

Καθηγήτρια: Ε. Κουκόγια

Εμβαδόν επίπεδου χωρίου

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - 3$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται:

- α. από τη C_f , τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=2$,
- β. από τη C_f και τον άξονα $x'x$,
- γ. από τη C_f τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=3$.

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3x^2 - 12$, $x \in \mathbb{R}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=3$.

3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$ και τον άξονα $x'x$.

4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x\sqrt{x+1}$, $x > -1$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=3$.

5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \ln^2 x$, $x > 0$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=e$.

6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + x$ και $g(x) = 3 - x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που σχηματίζεται :

- α. από τις C_f και C_g και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$, $x=2$,
- β. από τις C_f και C_g .

7. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2 + 2x$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

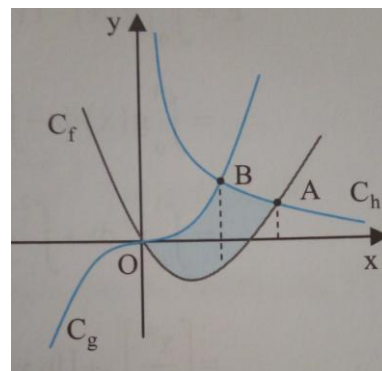
9. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=e^x$, τον άξονα $x'x$, την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1,e)$ και την ευθεία $x = -1$.

10. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = x^2 - \frac{7}{4}x, \quad g(x) = x^3 \text{ και}$$

$$h(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0. \text{ Να υπολογίσετε}$$

το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.



12. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

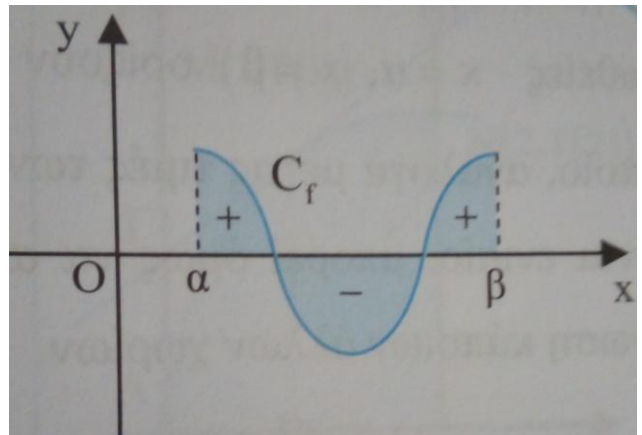
i) Να βρείτε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

ii) Να αποδείξετε ότι η C_f έχει δύο οριζόντιες ασύμπτωτες.

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την ασύμπτωτή της στο $+\infty$, την εφαπτομένη της στο σημείο καμπής της και την ευθεία $x = \ln 9$.

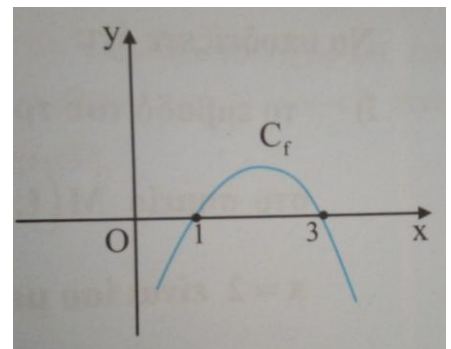
13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax$, $x \in \mathbb{R}$, όπου a σταθερός πραγματικός αριθμός. Αν το E_1 των εμβαδών που βρίσκονται πάνω από τον $x'x$ και περικλείονται από τη C_f και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 2$, είναι ίσο με το E_2 των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$ και περικλείονται από τη C_f και τις ευθείες

$x = 0$ και $x = 2$, να βρείτε την τιμή του a .



14. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = -x^2 + 4x - 3$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α, β με $\alpha < \beta$ για τις οποίες η τιμή του ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ γίνεται μέγιστη.

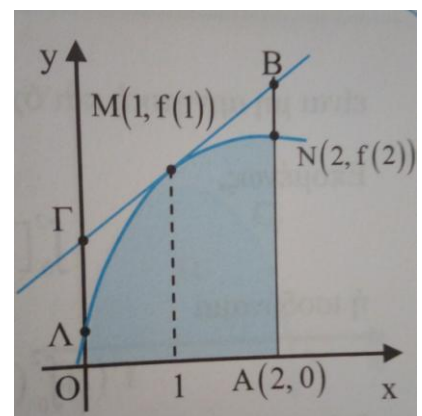


15. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, κοίλη και τέτοια ώστε

$f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 2]$.

Να αποδείξετε ότι:

- i) Το εμβαδόν του τραπεζίου που ορίζεται από την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 2$, είναι ίσο με $2f(1)$.
- ii) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx < 2f(1)$.



16. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = -3x^2 + 6x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = (6 - 3a)x$, $a \in (0, 2)$.

i) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζουν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και ο άξονας $x'x$.

ii) Να βρείτε την τιμή του a για την οποία η ευθεία (ε) χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

17. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε $f(1) = 0$ και $f'(x) = e^{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

18. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε $f^3(x) + 2f(x) = 3x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε το εμβαδόν $E(a)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -a$ και $x = a$ με $a > 0$.

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{a \rightarrow +\infty} E(a)$.