

Μονοτονία

1. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$ β. $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ γ. $f(x) = |x^2 + x - 12|$ δ. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

2. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η $f(x) = \ln(x^2 + 1) + \lambda x - 1$ είναι γνησίως αύξουσα.

3. Να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες η $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 2ax^2 - 2x + a^2$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $e^x + e^{5x} = 2$ β. $x^2 + x + \ln x = 2$ γ. $2|\ln x - 1|^5 + 2^{|\ln x - 1|} = 6 - 2|\ln x - 1|$ δ. $e^{|x|} - e^2 = |x| - 2$
 ε. $x^5 + 2^{x-1} = 3 - x$ στ. $e^x - e^{-x} = 2xe^{-x}$ ζ. $2^x + 3^x + 4^x = 9^x$

5. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $(x - 2000)^{2000} = x^{2000} + 2000^{2000}$, $x \in \mathbb{R}$, έχει μόνο μία λύση.

6. Αν n άρτιος να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $(x+1)^n = x^n + 1$ έχει ακριβώς μία λύση.

7. α. Να λυθεί η εξίσωση: $(1-x)e^x = x^2 + 1$

β. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x - 1$ και $g(x) = x^2 + xe^x$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στην αρχή των αξόνων.

8. Να αποδείξετε ότι :

α. Η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x + 4^x - 2$, $x \in \mathbb{R}$, είναι γνησίως μονότονη,

β. Η εξίσωση $4^x + 12^x = 2 \cdot 3^x$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$.

9. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3\eta\mu x - 1$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -x$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x \ln x$ και $g(x) = 1 - e^x$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (0, 1)$, ώστε οι εφαπτόμενες των C_f , C_g στο σημείο με τετμημένη x_0 να είναι παράλληλες.

11. Αν $f(x) = x^4 - 4x + 2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο μόνο πραγματικές και άνισες ρίζες.

12. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών των εξισώσεων:

α. $x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = 0$ β. $x^3 - 3x + 2 = 0$ γ. $2x^3 - 3x^2 - 1 = 0$

13. α. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) > 0$ και $g'(x) < 0$, να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο,

β. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x + 2x$ και $g(x) = e^{-x} - x^3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο που βρίσκεται στον άξονα $y'y$.

14. Να λυθεί η εξίσωση: $e^{2(\lambda^2 - \lambda)} - e^{2(6 - 2\lambda)} = (6 - 2\lambda)^5 - (\lambda^2 - \lambda)^5$.

15. Να βρεθεί ο λ ώστε να ισχύει: $\alpha^{\lambda^2 - 4} - \alpha^{\lambda - 2} = \lambda^2 - \lambda - 2$, $0 < \alpha < 1$.

16. Να λυθούν οι εξισώσεις :

Επιλ. ασκ: Ε. Κουκόγια

α. $e^{x^3+4} - e^{x^2+4x} = -x^3 + x^2 + 4x - 4$

β. $2^{\ln(x^2+3)} - 2^{\ln 4x} = \ln \frac{4x}{x^2+3}$ γ. $\ln \frac{x^2+1}{2x} = \sqrt{4x^2+1} - \sqrt{(x^2+1)^2+1}$.

17. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , για την οποία υποθέτουμε ότι ισχύει: $f^3(x) + f(x) = \sin x$, για κάθε $x \in [0, \pi]$. Να δείξετε ότι:

α. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$,

β. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0, \pi)$.

18. Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύει: $f(0) = g(0)$ και $f'(x) > g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι: α. $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ β. $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

19. Να δείχθεί ότι: $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x$, για κάθε $x > 0$.

20. Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $\ln x < x$.

21. Να αποδειχθεί ότι:

$$e^x \geq x^e \text{ για κάθε } x > 0$$

22. Να αποδειχθούν οι ανισότητες :

α. $2e^x \geq 2 + 2x + x^2$, για $x \geq 0$ β. $\frac{1+x}{1-x} > e^{2x}$, για $0 < x < 1$.

23. Να μελετηθεί η μονοτονία των συναρτήσεων:

α. $f(x) = 4e^x + x^4 + 6x^2 - 4x + 1$ β. $f(x) = 2x \ln x - x + 1$ γ. $f(x) = -4\mu x - 3x^2 + 4x + 1$.

24. Να αποδειχθεί ότι: $e^x > 1 + \ln(1+x)$ για κάθε $x > 0$.

25. Να δείχθεί ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $\eta \mu x > x - \frac{x^3}{6}$.

26. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ και ισχύουν $f'(a) > 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, να αποδειχθεί ότι $f(\beta) > f(a)$.

27. Έστω ότι είναι $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [0, 3]$ και $f(1) = f(2) = 0$. Να δείξετε ότι θα είναι $f(0) < 0$ και $f(3) < 0$.

28. Αν είναι $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και $f(a) = f(\beta) = 0$ να δείξετε ότι $f(x) > 0$, $x \in (a, \beta)$.

29. Αν είναι $f''(x) > 0$ για $0 \leq x \leq 3$ και $f(1) = f(2) = 7$, να βρεθεί το πρόσημο των παραγώγων $f'(0)$ και $f'(3)$ και να δείξετε ότι είναι $f\left(\frac{3}{2}\right) < 7$.

30. Έστω η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ τέτοια ώστε $f(0) = 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Να δείξετε ότι:

α. Υπάρχει $\xi > 0$ τέτοιος ώστε $f(x) = f'(\xi)x$, για κάθε $x > 0$,

β. Η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

31. α. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = e^x(1-x) - 1$, $x < 1$

Επιλ. ασκ: Ε. Κουκόγια

β. Ναδειχθεί ότι για κάθε $x < 1$, ισχύει $e^x \leq \frac{1}{1-x}$.

32. α. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$

β. Αν $a > \beta > 1$, να δείξετε ότι $\beta^2 - \alpha^2 < \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$.

33. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + (x-1000)^2$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f ,

β. Να συγκρίνετε τους αριθμούς 1000^2 και $998^2 + 2^2$,

γ. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της $f(x) = (x-a)^v + x^v$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $v \in \mathbb{N}^*$, $v = 2p$.
Να συγκρίνετε τους αριθμούς 10000^{100} και $9000^{100} + 1000^{100}$.

34. Να λυθεί η ανίσωση: $a^{x^2-2x} - a^{x-2} \leq -x^2 + 3x - 2$, $a > 1$. Πότε ισχύει η ισότητα;

35. Να λυθεί η ανίσωση: $\ln(2\lambda^2 + 2) + \frac{1}{\lambda^2 + 3} > \ln(\lambda^2 + 3) + \frac{1}{2\lambda^2 + 2}$.

36. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[0,6]$. Αν η C_f περνά από το σημείο $A(0,1)$ και ισχύει $f'(x) > x$ για κάθε $x \in [0,6]$ να αποδείξετε ότι:

α. Η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,6]$,

β. $g(x) > 0$, $x \in [0,6]$,

γ. Το σημείο $B(6,18)$ δεν ανήκει στην C_f .

37. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ ικανοποιεί τη σχέση $P(x) = P'(x) + x^3$.

α. Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου,

β. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$,

γ. Να υπολογίσετε το πλήθος των πραγματικών ριζών του,

δ. Να βρείτε το πρόσημο των ριζών του.

38. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$f^3(x) + 3f(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \ln x + x - \frac{x^2}{4} \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty). \text{ Να αποδειχθεί ότι η } f \text{ είναι γνησίως}$$

αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

39. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\Delta = (1, +\infty)$ συναρτήσεις f και g με τις ιδιότητες

α. Οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται στο σημείο με τετμημένη 1,

β. $xf'(x) - x^2g'(x) < f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Να αποδειχθεί ότι:

i. Η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{x} - g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ ,

ii. $f(x) < xg(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

40. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι ισχύουν $f(x+y) = e^x f(x) + e^y f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, $f'(0) = 2004$ και $f(1) = 2004e$.

Να αποδειχθεί ότι:

α. $f'(x) = f(x) + 2004e^x$ β. $f(x) = 2004xe^x$.

41. Έστω η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) > 0$. Να αποδείξετε ότι $2f(x+1) < f(x) + f(x+2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επιλ. ασκ: Ε. Κουκόγια

42. Δίνεται η συνάρτηση $f:[a,\beta]\rightarrow\mathbb{R}$ συνεχής και τέτοια ώστε $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(a,\beta)$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, είναι γνησίως αύξουσα στο (a,β) .

43. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι δεν μπορεί να ισχύουν συγχρόνως οι σχέσεις:

$$f(2)=-1, f'(2)=1, f(4)=1 \text{ και } f'(x)>0 \text{ για } x>2.$$

44. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x)>3x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=0$.

α. Να αποδειχθεί ότι: $\lim_{x\rightarrow+\infty} f(x)=+\infty, \lim_{x\rightarrow-\infty} f(x)=-\infty$,

β. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f ,

γ. Να βρεθεί το πρόσημο της συνάρτησης f .

45. Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$e^{f(x)}+f(x)=x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

α. Να αποδειχθεί ότι $f(0)=0$.

β. Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f .

γ. Να βρείτε τη μονοτονία της f και f' .

δ. Να αποδειχθεί ότι $xf'(x)\leq f(x)\leq \frac{x}{2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

46. Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x)>2f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$. Να δείξετε ότι $f(x)>e^{2x}$, για κάθε $x>0$.

47. Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:[1,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $x(f'(x)-xg'(x))<f(x)$ για κάθε $x\geq 1$ και $f(1)=g(1)$. Να δείξετε ότι $f(x)<x\cdot g(x)$ για κάθε $x>1$.