

Θ. Rolle

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-2)\ln(x+1)$. Να αποδείξετε ότι :
 - α. Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle για την f στο διάστημα $[0,2]$,
 - β. Η εξίσωση $e^x(x+1)^{x+1}=e^2$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,2)$.
2. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^x f(x)$, όπου f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(0)=f(\frac{3}{2})=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \frac{3}{2})$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -f(\xi)$.
3. Δίνεται η συνάρτηση $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b) . Να αποδείξετε ότι :
 - α. Για τη συνάρτηση $g(x)=e^{f(x)}(x-a)(x-b)$ εφαρμόζεται το Θ. Rolle στο $[a,b]$,
 - β. Υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{1}{a-\xi} + \frac{1}{b-\xi}$.
4. Αν η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ με $f(a)=f(b)$ και $f'(a)=f'(b)=0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο, ώστε $f'''(\xi)=0$.
5. Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν:
 - α. $f(a)=f(b)=f(\gamma)=0$ όπου $a < b < \gamma$,
 - β. Η f είναι συνεχής στο $[a,\gamma]$,
 - γ. Η f είναι δύο φορές τουλάχιστον παραγωγίσιμη στο (a,γ) ,
 τότε, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a,\gamma)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.
6. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)^2$.
 - α. Να βρείτε την f' ,
 - β. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών του πολυωνύμου:
 $g(x)=(x-2)(x-3)^2+(x-1)(x-3)^2+2(x-1)(x-2)(x-3)$.
7. Αν η εξίσωση $x^4+ax^3+3bx^2+cx+d=0$ έχει όλες τις ρίζες της πραγματικές και άνισες μεταξύ τους $(a,b,\gamma,\delta \in \mathbb{R})$, να αποδείξετε ότι $a^2 > 8b$.
8. Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα :
 $f(x^2y-6)+f(x^3-6)+2f(6xy-11x) \geq 1+4f(xy^2-6)f(6xy-11y)$ για κάθε $x,y \in \mathbb{R}$.
 - α. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-5)$, $f(2)$ και $f(21)$,
 - β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (-5,21)$ τέτοιο ώστε $f'(\gamma)=0$.
9. Έστω f συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,4]$. Αν $f(1)=1$, $f(2)>2$, $f(3)<3$ και $f(4)=4$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta \in (1,4)$ ώστε $f'(\theta)=0$.
10. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b) και $f(a)-f(b)=a^2-b^2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=2\xi$.
11. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $ae^{ax}-be^{bx}-e^a+e^b=0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.
12. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $4x^3+18x+\mu=21x^2$ δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικές ρίζες στο $(1,2)$.
13. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,2]$ παραγωγίσιμη στο $(1,2)$, $f(1)=3$ και $f(2)=6$, να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
14. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[1,2]$ παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ και ισχύει $f(1)=f(2)=0$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

Επιλ.ασκ: Ε. Κουκόγια

15. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (e, e^2) και συνεχής στα σημεία e, e^2 τέτοια ώστε $f(e^2)=2f(e)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (e, e^2)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)\ln \xi = f(\xi)$.
16. Έστω ότι η συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ ($0 < a < \beta$) είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Αν $(f(a))^\beta = (f(\beta))^a$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)\ln f(\xi) = \xi f'(\xi)$.
17. Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και τέτοια ώστε να είναι $f(0)=0$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = (1-\xi)f'(\xi)$.
18. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ και ισχύει $f(2)-f(1) = 3-\ln 2$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $\xi f'(\xi) = 2\xi^2 - 1$.
19. Αν κάθε μια από τις συναρτήσεις f, g είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) και είναι $f(a)g(\beta) = f(\beta)g(a)$, καθώς και $f(x)g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{g'(\xi)}{g(\xi)}$.
20. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{2\xi f(\xi)}{1-\xi^2}$.
21. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\frac{1}{a}, a]$, $a > 1$ και παραγωγίσιμη στο $(\frac{1}{a}, a)$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (\frac{1}{a}, a)$ τέτοιο ώστε $f'\left(\frac{1}{\xi}\right) = \xi^2 f'(\xi)$.
22. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1)=1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi > 0$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 2 - \frac{f(\xi)}{\xi}$.
23. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g ορισμένες και δυο φορές παραγωγίσιμες στο $[-a, a]$ με $f(a)=g(-a)$, $f(-a)=g(a)$ και $f(0)=g(0)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-a, a)$ ώστε $f''(\xi) = g''(-\xi)$.
24. Δίνονται οι $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $g: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις ώστε να ισχύει: $\ln(f(a)) - \ln(f(\beta)) = g(\beta) - g(a)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ ώστε $f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0$.
25. Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$ παραγωγίσιμες στο (a, β) με $f(a)=f(\beta)=0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) + f(x)g'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (a, β) .
26. Δίνονται $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ με $\frac{4}{5} + \frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{\kappa}{2} + \lambda = 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + \kappa x + \lambda = 0$ έχει μια ρίζα τουλάχιστον στο $(0, 1)$.
27. Έστω $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ με $8\alpha + 3\delta = 4\beta + 9\gamma$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $8(\alpha + \beta)x^3 - 9(\gamma + \delta)x^2 + 12(\alpha + \delta)x - 6(\beta + \gamma) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.
28. Δίνεται μια συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της δεν είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: 2x - y + 1 = 0$. Να δείξετε ότι η C_f και η ευθεία $y = 2x$ έχουν ένα το πολύ κοινό σημείο.
29. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^5 = 5x^3 - 20x + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ δεν μπορεί να έχει περισσότερες από μία ρίζες.

30. Δίνεται συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$2g(x) + 4xg'(x) + x^2g''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g(0) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει το πολύ μια λύση στο $\mathbb{R}^*$.

31. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $ax = \sin x$, $a > 1$ έχει το πολύ μια λύση πραγματική.

32. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^{1992} = 1992x - \ln(a^2 + 1)$, $a \in \mathbb{R}$, έχει το πολύ δύο ρίζες στο $(0, 1993)$.

33. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 4x + \lambda = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $(2, 3)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

34. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^4 + 2x^3 + 3x^2 - \lambda x + \mu = 0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

35. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x^3 - 3x^2 - 12x + 6\lambda = 0$, με $-\frac{7}{6} < \lambda < \frac{20}{6}$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο $(-1, 2)$.

36. Δίνεται η συνάρτηση f με $xf'(x) - x \neq -1$ για κάθε $x > 0$. Αν $2 < 2f(x) < 3$ για κάθε $x \in [1, e]$, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi - \ln \xi$.

37. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν $x^2f''(x) \neq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(2) - f(1) = \ln 2 - 1$. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f' και g' , όπου $g(x) = \ln x - x$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο με τετμημένη στο $(1, 2)$.

38. Έστω μια συνάρτηση f , δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[1, 2]$ με $f(2) = 2f(1)$ και $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (1, 2)$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = xf'(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1, 2)$.

39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$, έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.