

Προβλήματα στις συναρτήσεις

1. Ένα κομμάτι σύρμα μήκους 40cm κόβεται σε δύο κομμάτια με μήκη x cm και $(40 - x)$ cm. Στη συνέχεια λυγίζονται και τα δύο κομμάτια σε σχήμα τετραγώνου. Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων ως συνάρτηση του x .

$$(\text{Απ. } E(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{40-x}{4}\right)^2, x \in (0,40))$$

2. Δύο σημεία $A(x,0)$ και $B(0,y)$ κινούνται πάνω στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, έτσι ώστε να ορίζουν με το σημείο $K(2,1)$ τρίγωνο ορθογώνιο στο K . Να εκφράσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου KAB ως συνάρτηση του x .

$$(\text{Απ. } \Pi(x) = (3 + \sqrt{5})\sqrt{(x-2)^2 + 1}, x \in \mathbb{R}, E(x) = (x-2)^2 + 1, x \in \mathbb{R})$$

3. Ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει περίμετρο 8 cm και η βάση του είναι x cm.

α. Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ως συνάρτηση του x .

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τριγώνου δεν υπερβαίνει τα 3 cm^2 .

$$(\text{Απ. α. } E(x) = x\sqrt{4-x}, x \in (0,4) \quad \beta. x \in (0, \frac{1+\sqrt{13}}{2}] \cup [3,4))$$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2$. Θεωρούμε τα σημεία $A(x,f(x))$ και $B(x+2, f(x+2))$, διαφορετικά από την αρχή των αξόνων O . Έστω επίσης E το εμβαδόν του τριγώνου OAB .

α. Να εκφράσετε το εμβαδόν E ως συνάρτηση του x .

β. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης E .

$$(\text{Απ. α. } E(x) = |x^2 + 2x|, x \in \mathbb{R} - \{-2,0\})$$

5. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με περίμετρο 12 cm. Με πλευρά τη διαγώνιο $A\Gamma$ σχηματίζουμε τετράγωνο $A\Gamma ZH$. Έστω ότι $AB = x$ cm.

α. Να εκφράσετε συναρτήσει του x :

I) το εμβαδόν E του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$,

II) το εμβαδόν S του τετραγώνου $A\Gamma ZH$.

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τετραγώνου $A\Gamma ZH$ είναι ίσο με τα $\frac{5}{2}$ του εμβαδού του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$.

γ. Να αποδείξετε ότι για τις επιτρεπόμενες τιμές του x ισχύει:

$$E(x) \leq 9 \leq \frac{S(x)}{2}.$$

(Απ. α. i) $E(x) = -x^2 + 6x$ με $0 < x < 6$, ii) $S(x) = 2x^2 - 12x + 36$ με $0 < x < 6$, β. $x = 2$ ή $x = 4$.)

6. Ένα κυλινδρικό φλυτζάνι, ανοικτό από πάνω, κατασκευάζεται έτσι ώστε το ύψος του και το μήκος της βάσης του να έχουν άθροισμα 20 cm. Αν το φλυτζάνι έχει ύψος h cm, να εκφράσετε τον όγκο του ως συνάρτηση του h . Αν η ακτίνα της βάσης του είναι r , να εκφράσετε το εμβαδόν της επιφάνειάς του ως συνάρτηση του r .

$$(\text{Απ. } V(h) = \pi \left(\frac{20-h}{2}\right)^2 \cdot h, 0 < h < 20, \quad E(r) = \pi r^2 + 2\pi r(20 - 2\pi r), 0 < r < \frac{10}{\pi})$$

7. Έχουμε περιφράξει με συρματοπλέγμα μήκους 100 m, μια ορθογώνια περιοχή από τις τρεις πλευρές της. Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος. Αν το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι x , να εκφράσετε το εμβαδόν της περιοχής ως συνάρτηση του x .

$$(\text{Απ. } E(x) = x \left(50 - \frac{x}{2}\right), 0 < x < 100)$$