Συνέπειες Θ.Μ.Τ

1. Να προσδιορισθεί συνάρτηση f , τέτοια ώστε f(0)=-1, f(-1)=-5, f(1)=3 και για κάθε $x\in R$, ισχύει: $f^{(3)}(x)=12$.

2. Να βρείτε τη συνάρτηση f όταν:
α. $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, για κάθε x>0 και f(1)=1
β. f'(x)=ημx+συνx, για κάθε $x\in R$ και $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$
γ. $f'(x)=e^x(1+x)$, για κάθε $x\in R$ και f(0)=-3.

3. Έστω η συνάρτηση f, δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, τέτοια ώστε $f''(x)=f^2(x)$, για κάθε $x\in R$ και η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{2}{3}f^3(x)-[f'(x)]^2+2$
α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή
β. Αν f(1)=0 και f'(1)=-1, δείξτε ότι $3[f'(x)]^2-2f^3(x)=3$.

4. α. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και για κάθε $x\in R$ ισχύει f'(x)+f(x)=0, να δείξετε ότι $f(x)=c\cdot e^{-x}$, όπου c σταθερά.
β. Να βρεθεί η συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο (1,+∞), όταν $g(e)=e^{-e}$ και $[g(x)+g'(x)]\cdot \ln x^x+g(x)=0$, για κάθε x>1.

5. Οι συναρτήσεις f:R→R, g:(0,+∞)→ R είναι παραγωγίσιμες και ισχύουν:
α. f(g(x))=x και f'(g(x))=x για κάθε x>0
β. $f(1)=e^{1994}$
Να βρείτε τις συναρτήσεις f, g.

6. Για μια συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο (0,+∞) ισχύει $x(e^x f'(x)+\ln x)=1$, για κάθε x>0. Επίσης η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο με τετμημένη 1. Να βρεθεί ο τύπος της.

7. Να βρεθεί η συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f''(x)=-\dfrac{2}{(x-3)^2}$, για κάθε x>3. Επίσης η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Μ(4,16) είναι παράλληλη της ευθείας ε_1:y=6x-5.

8. Έστω g παραγωγίσιμη στο (0,+∞) και $g(1)=\dfrac{\eta\mu e}{e}$ και xg'(lnx)=xσυνx-ημx. Να βρείτε το g(π).

9. Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με f(x)≠0 για κάθε $x\in R$ και $3f'(x)=4xf^2(x)$, $x\in R$.
Αν η C_f διέρχεται από το σημείο Α(1,-1), να βρεθεί ο τύπος της.

10. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με f'(0)=2 και ισχύουν $f(a+x)=f(a)f(x)e^{2ax}$ και f(x)≠0 για κάθε $x,a\in R$ να αποδείξετε ότι:
α. f(0)=1 και f'(x)=2f(x)(x+1) για κάθε $x\in R$
β. Η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^{x^2+2x}}$ είναι σταθερή στο R
γ. Να βρεθεί ο τύπος της f.

11. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f,g στο R ώστε να ισχύουν οι επόμενες

προϋποθέσεις: α. $f(x)\neq 0$ και $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$

β. $f(0)=1$ και $g(0)=1$

γ. $f'(x)=\frac{1}{g(x)}$ και $g'(x)=-\frac{1}{f(x)}$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x)\cdot g(x)=1$ για κάθε $x\in R$ ii. Να υπολογίσετε τους τύπους των f,g.

12. Δίνεται μια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $|f'(x)|\leq|x_1-x_2|$, για κάθε $x\in R$ και για κάθε $x_1,x_2\in R(x_1\neq x_2)$.

α. Να δειχθεί ότι $|f(x_1)-f(x_2)|\leq|x_1-x_2|^2$, για κάθε $x_1,x_2\in R(x_1\neq x_2)$

β. Να δειχθεί ότι η f είναι σταθερή στο R.

13. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και για κάθε $x,y\in R$ ισχύει $f(x)-f(y)\leq(x-y)^2$, να αποδειχθεί ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\rightarrow R$ για την οποία ισχύει:

Επιλογή ασκ.: Ε. Κουκόγια

$f'(x)=\begin{cases} x+1, & x\leq 0 \\ 3x+1, & x>0 \end{cases}$ και $f(1)=\frac{7}{2}$. Να βρεθεί η συνάρτηση f.

15. Έστω μια συνάρτηση $f'(x)=\begin{cases} 2x-1, & x<0 \\ 3x^2-1, & x\geq 0 \end{cases}$. Αν $f(1)=2$ να βρείτε την f.

16. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:R\rightarrow R$ με : $f(0)=0$ και $g(0)=1$.
Αν ισχύει: $f'(x)=g(x)$ και $f(x)=-g'(x)$ για κάθε $x\in R$, να αποδειχθεί ότι:

α. Η συνάρτηση $\varphi(x)=f^2(x)+g^2(x)$ είναι σταθερή στο R,

β. $f^2(x)+g^2(x)=1$ για κάθε $x\in R$,

γ. Η συνάρτηση $h(x)=(f(x)-ημx)^2+(g(x)-συνx)^2$ είναι σταθερή,

δ. $f(x)=ημx$ και $g(x)=συνx$, $x\in R$.

17. Έστω $f:R\rightarrow R$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα :

$f(x+y)+f(x+2y)=2f(x)+3y$ για κάθε $x,y\in R$.

Αν η C_f εφάπτεται με τη C_g , όπου $g(x)=5-\frac{1}{x}$, στο σημείο Α(1,γ) τότε:

α. Να αποδειχθεί ότι $f'(x)=1$, για κάθε $x\in R$,

β. Να βρεθεί ο τύπος της f.

18. Να βρεθεί η συνάρτηση $f:R\rightarrow R$ όταν για κάθε $x\in R$ ισχύει:

α. $f'(x)=2f(x)$ και $f(0)=1$

β. $f'(x)+3f(x)=2e^{-x}$ και $f(0)=2$

γ. $f'(x)=2xf(x)+2x$ και $f(0)=1$

19. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει:

$xf'(x)-2f(x)=0$ για κάθε $x>0$.

Αν $f(1)=2004$, να βρεθεί η f.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(-1,β)\rightarrow R$ παραγωγίσιμη στο (-1,β) για την οποία ισχύει

$(1+x)f'(x)-2f(x)=0$ για κάθε $x\in(-1,β)$.

Να βρεθεί η συνάρτηση f.

21. Μια συνάρτηση $f:R\rightarrow R$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν:

Επιλ.ασκ: Ε. Κουκόγια

$f(0)=f'(0)=0$ και $(f(x)-f'(x))^2=2f'(x)f''(x)$ για κάθε $x\in R$.
Να αποδείξετε ότι :
α. Η συνάρτηση $g(x)=[f^2(x)+(f'(x))^2]e^{-x}$ είναι σταθερή στο R
β. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

22. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύουν:
i. $f''(x)=3e^{x^2}+4x^2e^{x^2}-f(x)$,
ii. $(f(0))^2+(f'(0))^2=2f(0)-1$.
α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\left(f(x)-e^{x^2}\right)^2+\left(f'(x)-2xe^{x^2}\right)^2$ είναι σταθερή στο R,
β. Να βρείτε τον τύπο της f.

23. Δίνονται οι συναρτήσεις $f:R\to R$ και $g:(0,+\infty)\to R$ με:
$g(1)=2004$, $f(g(x))=x-\dfrac{1}{x}$ και $f'(g(x))=x+\dfrac{1}{x}$ για κάθε $x>0$.
α. Να αποδείξετε ότι $g(x)=\ln x+2004$
β. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

24. Μια συνάρτηση $f:R\to R$ έχει την ιδιότητα :
$f(x+y)-f(x)=yf'(x)$ για κάθε $x,y\in R$.
Αν η C_f εφάπτεται της C_g στο σημείο $A(0,g(0))$, όπου $g(x)=(x+1)^2$, να βρείτε:
α. το $f(0)$ και το $f'(0)$,
β. τον τύπο της συνάρτησης f.

25. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει $xf'(x)=0$ για κάθε $x\in R$. Αν $f(-1)=5$, να βρείτε τον τύπο της f.

26. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ και $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ με $f(x)=xf'(x)$, $f(-1)=f(2)=2$ και $D_g=R^*$. Να εξετασθεί αν η g είναι σταθερή και να βρεθεί ο τύπος της f.