΄Ομάδα**- Ασκ.4 , σελ.151)

6. Απόδειξη ανισοτήτων με τη βοήθεια ακροτάτων

Για να αποδείξουμε μια ανισότητα της μορφής $A(x) \geq B(x)$ ή $A(x) \leq B(x)$, εργαζόμαστε ως εξής:

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο α΄μέλος
- Θέτουμε το α΄μέλος ως συνάρτηση $f(x)$, οπότε η ανισότητα γίνεται : $f(x) \geq 0$ ή $f(x) \leq 0$
- Μελετάμε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και διαπιστώνουμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο ή ολικλο μέγιστο το 0, οπότε θα ισχύει $f(x) \geq 0$ ή $f(x) \leq 0$, αντίστοιχα. (**Β΄Ομάδα**-Ασκ.3, σελ,151)

7. Από δεδομένη ανισότητα σε ζητούμενη ισότητα

Π ρ ο σ ο χ ή

Αν έχουμε μια ανισότητα της μορφής $f(x) \geq g(x)$ ή $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$ και ζητάμε να αποδείξουμε μια ισότητα :

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους της ανισότητας στο α΄μέλος : $f(x) - g(x) \geq 0$ ή $f(x) - g(x) \leq 0$
- Θεωρούμε συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$, με $x \in \Delta$ και βρίσκουμε εσωτερικό σημείο x_0 του Δ για το οποίο ισχύει $h(x_0) = 0$
- Για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $h(x) \leq h(x_0)$ ή $h(x) \geq h(x_0)$. Δηλαδή η h έχει ολικό μέγιστο ή ολικό ελάχιστο αντίστοιχα
- Σύμφωνα με το Θ. Fermat (εφ΄οσον ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του) ισχύει ότι $h'(x_0)= 0$, απ' όπου καταλήγουμε στο ζητούμενο.

(**Γενικές Ασκήσεις** -Ασκ.7, σελ.174)

◆ 2.8 ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ – ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μία συνάρτηση f σ υ ν ε χ ή ς σ' ένα διάστημα Δ και **π α ρ α γ ω γ ί σ ι μ η** στο ε σ ω τ ε ρ ι κ ό του Δ. Θα λέμε ότι:

● Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο Δ, αν η f ′ είναι γνησίως αύξουσα στο ε σ ω τ ε ρ ι κ ό του Δ.

● Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο Δ, αν η f ′ είναι γνησίως φθίνουσα στο ε σ ω τ ε ρ ι κ ό του Δ.

Σ χ ό λ ι ο

Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση f είναι **κυρτή (αντιστοίχως κοίλη)** σ' ένα διάστημα Δ, τότε **η εφαπτομένη** της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται **"κάτω" (αντιστοίχως "πάνω")** από τη γραφική της παράσταση (Σχ. 39), **με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.**

ΘΕΩΡΗΜΑ

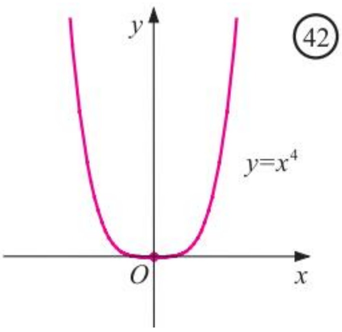
Έστω μια συνάρτηση f σ υ ν ε χ ή ς σ' ένα διάστημα Δ και **δυο φορές παραγωγίσιμη** στο ε σ ω τ ε ρ ι κ ό του Δ.

● Αν $f''(x) > 0$ για κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ, τότε η f είναι **κυρτή στο Δ.**

● Αν $f''(x) < 0$ για κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ, τότε η f είναι **κοίλη στο Δ.**

Σ χ ό λ ι α

1. Το **αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει.** Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$ (Σχ. 42). Επειδή η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο R, η $f(x) = x^4$ είναι κυρτή στο R. Εντούτοις, η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο R, αφού $f''(0) = 0$.
2. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ενα διάστημα Δ και ισχύει $f''(x) \geq 0$ (ή $f''(x) \leq 0$) για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, με την ισότητα να ισχύει για **διακεκεριμένες** τιμές του x, τότε με τη βοήθεια της μονοτονίας της f ′ θα προκύπτει ότι η **f είναι κυρτή (αντίστοιχα κοίλη)** στο Δ.



● Σ η μ ε ί α κ α μ π ή ς

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μια συνάρτηση f **παραγωγίσιμη** σ' ένα διάστημα (α, β), με **εξαίρεση ίσως** ένα σημείο του x_0. Αν

● η f είναι **κυρτή** στο $(α, x_0)$ και **κοίλη** στο $(x_0, β)$, ή αντιστρόφως, και

● η C_f έχει **εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,**

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f.

➢ Όταν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f, τότε λέμε ότι η **f παρουσιάζει στο x_0 καμπή** και **το x_0** λέγεται **θέση σημείου καμπής**. Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f

"διαπερνά" την καμπύλη.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν το Α(x_0, f(x_0)) είναι **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε **$f''(x_0) = 0$**.

Σ χ ό λ ι α

1. Δεν ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος
2. Η εφαπτομένη της C_f σε ένα σημείο καμπής της διαπερνά την καμπύλη
3. Τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ στα οποία η f΄΄ είναι διάφορη του μηδενός **δεν** είναι θέσεις σημείων καμπής

- Οι **π ι θ α ν έ ς θ έ σ ε ι ς σ η μ ε ί ω ν κ α μ π ή ς** μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

  i) τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η **f″ μηδενίζεται,** και

  ii) τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία **δεν υπάρχει η f″ .**

- Π α ρ α τ η ρ ή σ ε ι ς στην κυρτότητα και τα σημεία καμπής

1. Μελέτη μιας συνάρτησης f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής

- Βρίσκουμε το **πεδίο ορισμού** της f και αποδεικνύουμε ότι είναι συνεχής
- Βρίσκουμε **την f΄΄**
- Λύνουμε την εξίσωση **f΄΄(x) = 0** και βρίσκουμε το **πρόσημο της f΄΄**
- Κατασκευάζουμε **πίνακα προσήμων της f΄΄**
- Σε καθένα από τα διαστήματα $Δ_i$ στα οποία χωρίζεται το D_f από τις ρίζες της f΄΄ ισχύει:
  Αν **f΄΄(x) > 0** στο εσωτερικό του $Δ_i$, τότε η f είναι **κυρτή στο $Δ_i$**
  Αν **f΄΄(x) < 0** στο εσωτερικό του $Δ_i$, τότε η f είναι **κοίλη στο $Δ_i$** .
- Τα σημεία του D_f, που μηδενίζεται f΄΄ ή δεν υπάρχει , είναι σημεία καμπής, εφ' οσον εκατέρωθεν αυτών των σημείων αλλάζει το πρόσημο της f΄΄.
  (**Α΄Ομάδα**-Ασκ.1,2, 3, σελ.159 - **Β΄Ομάδα**-Ασκ.1,2,, σελ.160)

2. Κυρτότητα και σημεία καμπής συνάρτησης f πολλαπλού τύπου

Για να βρούμε τα την κυρτότητα και τα σημεία καμπής μιας συνάρτησης της μορφής:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & αν \ \ x \leq x_0 \\ f_2(x), & αν \ \ x > x_0 \end{cases}$$

εργαζόμαστε ως εξής:

- Αποδεικνύουμε ότι η f ειναι συνεχής στο x_0
- Βρίσκουμε την $f_1'(x)$ για $x < x_0$ και $f_2'(x)$ για $x > x_0$ και την παράγωγο της f στο x_0
- Βρίσκουμε την $f_1''(x)$ για $x < x_0$ και $f_2''(x)$ για $x > x_0$. Δεν χρειάζεται να εξετάσουμε αν υπάρχει η f΄΄ στο x_0 .
- Βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο της f_1'' για $x < x_0$ και f_2'' για $x > x_0$
- Σχηματίζουμε τον πίνακα με το πρόσημο της f΄΄ και την κυρτότητα της f
- Το x_0 είναι σημείο καμπής , όταν αλλάζει η κυρτότητα η f εκατέρωθεν του x_0.
  (**Α΄Ομάδα**-Ασκ.2, 3, σελ.159)

3. Κυρτότητα και εφαπτόμενες

- ✓ Αν η συνάρτηση f είναι **κυρτή** σ' ένα διάστημα Δ, τότε **η εφαπτομένη** της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται **"κάτω"** από τη γραφική της παράσταση της f **με εξαίρεση το σημείο επαφής**.
- ✓ Αν η συνάρτηση f είναι **κοίλη** σ' ένα διάστημα Δ, τότε **η εφαπτομένη** της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται **"πάνω"** από τη γραφική της παράσταση της f **με εξαίρεση το σημείο επαφής**.

4. Σημεία καμπής και προσδιορισμός παραμέτρων

Έστω μια συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ , της οποίας ο τύπος περιέχει παράμετρο. Για να βρούμε τις τιμές της παραμέτρου , ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής στο x_0 , πρέπει να ισχύει $\mathbf{f''(x_0) = 0}$. Επειδή δεν ισχύει το αντίστροφο του αντίστοιχου θεωρήματος, πρέπει γαι κάθε τιμή της παραμέτρου που θα βρούμε , να εξετάσουμε αν το x_0 είναι θέση σημείου καμπής.

5. Η f δεν έχει σημεία καμπής

Όταν μας ζητούν να αποδείξουμε ότι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f δεν έχει σημεία καμπής , εργαζόμαστε με τη **μέθοδο απαγωγής σε άτοπο**. Δηλαδή , υποθέτουμε ότι η συνάρτηση έχει σημείο καμπής σε κάποιο x_0 που είναι εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της f , οπότε πρέπει να ισχύει $f''(x_0) = 0$. Με τη βοήθεια αυτής της σχέσης καταλήγουμε σε άτοπο. (**Β΄Ομάδα**- Ασκ.5, σελ. 161)

◆ 2.9 ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ - ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL

Ορισμός

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $\boldsymbol{x = x_0}$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f.

Σ η μ ε ί ω σ η

Τις κατακόρυφες ασύμπτωτες τις αναζητούμε:

- στα άκρα του πεδίου ορισμού της συνάρτησης όπου δεν ορίζεται
- στα σημεία του πεδίου ορισμού της συνάρτησης όπου δεν είναι συνεχής

Ορισμός

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$), τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

Ορισμός

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0,$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x\to+\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R},$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x\to-\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}.$$

Σχόλια

1. Αποδεικνύεται ότι:

— Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

— Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

2. Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε:

— Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.

— Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

— Στο $+\infty$, $-\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$ αντιστοίχως $(-\infty,\alpha)$.

Κανόνες de L' Hospital

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο $\left(\text{μορφή } \frac{0}{0}\right)$

Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$, $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο $\left(\text{μορφή } \frac{+\infty}{+\infty}\right)$

Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

(πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Σ χ ό λ ι α

1. Το θεώρημα 2 ισχύει και για τις μορφές $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$.

2. Τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για πλευρικά όρια και μπορούμε, αν χρειάζεται, να τα εφαρμόσουμε περισσότερες φορές, αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.

Π α ρ α τ η ρ ή σ ε ι ς

1. Απρισδιόριστη μορφή 0·∞

Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, όπου $x \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$

Τότε $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \ldots$ (($\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$) και εφαρμόζουμε D.L.H)

ή

$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \ldots$ (($\frac{\infty}{\infty}$) και εφαρμόζουμε D.L.H)

2. Απροσδιόριστες μορφές 0^0, $1^{\pm\infty}$, $(\pm\infty)^0$

Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ έχει μια από τις παραπάνω απροσδιόριστες μορφές, εργαζόμαστε ως

εξής: $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{\ln f(x)^{g(x)}} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)}$

και υπολογίζουμε το $\lim_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)$ που είναι της μορφής (**0·∞**)

3. Απροσδιόριστες μορφές ∞ - ∞

Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, όπου $x \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$, τότε

$\lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to x_0} [f(x)(1 - \frac{g(x)}{f(x)})]$ που είναι της μορφής ($\frac{\infty}{\infty}$)

(Σε όλες τις περιπτώσεις πρέπει να πληρούνται οι προϋποθέσεις των θεωρημάτων για να τα εφαρμόσουμε).

◆ 2.10 ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΧΑΡΑΞΗ ΤΗΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η πορεία την οποία ακολουθούμε λέγεται **μελέτη της συνάρτησης** και περιλαμβάνει τα παρακάτω βήματα:

1ο Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f.

2ο Εξετάζουμε τη συνέχεια της f στο πεδίο ορισμού της.

3ο Βρίσκουμε τις παραγώγους f' και f'' και κατασκευάζουμε τους πίνακες των προσήμων τους. Με τη βοήθεια του προσήμου της f' προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f , ενώ με τη βοήθεια του προσήμου της f'' καθορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και βρίσκουμε τα σημεία καμπής.

4ο Μελετούμε τη "συμπεριφορά" της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της (οριακές τιμές, ασύμπτωτες, κτλ.)

5ο Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω συμπεράσματα σ' ένα συνοπτικό πίνακα που λέγεται και **πίνακας μεταβολών της f** και με τη βοήθειά του χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της f. Για καλύτερη σχεδίαση της C_f κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της f.

Σ χ ό λ ι ο

1) Όπως είναι γνωστό, αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α είναι **ά ρ τ ι α** , τότε η C_f έχει **άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y**, ενώ αν είναι **π ε ρ ι τ τ ή** , η C_f έχει **κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων Ο**. Επομένως, για τη μελέτη μιας τέτοιας συνάρτησης μπορούμε να περιοριστούμε στα $x \in A$, με $x \geq 0$.

2) Αν μια συνάρτηση f είναι **π ε ρ ι ο δ ι κ ή** με περίοδο Τ, τότε περιορίζουμε τη μελέτη της C_f σ' ένα διάστημα πλάτους Τ.

(Α΄Ομάδα - Όλες οι ασκήσεις, σελ.172)

- **Προσοχή** στις Γενικές Ασκήσεις **(Γ΄Ομάδα)**, σελ.173-176

◆ 3.1 ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

● *Α ρ χ ι κ ή σ υ ν ά ρ τ η σ η*

Ορισμός
Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. **Αρχική συνάρτηση** ή **παρά- γουσα της f στο Δ** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει **$F'(x) = f(x)$**, για κάθε $x \in \Delta$.

Σ χ ό λ ι ο
Αποδεικνύεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε
- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in R$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in R$.

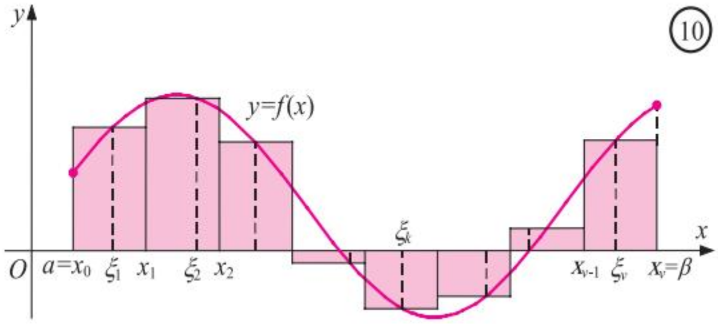
Απόδειξη
• Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in R$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

• Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε $G'(x) = F'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.
Άρα, σύμφωνα με το πόρισμα της υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G(x) = F(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$.

3.4 ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος

Έστω μια συνάρτηση f *συνεχής* στο $[\alpha, \beta]$. Με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta$ χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \dfrac{\beta - \alpha}{\nu}$.



Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, για κάθε $\kappa \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \ldots + f(\xi_\kappa)\Delta x + \ldots + f(\xi_\nu)\Delta x$$

το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής:

$$S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x \ ^{(1)}.$$

"Το όριο του αθροίσματος S_ν, δηλαδή το $\lim\limits_{\nu \to \infty}\left(\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$ (1) υπάρχει στο R και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ".

Το παραπάνω όριο (1) ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β, συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta$ f (x)dx και διαβάζεται "ολοκλήρωμα της f από το α στο β". Δηλαδή,

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\nu \to \infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)}$$

Το σύμβολο $\int$ οφείλεται στον Leibniz και ονομάζεται **σύμβολο** ολοκλήρωσης. Αυτό είναι επιμήκυνση του αρχικού γράμματος S της λέξης Summa (άθροισμα). Οι αριθμοί α και β ονομάζονται **όρια** της ολοκλήρωσης. Η έννοια "όρια" εδώ δεν έχει την ίδια έννοια του ορίου του 2ου κεφαλαίου. Στην έκφραση $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ το γράμμα x είναι μια μεταβλητή και μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε άλλο γράμμα. Έτσι, για παράδειγμα, οι εκφράσεις $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ συμβολίζουν το ίδιο ορισμένο ολοκλήρωμα και είναι πραγματικός αριθμός, σε αντίθεση με το $\int$ f (x)dx που είναι ένα σύνολο συναρτήσεων.

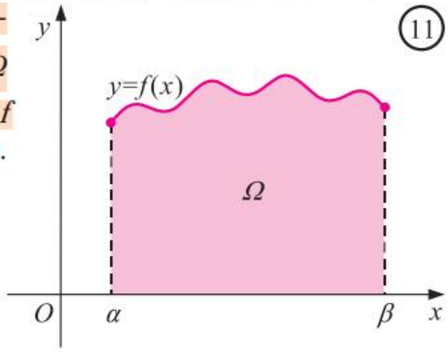
Είναι, όμως, χρήσιμο να επεκτείνουμε τον παραπάνω ορισμό και για τις περιπτώσεις που είναι $\alpha > \beta$ ή $\alpha = \beta$, ως εξής:

- $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$
- $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$

Από τους ορισμούς του εμβαδού και του ορισμένου ολοκληρώματος προκύπτει ότι:
Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ (Σχ. 11).
Δηλαδή,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = E(\Omega).$$

Επομένως,



Αν $f(x) \geq 0$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$.

- Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

Έστω f, g *συνεχείς* συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν

- $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x)dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$
- $\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) + g(x)]dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

και γενικά

- $\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \mu \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν η f είναι *συνεχής* σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Αν $f(x) \geq 0$ και $\alpha < \gamma < \beta$ (Σχ. 13), η παραπάνω ιδιότητα δηλώνει ότι:

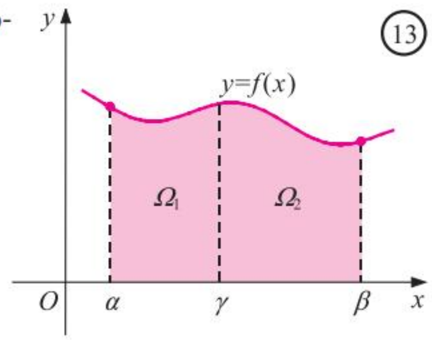
$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$$

αφού

$$E(\Omega_1) = \int_\alpha^\gamma f(x)dx\,,\ E(\Omega_2) = \int_\gamma^\beta f(x)dx$$

και

$$E(\Omega) = \int_\alpha^\beta f(x)dx.$$



ΘΕΩΡΗΜΑ 3ο

Έστω f μια *συνεχής* συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού)

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Απόδειξη

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$G(x) = F(x) + c. \qquad (1)$$

Από την (1), για $x = \alpha$, έχουμε $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_\alpha^\alpha f(t)dt + c = c$, οπότε $c = G(\alpha)$. Επομένως,

$$G(x) = F(x) + G(\alpha),$$

οπότε, για $x = \beta$, έχουμε

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(t)dt + G(\alpha)$$

και άρα

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha). \blacksquare$$

Πολλές φορές, για να απλοποιήσουμε τις εκφράσεις μας, συμβολίζουμε τη διαφορά $G(\beta) - G(\alpha)$ με $[G(x)]_{\alpha}^{\beta}$, οπότε η ισότητα του παραπάνω θεωρήματος γράφεται

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = [G(x)]_{\alpha}^{\beta} = \left[\int f(x)dx\right]_{\alpha}^{\beta}.$$

- <u>Μέθοδοι ολοκλήρωσης</u>

- Τύπος της **ολοκλήρωσης κατά παράγοντες** :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx,$$

όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$.

- <u>Παρατηρήσεις στην Ολοκλήρωση κατά παράγοντες</u>

1. <u>Ολοκληρώματα της μορφής</u> $\int_{\alpha}^{\beta} P(x)e^{\kappa x+\lambda}dx$, όπου $\kappa \in R^*$ και $P(x)$ είναι πολυώνυμο

Γράφουμε **<u>τον εκθετικό όρο</u>** ως παράγωγο μιας αρχικής του. (**Β΄Ομάδα**-Ασκ.9(ii), σελ.221)

2. <u>Ολοκληρώματα της μορφής</u> $\int_{\alpha}^{\beta} P(x)\eta\mu(\kappa x+\lambda)dx$ ή $\int_{\alpha}^{\beta} P(x)\sigma\upsilon\nu(\kappa x+\lambda)dx$, όπου $\kappa \in R^*$ και $P(x)$ είναι πολυώνυμο

Γράφουμε **<u>τον τριγωνομετρικό όρο</u>** ως παράγωγο μιας αρχικής του.

3. <u>Ολοκληρώματα της μορφής</u> $\int_{\alpha}^{\beta} P(x)\ln(\kappa x)dx$, όπου $\kappa \in R^*$ και $P(x)$ είναι πολυώνυμο

Γράφουμε **<u>το πολυώνυμο</u>** ως παράγωγο μιας αρχικής του. (**Β΄Ομάδα**-Ασκ.9(iii), σελ.221)

- Στην περίπτωση που έχουμε $\int_{\alpha}^{\beta} \ln(\kappa x)dx$, γράφουμε:

$\int_{\alpha}^{\beta} \ln(\kappa x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} (x)'\ln(\kappa x)dx$ και εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

4. <u>Ολοκληρώματα της μορφής</u> $\int_{\alpha}^{\beta} e^{\kappa x+\lambda}\eta\mu(\alpha x+\beta)dx$ ή $\int_{\alpha}^{\beta} e^{\kappa x+\lambda}\sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta)dx$ όπου $\kappa, \alpha \in R^*$

Γράφουμε είτε **τον εκθετικό είτε τον τριγωνομετρικό όρο** ως παράγωγο μιας αρχικής τους και <u>εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες όσες φορές χρειαστεί μέχρι να καταλήξουμε στο αρχικό ολοκλήρωμα I</u>. Οπότε λύνουμε την ισότητα που προέκυψε ως προς I.

(**Β΄Ομάδα**-Ασκ.9(iv), σελ.221)

5. Ολοκλήρωση συνάρτησης f πολλαπλού τύπου στο [α, β]

- Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β]
- Το ολοκλήρωμα είναι ίσο με το άθροισμα των ολοκληρωμάτων της f στα υποδιαστήματα που δημιουργούνται. (**Β΄Ομάδα**-Ασκ.8, σελ.221)

6. Ολοκληρωση συνάρτησης f με απόλυτες τιμές

Βγάζουμε τα απόλυτα και δημιουργούμε συνάρτηση πολλαπλού τύπου, οπότε εργαζόμαστε όπως στην προηγούμενη περίπτωση. (**Β΄Ομάδα**-Ασκ.8, σελ.221)

- Τύπος **ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής**

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du,$$

όπου f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g'(x)\,dx$ και $u_1 = g(\alpha)$, $u_2 = g(\beta)$.

- Π α ρ α τ η ρ ή σ ε ι ς στην Ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής

1. Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta} f(x, (\kappa x+\lambda)^{\nu})dx$, με $\kappa \in R^*$

Θέτουμε $u = \kappa x + \lambda$ (1), οπότε $du = \kappa dx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{\kappa}du$

Λύνουμε την (1) ως προς x και υπολογίζουμε τα καινούργια άκρα του ολοκληρώματος.

2. Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta} f(x, \sqrt[\nu]{g(x)})dx$

Θέτουμε $u = \sqrt[\nu]{g(x)} \Leftrightarrow u^{\nu} = g(x)$ και λύνουμε ως προς u , αν χρειάζεται.

Είναι $\nu u^{\nu-1}du = g'(x)\,dx$. (**Β΄Ομάδα**-Ασκ.7, σελ.221)

3. Ολοκλήρωση αντίστροφης συνάρτησης

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και 1-1 στο [α,β], τότε για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x)dx$ εργαζόμαστε ως εξής:

Θέτουμε $x = f(u)$, οπότε $f^{-1}(x) = f^{-1}(f(u)) = u$ και $dx = f'(u)du$

Υπολογίζουμε τα νέα άκρα του ολοκληρώματος :

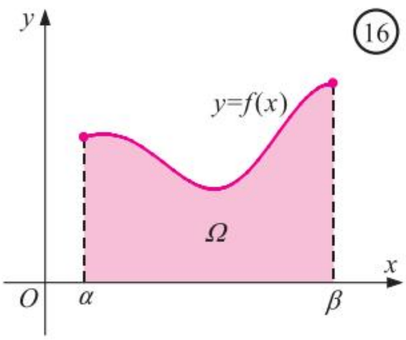
$f(u) = \alpha \Leftrightarrow u = f^{-1}(\alpha)$ και $f(u) = \beta \Leftrightarrow u = f^{-1}(\beta)$ οπότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x)dx = \int_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} f(u)du = [uf(u)]_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} - \int_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} f(u)du$$

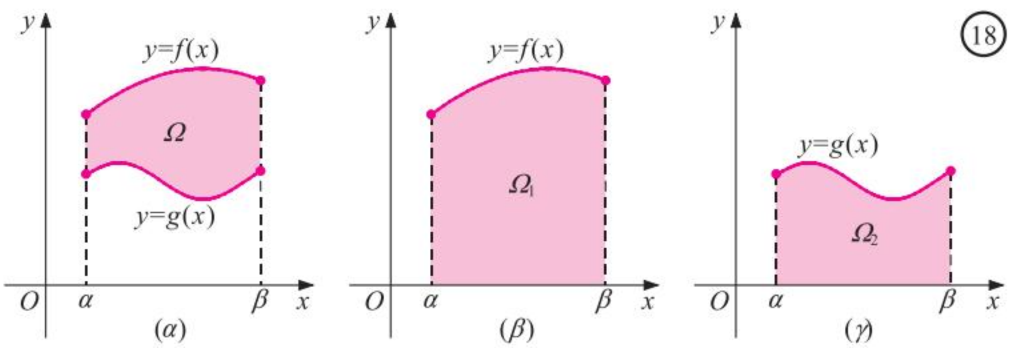
3.7 ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ

• Στην παράγραφο 4.4 είδαμε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και τον άξονα $x'x$ (Σχ. 16) είναι

$$\boxed{E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx}$$



• Έστω, τώρα, δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ (Σχ. 18α).



Παρατηρούμε ότι

$$E(\Omega) = E(\Omega_1) - E(\Omega_2) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx.$$

Επομένως,

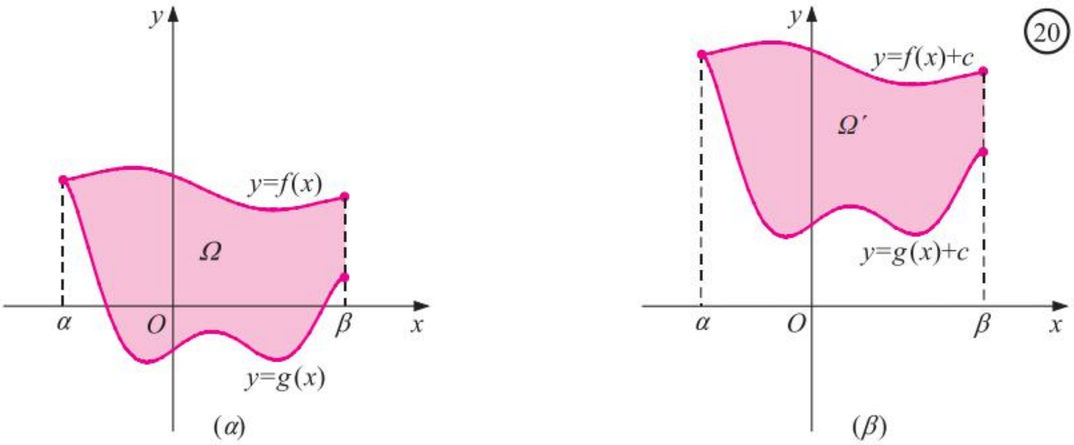
$$\boxed{E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx} \qquad (1)$$

• Ο τύπος (1) βρέθηκε με την προϋπόθεση ότι:

(i) $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και

(ii) οι f, g είναι μη αρνητικές στο $[\alpha, \beta]$.

Θα αποδείξουμε, τώρα, ότι ο τύπος (1) ισχύει και χωρίς την υπόθεση (ii). Πράγματι, επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει αριθμός $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x) + c \geq g(x) + c \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω (Σχ. 20α) έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω' (Σχ. 20β).



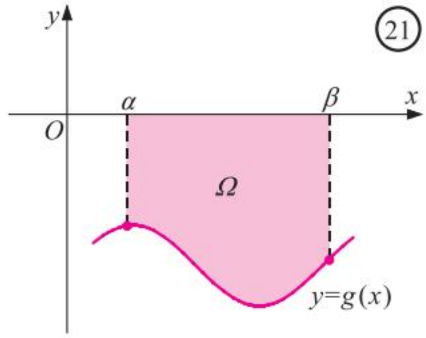
Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (1), έχουμε:

$$E(\Omega)=E(\Omega')=\int_{\alpha}^{\beta}[(f(x)+c)-(g(x)+c)]dx=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx.$$

Άρα,

$$\boxed{E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx}$$

● Με τη βοήθεια του προηγούμενου τύπου μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g, με $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ (Σχ. 21). Πράγματι, επειδή ο άξονας $x'x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=0$, έχουμε

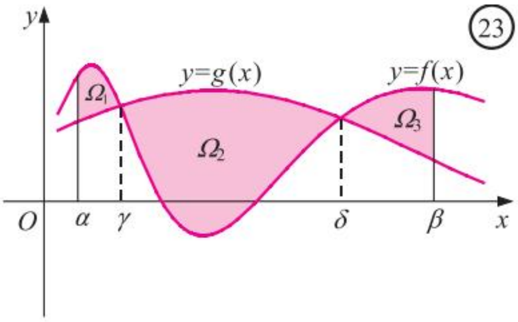


$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta}[-g(x)]dx=-\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx.$$

Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε

$$\boxed{E(\Omega)=-\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx}$$

● Όταν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$, όπως στο Σχήμα 23, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3. Δηλαδή,



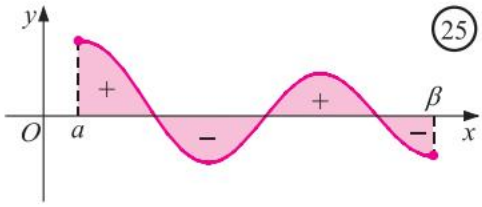
$$\begin{aligned} E(\Omega) &= E(\Omega_1)+E(\Omega_2)+E(\Omega_3) \\ &= \int_\alpha^\gamma (f(x)-g(x))dx + \int_\gamma^\delta (g(x)-f(x))dx + \int_\delta^\beta (f(x)-g(x))dx \\ &= \int_\alpha^\gamma |f(x)-g(x)|dx + \int_\gamma^\delta |f(x)-g(x)|dx + \int_\delta^\beta |f(x)-g(x)|dx \\ &= \int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|dx \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\boxed{E(\Omega)=\int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|dx}$$

<u>Σ χ ό λ ι ο</u>

Σύμφωνα με τα παραπάνω το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$ (Σχ. 25)



<u>*Π α ρ α τ ή ρ η σ η*</u>

Στην περίπτωση που έχουμε να υπολογίσουμε το ***εμβαδόν χωρίου Ω***, που περικλείεται από δύο ή περισσότερες γραφικές παραστάσεις, εργαζόμαστε ως εξής:

- Βρίσκουμε τα σημεία που τέμνονται ανά δύο οι γραφικές παραστάσεις
- Σχεδιάζουμε τις γραφικές πααραστάσεις στο ίδιο σύστημα αξόνων
- Χωρίζουμε το χωρίο Ω , με ευθείες κάθετες στον άξονα x ΄x σε επι μέρους χωρία, τα οποία σχηματίζονται από δύο μόνο γραφικές παραστάσεις
- Υπολογίζουμε το εμβαδόν καθενός από τα παραπάνω χωρία και το άθροισμά τους είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω

(**Β΄Ομάδα**-Ασκ.1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ,12, σελ.232-233)

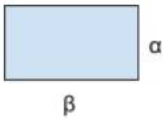
- **Προσοχή** στις Γενικές Ασκήσεις (**Γ΄Ομάδα**): 1, 2, 4, 8, 9, 10, σελ.234-236

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

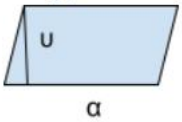
Εμβαδόν επιπέδων σχημάτων

1. Εμβαδόν **τετραγώνου** με πλευρά α : **E=** $\boldsymbol{\alpha^2}$

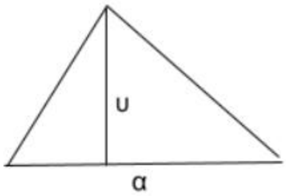
2. Εμβαδόν **ορθογωνίου** με πλευρές α,β : **E =** $\boldsymbol{\alpha \cdot \beta}$



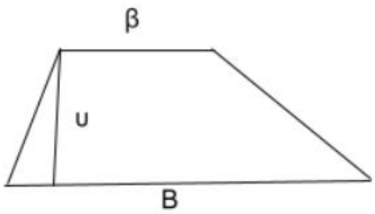
3. Εμβαδόν **παραλληλογράμμου**: **E= (πλευρά) ·(αντίστοιχο ύψος)=**$\boldsymbol{\alpha \cdot \upsilon_\alpha}$



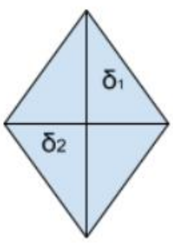
4. Εμβαδόν **τριγώνου** : **E=** $\boldsymbol{{}^{(\text{πλευρά})\cdot(\text{αντιστοιχο ύψος})}/_{2} = \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\upsilon_\alpha}$



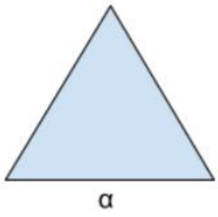
5. Εμβαδόν **τραπεζίου**: **E=** $\boldsymbol{{}^{(B+\beta)\cdot\upsilon}/_{2}}$ (Β,β:βάσεις του τραπεζίου και υ το ύψος του)



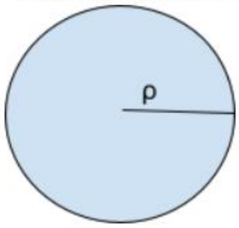
6. Εμβαδόν **ρόμβου**: **E =** $\boldsymbol{{}^{\delta_1\cdot\delta_2}/_{2}}$ (δ_1, δ_2: οι διαγώνιοι του ρόμβου)



7. Εμβαδόν **ισοπλεύρου τριγώνου** πλευράς α: $\mathbf{E = \alpha^2\sqrt{3}/_4}$

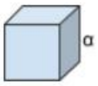


8. Εμβαδόν **κύκλου** ακτίνας ρ : $\mathbf{E= \pi\rho^2}$
Μήκος κύκλου: $\mathbf{L= 2\pi\rho}$



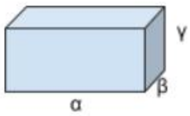
Εμβαδόν και όγκος στερεών

1. **Κύβος** (με πλευρά α)
   $\mathbf{E = 6\alpha^2}$
   $\mathbf{V = \alpha^3}$



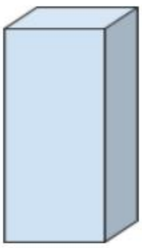
2. **Παραλληλεπίπεδο** (με διαστάσεις α, β, γ)

$\mathbf{E = 2\alpha\cdot\beta+2\beta\cdot\gamma+2\alpha\cdot\gamma}$
$\mathbf{V = \alpha\cdot\beta\cdot\gamma}$



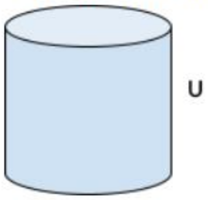
3. **Πρίσμα**

Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας: $\mathbf{E_\pi}$**=(περίμετρος βάσης)·(ύψος)**
Ολικό εμβαδόν: $\mathbf{E_{ολ}= E_\pi+ 2E_\beta}$ (E_β: Εμβαδόν βάσης)
Όγκος: **V = (Εμβαδόν βάσης)·(ύψος)**



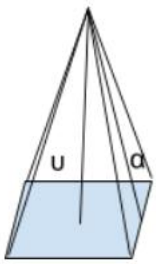
4. **Κύλινδρος**

Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας: $\mathbf{E_{\pi}=2\pi\rho\cdot\upsilon}$
Ολικό εμβαδόν: $\mathbf{E_{o\lambda}= 2\pi\rho\cdot\upsilon+2\pi\rho^2}$
Όγκος: $\mathbf{V=\pi\rho^2\cdot\upsilon}$
(ρ: η ακτίνα της βάσης και υ: ύψος)



5. **Πυραμίδα**

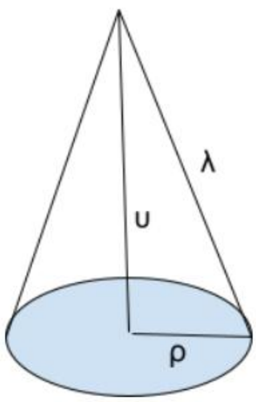
Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας κανονικής πυραμίδας:
E_{π}= ½ (περίμετρος βάσης)·(απόστημα)
Ολικό εμβαδόν: $\mathbf{E_{o\lambda}=E_{\pi}+E_{\beta}}$
Όγκος: **V= ⅓ (Εμβαδόν βάσης)·(ύψος)**



(α: απόστημα, είναι το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου της παράπλευρης επιφάνειας)

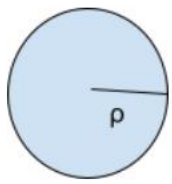
6. **Κώνος**

Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας: $\mathbf{E_{\pi}= \pi\cdot\rho\cdot\lambda}$
Ολικό εμβαδόν: $\mathbf{E_{o\lambda}= \pi\rho^2+ \pi\cdot\rho\cdot\lambda}$
Όγκος: $\mathbf{V= \frac{1}{3} \pi\rho^2\cdot\upsilon}$



7. **Σφαίρα**

$\mathbf{E=4\pi\rho^2}$
$\mathbf{V= 4/3\ \pi\rho^3}$



ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ		ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	
f(x)	**f ΄(x)**	**f(g(x))**	**f (g(x))΄**
c (σταθερά)	0		
x	1	$cf(x)$	$cf'(x)$
$x^a, \alpha \in \mathbb{R}^*, x>0$	αx^{a-1}	$f(x)^a, \alpha \in \mathbb{R}^*, x>0$	$\alpha f(x)^{a-1} f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin f(x)$	$\cos f(x) f'(x)$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos f(x)$	$-\sin f(x) f'(x)$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan f(x)$	$\frac{1}{\cos^2 f(x)} f'(x)$
$tagx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$tagf(x)$	$-\frac{1}{\sin^2 f(x)} f'(x)$
e^x	e^x	$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} f'(x)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}, x \neq 0$	$\ln f(x)$	$\frac{1}{f(x)} f'(x)$
$\sqrt{x}, x>0$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{f(x)}, x>0$	$\frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x)$
$\frac{1}{x}, x \neq 0$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{f(x)}, x \neq 0$	$-\frac{1}{f(x)^2} f'(x)$

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

$$(c \cdot f)'(x) = cf'(x)$$

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)\mathrm{g}(x) + f(x)\mathrm{g}'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\mathrm{g}(x) - \mathrm{f}(x)\mathrm{g}'(x)}{[\mathrm{g}(x)]^2}$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΓΟΥΣΕΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	ΠΑΡΑΓΟΥΣΕΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
$\int_\alpha^\beta 1dx = [\mathrm{x}]_\alpha^\beta = \beta - \alpha$	
$\int_\alpha^\beta x^\kappa dx = \left[\frac{\mathrm{x}^{\kappa+1}}{\kappa+1}\right]_\alpha^\beta$	$\int_\alpha^\beta f(x)^\kappa f'(x)dx = \left[\frac{(f(x))^{\kappa+1}}{\kappa+1}\right]_\alpha^\beta$
$\int_\alpha^\beta \frac{1}{x} dx = [\ln x]_\alpha^\beta$	$\int_\alpha^\beta \frac{1}{f(x)} f'(x)dx = [\ln f(x)]_\alpha^\beta$
$\int_\alpha^\beta e^x dx = [e^x]_\alpha^\beta$	$\int_\alpha^\beta e^{f(x)} f'(x)dx = [e^{f(x)}]_\alpha^\beta$
$\int_\alpha^\beta \sigma\upsilon\nu x dx = [\eta\mu x]_\alpha^\beta$	$\int_\alpha^\beta \sigma\upsilon\nu f(x) f'(x)dx = [\eta\mu f(x)]_\alpha^\beta$
$\int_\alpha^\beta \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_\alpha^\beta$	$\int_\alpha^\beta \eta\mu f(x) f'(x)dx = [-\sigma\upsilon\nu f(x)]_\alpha^\beta$
$\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = [\varepsilon\varphi x]_\alpha^\beta$	$\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)} f'(x)dx = [\varepsilon\varphi f(x)]_\alpha^\beta$
$\int_\alpha^\beta \frac{1}{\eta\mu^2 x} dx = [-\sigma\varphi x]_\alpha^\beta$	$\int_\alpha^\beta \frac{1}{\eta\mu^2 f(x)} f'(x)dx = [-\sigma\varphi f(x)]_\alpha^\beta$

$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathrm{dx} = \left[\sqrt{\mathrm{x}}\right]_{\alpha}^{\beta}$	$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x)\,\mathrm{dx} = \left[\sqrt{f(\mathrm{x})}\right]_{\alpha}^{\beta}$
$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{\alpha}^{\beta}$	$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{f(x)^2} f'(x) dx = \left[-\frac{1}{f(x)}\right]_{\alpha}^{\beta}$

ΟΡΙΣΜΟΣ	**ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ**	
$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = [F(x)]_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(a)$	$\int_{\alpha}^{\beta} c dx = c(\beta - \alpha)$	$\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$
ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ	$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$	$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$
$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\,\mathrm{g(x)}dx = [f(x)\,\mathrm{g(x)}]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\mathrm{g'(x)}dx$	$\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(x) + \mu\, \mathrm{g(x)}]dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \mu \int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{g}(x)dx$	