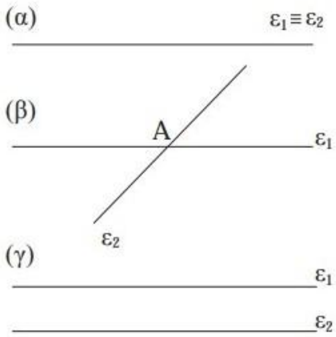
Καθηγήτρια: Ε. Κουκόγια

Παράλληλες ευθείες



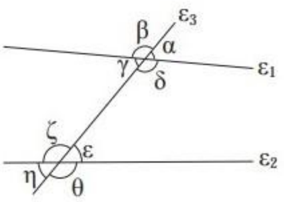
Οι σχετικές θέσεις δυο ευθειών $ε_1$ και $ε_2$, οι οποίες βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, είναι οι παρακάτω:
i) ταυτίζονται (σχ.α)
ii) τέμνονται (σχ.β)
iii) δεν τέμνονται (σχ.γ)
Στην τρίτη περίπτωση οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ λέγονται **παράλληλες**, ώστε:

Δυο ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κοινό σημείο λέγονται παράλληλες ευθείες.

Για να δηλώσουμε ότι οι $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες, γράφουμε $ε_1//ε_2$.

Είχαμε μάθει στο Γυμνάσιο τους όρους: **"εντός εναλλάξ", "εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη"** και **"εντός και επί τα αυτά μέρη"** γωνίες δύο παραλλήλων $ε_1$ και $ε_2$, που τέμνονται από μια τρίτη ευθεία $ε_3$.

Στο παρακάτω σχήμα $ε_1//ε_2$. Να βρείτε όλες: α) τις "εντός εναλλάξ γωνίες"



....

β) τις "εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες"

....

γ) τις "εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες"

....

<u>**Θεώρημα**</u>
Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.
<u>Απόδειξη</u>

- -

- -

- -

- -

<u>Πόρισμα 1</u>
Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες ή δύο εντός και επί τα αυτά μέρη παραπληρωματικές, τότε είναι παράλληλες.

<u>Πόρισμα 2</u>
Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.

Αίτημα παραλληλίας (Αίτημα του Ευκλείδη)
Από σημείο εκτός ευθείας άγεται **μία μόνο** παράλληλη προς αυτή.

Ιδιότητες παραλλήλων ευθειών

Πρόταση 1
Αν δυο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν τις **εντός εναλλάξ γωνίες ίσες**.

Πόρισμα
Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν:
i) τις **εντός εκτός και επί τα αυτά** μέρη γωνίες **ίσες**,
ii) τις **εντός και επί τα αυτά μέρη** γωνίες **παραπληρωματικές**

Πρόταση 2
Αν δύο διαφορετικές ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες προς μία τρίτη ευθεία ε, τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες, δηλαδή αν $ε_1//ε$ και $ε_2//ε$, τότε $ε_1//ε_2$.

Πρόταση 3
Αν δύο ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες και μία τρίτη ευθεία ε τέμνει τη μία από αυτές, τότε η ε θα τέμνει και την άλλη.

Πόρισμα
Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε μια από δύο παράλληλες ευθείες, τότε είναι κάθετη και στην άλλη.

Πρόταση 4
Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από 2 ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες.

Πόρισμα
Η κατασκευή τριγώνου με δοσμένη μία πλευρά και τις δύο προσκείμενες σε αυτή γωνίες έχει λύση, αν και μόνο αν, το άθροισμα των δύο γωνιών είναι μικρότερο των δύο ορθών.

- Γωνίες με πλευρές παράλληλες

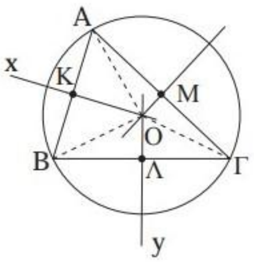
Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες, μία προς μία, είναι ίσες αν είναι και οι δύο οξείες ή αμβλείες, ενώ είναι παραπληρωματικές αν η μία γωνία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία.

- Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου

► Ο περιγεγραμμένος κύκλος τριγώνου

Θα αποδείξουμε ότι για κάθε τρίγωνο υπάρχει κύκλος που διέρχεται από τις τρεις κορυφές του. Ο κύκλος αυτός λέγεται **περιγεγραμμένος** κύκλος του τριγώνου και επιπλέον αποδεικνύεται ότι το κέντρο του είναι ένα σημείο στο οποίο συντρέχουν και οι τρεις μεσοκάθετοι του τριγώνου και λέγεται **περίκεντρο**.

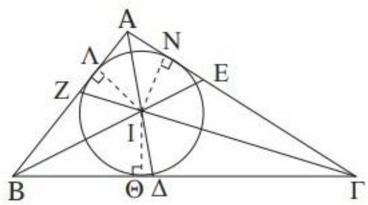
Θεώρημα
Οι τρεις μεσοκάθετοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου.
Απόδειξη



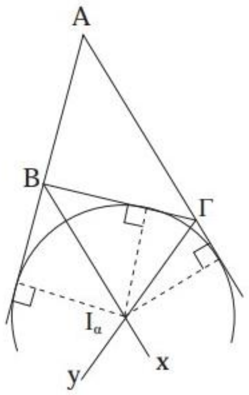
► Ο εγγεγραμμένος κύκλος τριγώνου

Ένας άλλος σημαντικός κύκλος βρίσκεται στο εσωτερικό τριγώνου και εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε τρίγωνο υπάρχει κύκλος με την ιδιότητα αυτή. Ο κύκλος αυτός λέγεται **εγγεγραμμένος** κύκλος του τριγώνου και το κέντρο του, το οποίο λέγεται **έγκεντρο**, θα είναι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών του τριγώνου.

Θεώρημα
Οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου.
Απόδειξη



Οι παρεγγεγραμμένοι κύκλοι τριγώνου



Η ιδιότητα των εσωτερικών διχοτόμων ενός τριγώνου να διέρχονται από το ίδιο σημείο ισχύει και όταν θεωρήσουμε δύο εξωτερικές και μία εσωτερική διχοτόμο του τριγώνου. Οι τρεις αυτές διχοτόμοι τέμνονται σε σημείο το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται στη μία πλευρά του τριγώνου και στις προεκτάσεις των δύο άλλων. Ο κύκλος αυτός λέγεται **παρεγγεγραμμένος** και το κέντρο του **παράκεντρο** του τριγώνου. Σε κάθε τρίγωνο υπάρχουν τρία παράκεντρα, τα οποία συμβολίζουμε I_α, I_β, I_γ, και κατά συνέπεια τρεις παρεγγεγραμμένοι κύκλοι.

Παραδείγματα

1. Ασκήσεις Εμπέδωσης 3 (σελ.87)

Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και η διχοτόμος της ΟΔ. Από σημείο Α της Οy φέρουμε παράλληλη προς την ΟΔ που τέμνει την προέκταση της Οx στο Β. Να αποδείξετε ότι ΟΑ = ΟΒ.

Λύση

----

2. Αποδεικτικές Ασκήσεις 2 (σελ.87)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Από την κορυφή Β φέρουμε ΒΕ//ΑΔ που τέμνει την προέκταση της ΓΑ στο Ε. Να αποδείξετε ότι ΕΓ = ΑΒ + ΑΓ.

Λύση

Ασκήσεις Εμπέδωσης: 1, 2, 4, 5, 6 - Αποδεικτικές Ασκήσεις: 1, 3 (σελ.87-88)