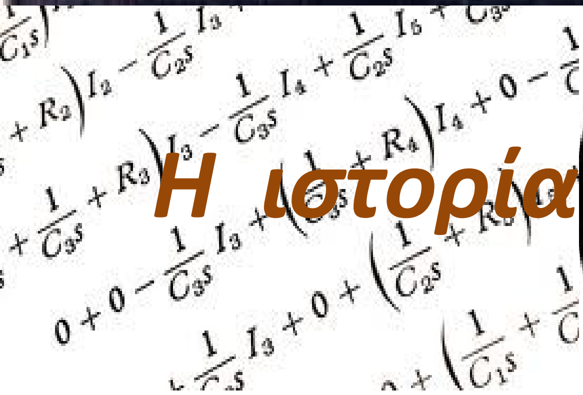
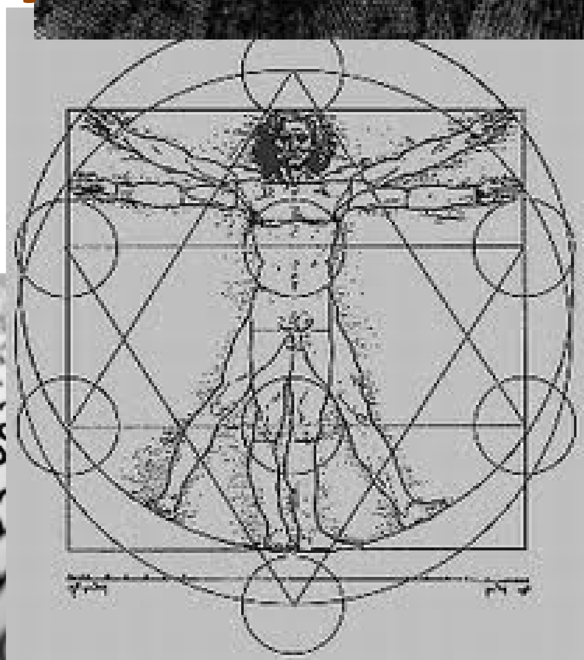
1ο Λύκειο Γαλατσίου

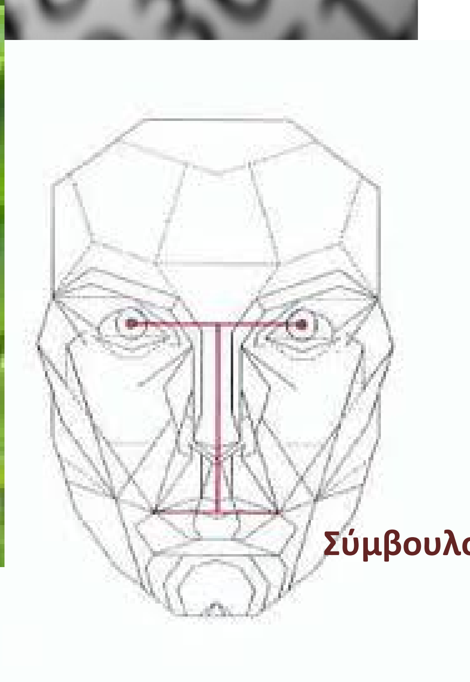
Ερευνητική εργασία



Η ιστορία των αριθμών

Α΄ Λυκείου





Σύμβουλος καθηγήτρια :Ε. Κουκόγια
Μαθηματικός

Σχολ. Έτος: 2011-2012

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι αριθμοί και η μέτρηση είναι από τα πρώτα πράγματα που μαθαίνουμε , μαζί με τις πρώτες λέξεις που συλλαβίζουμε. Όλοι έχουμε στο μυαλό μας την εικόνα κάποιου μωρού , να δείχνει με τα δαχτυλάκια του «πόσα παιδάκια έχει η μαμά».

Ποια όμως ήταν η ανάγκη δημιουργίας των αριθμών; Γιατί χρειάστηκε να μετρούν οι άνθρωποι; Ποιοι ήταν οι πρώτοι αριθμοί , τι μορφή είχαν, ποιοι τους επινόησαν;

Σε ποιους οφείλουμε το σημερινό σύστημα αρίθμησης. Υπάρχουν και άλλα τέτοια συστήματα , ξέρουμε πού χρησιμοποιούνται;

Ο ανθρώπινος νους εφηύρε ή ανακάλυψε τους αριθμούς;

Οι αριθμοί στη φύση. Υπάρχουν μέσα στη φύση ; Ποιοι είναι αυτοί.

Είναι μερικές από τις ερωτήσεις που δημιουργούνται στο μυαλό μας όταν μιλάμε για αριθμούς και που αυτή η εργασία θα προσπαθήσει να τις απαντήσει.

Μέσα από την ομαδική προσπάθεια και τη συνεργασία μεταξύ των μαθητών, θα προσπαθήσουμε να αποκαλύψουμε τα μυστικά των αριθμών.

Να ερευνήσουμε , να μάθουμε την ιστορία τους. Τους λαούς και τα πρόσωπα που έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην διαμόρφωση και στην εξέλιξή τους.

Να μάθουμε την αναγκαιότητα της ύπαρξής τους, τη χρησιμότητά τους.

Βιβλία και διαδύκτιο θα είναι οι βασικές πηγές της έρευνας αυτής.

Μέσα από τη συζήτηση και ανταλλαγή πληροφοριών και γνώσεων , θα συγκεντρώσουμε το απαραίτητο υλικό.

Οι ερωτήσεις που γεννιούνται στο μυαλό μας σχετικά με τους αριθμούς , θα είναι και ο οδηγός στην έρευνά μας.

Θα ανατρέξουμε στο μακρινό παρελθόν , για να φτάσουμε μέχρι τις μέρες μας.

Ελπίζουμε το ταξίδι στον κόσμο των αριθμών να είναι ευχάριστο.

Οι μαθητές: Αγγελόπουλος Μάριος-Θωμά Αθανασία-Καραμέρης Δημήτριος-Κάτσενου Μαρία-Κατσουρός Φλώριος-Κέφος Ιωάννης-Κοράκη Κων/να-Λιάρου Ελένη-Μουτσογκλάβα Ειρηναίας-Μπισμπίκης Αλέξανδρος-Ξηρογιάννη Ισμήνη-Παγώνης Ευάγγελος-Ρίζος Αναστάσιος-Σκούμας Χρήστος-Τόσκα Τζούλια-Τσιάνας Γεώργιος-Φραγκουλοπούλου Μαρία-Ψιμούλης Μιχαήλ

Περίληψη

- **Πώς προέκυψαν οι αριθμοί.**

Οι άνθρωποι από πολύ νωρίς ένοιωσαν την ανάγκη να μετρήσουν τον πληθυσμό της κοινότητας, του χωριού , της πόλης τους. Να μετρήσουν τη γη τους, τα προϊόντα, τα εμπορεύματά τους.
Γι' αυτό χρησιμοποίησαν κατ' αρχήν τα δάχτυλα των χεριών τους (αργότερα τα ψηφία ονομάστηκαν digitals από το λατινικό digiti= δάχτυλο).Δεν είναι τυχαίο ότι τα ψηφία του δεκαδικού μας συστήματος είναι 10, όσα και τα δάχτυλά μας.

Αργότερα οι Σουμέριοι**,** όταν ήθελαν να στείλουν ένα εμπόρευμα, έπρεπε να συνοδεύεται από ένα <<έγγραφο>> το οποίο αποτελούνταν **από ένα σύνολο κουπονιών που προσδιόριζαν τον αριθμό και το είδος των αγαθών που μεταφέρονταν.** Υπήρχε όμως ο κίνδυνος κλοπής αγαθών και των αντίστοιχων κουπονιών.
Επομένως επινόησαν μια τεχνική για να φρουρούν τα κουπόνια: **τα κάλυπταν με πηλό και μετά τα έψηναν, με αποτέλεσμα τη δημιουργία μιας σκληρής μπάλας από πηλό που στο εσωτερικό της βρίσκονταν τα κουπόνια**. Ο αγοραστής όταν παραλάμβανε το φορτίο έσπαγε τον πηλό για να επαληθεύσει ότι ο αριθμός των κουπονιών αντιστοιχούσε στα αγαθά.

Η μέθοδος αυτή εξελίχθηκε από τους Σουμέριους σε **χάραγμα γραμμών σε πήλινα πλακίδια,** που αναπαριστούσε τον αριθμό των αντικειμένων ανεξάρτητα από το είδος τους. Έτσι διαχωρίστηκαν οι έννοιες των αριθμών από τις έννοιες των μετρούμενων αντικειμένων και οι αριθμοί πλέον απέκτησαν αφηρημένη σημασία.
Η εφεύρεση των αφηρημένων αριθμητικών ψηφίων ήταν η αρχή των μαθηματικών και η αρχή της γραφής!

- **Οι πρώτοι γνωστοί αριθμοί.**

Από το ξεκίνημα της ονομαστικής αρίθμησης, όταν οι αριθμοί έγιναν αφηρημένοι, οι μόνοι αριθμοί που χρησιμοποιούνταν ήταν **οι φυσικοί, δηλαδή οι αριθμοί 0,1,2,3,4…….**
Περί το **2400 π.Χ** οι Σουμέριοι χρησιμοποιούσαν τα κλάσματα 1/2,1/3 και 5/6.Αυτή είναι η παλαιότερη γνωστή αναγνώριση του γεγονότος ότι τα κλάσματα είναι αριθμοί.
Πρωτοεμφανίστηκε δηλαδή ένα νέο είδος αριθμών!

- **Πότε εφαρμόζεται ένα καθοριζόμενο, από τη θέση του αριθμού, σύστημα αρίθμησης.**

Όταν λέμε καθοριζόμενο από τη θέση σύστημα αρίθμησης, εννοούμε ότι κάθε αριθμός έχει συγκεκριμένη αξία ανάλογα με τη θέση που κατέχει.
Για παράδειγμα ο αριθμός 743 σε ένα μη καθοριζόμενο από τη θέση σύστημα είναι ο αριθμός 7+4+3=14.
Στο δικό μας δεκαδικό σύστημα είναι ο αριθμός:
$7\cdot100+4\cdot10+3=700+40+3$, δηλ. επτακόσια σαράντα τρία.
Οι Βαβυλώνιοι έφτιαξαν ένα καθοριζόμενο από τη θέση σύστημα αρίθμησης , που το έκανε να ξεχωρίζει ανάμεσα στα άλλα των λαών της αρχαιότητας.

- **Πότε εμφανίζεται το μηδέν.**

Το μηδέν στην αρίθμηση δεν υπήρχε σα σύμβολο πάντα.
Όμως οι άνθρωποι έπρεπε κάπως να συμβολίσουν το κενό.
Οι πρώτοι που χρησιμοποίησαν το μηδέν ήταν οι Μάγια, τέσσερις αιώνες πριν αναπτυχθεί το δικό μας σύγχρονο σύστημα, και μια ολόκληρη χιλιετία πριν το ινδοαραβικό σύστημα υιοθετηθεί από την Ευρώπη.
Το μηδέν, όμως, εμφανίζεται για πρώτη φορά σε γραπτό κείμενο των Ινδών το 876 μ.Χ .

- **Ποιοι χρησιμοποίησαν αρχικά αρνητικούς αριθμούς**

Οι Ινδοί αποδέχτηκαν και τους αρνητικούς αριθμούς καθώς επίσης και τις πράξεις ανάμεσα σε θετικούς και αρνητικούς αριθμούς.

Οι Κινέζοι ανεξάρτητα, έδωσαν υλική υπόσταση στους αρνητικούς αριθμούς, όταν από τον 12ο αιώνα χρησιμοποιούσαν **κόκκινα ραβδιά** για τις αρνητικές ποσότητες και **μαύρα ραβδιά** για τις θετικές ,το ακριβές ανάλογο των καταθέσεων και των χρεών στο τραπεζικό μας σύστημα.

Όσο αφορά τον συμβολισμό των πρόσημων πλην (-) και συν (+) τον οφείλουμε σε εμπόρους. Χρησιμοποιήθηκαν τον 15ο αιώνα στην Γερμανία σε αποθήκες με εμπορεύματα , όταν τα κοντέινερ της εποχής είχαν περισσότερο ή λιγότερο φορτίο από το προβλεπόμενο.

- **Σε ποιους οφείλουμε το σημερινό σύστημα αρίθμησης.**

Οι πρώτοι που χρησιμοποίησαν τους σημερινούς αριθμούς ήταν **οι Ινδοί** το $5^{ο}$ αιώνα μ.Χ. Το δεκαδικό τους σύστημα υιοθετήθηκε τον $8^{ο}$ αιώνα από τους **Άραβες** και μέσω αυτών μεταφέρθηκε στην Ευρώπη τον $12^{ο}$ αιώνα.

Το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης που παράγεται από τους αριθμούς:0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, ονομάζεται **ινδοευρωπαϊκό σύστημα αρίθμησης**.

- **Η σχολή των Πυθαγορείων και οι άρρητοι αριθμοί.**

Ο Πυθαγόρας , ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς της αρχαιότητας είχε ιδρύσει μια μαθηματική-φιλοσοφική-θρησκευτική σχολή, όπου η βασική της αρχή ήταν: **ΤΑ ΠΑΝΤΑ ΕΙΝΑΙ ΑΡΙΘΜΟΙ.**

Βασιζόταν στην ύπαρξη των τότε γνωστών αριθμών, των ΡΗΤΩΝ (οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν σε μορφή κλάσματος).

Όταν εφάρμοσαν το Πυθαγόρειο θεώρημα σε ένα τετράγωνο με πλευρά ίση με 1, ανακάλυψαν ότι δεν μπορούν να βρουν αριθμό, από τους γνωστούς μέχρι τότε, που όταν πολλαπλασιασθεί με τον εαυτό του να ισούται με 2. Έτσι προέκυψαν οι καινούργιοι αριθμοί ,**οι άρρητοι**.

- **Η Χρυσή τομή: Τι είναι και με τι σχετίζεται.**

Είναι ένας σταθερός λόγος (πηλίκο), που προκύπτει από την ισότητα δύο λόγων. Δηλαδή όταν ο λόγος ολόκληρου του ευθυγράμμου τμήματος προς το μεγαλύτερο τμήμα, ισούται με το λόγο του μεγαλύτερου τμήματος προς το μικρότερο. **Αυτός** ο λόγος είναι ίσος με **1,62** και συμβολίζεται με το **γράμμα φ**, από το αρχικό του ονόματος του γλύπτη Φειδία.

Χαρακτηρίζει τη μορφή φυσικών σχηματισμών σε όλες τις κλίμακες των μεγεθών, όπως είναι τα όστρακα, οι κυκλώνες και οι γαλαξίες.

- **Ακολουθία Fibonacci και ο αριθμός φ.**

Σύμφωνα με την ακολουθία του, κάθε αριθμός, εκτός από τους δυο πρώτους , είναι ίσος με το άθροισμα τον 2 προηγούμενων: Δηλαδή

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,82,144.....

Οι αριθμοί Fibonacci προκύπτουν επίσης **στις σπειροειδείς δομές που αναπτύσσουν τα φυτά για να τακτοποιήσουν τους σπόρους τους, τα πέταλά τους, όπως στα τριαντάφυλλα , στη μαργαρίτα ,τα κουκουνάρια.**

Επίσης το πηλίκο δύο διαδοχικών αριθμών Fibonacci, από τον πέμπτο όρο και μετά , πλησιάζει στον αριθμό φ.

- **Ο αριθμός π.**

Η μαθηματική σταθερά π(3,14) είναι ο λόγος του μήκους της περιφέρειας ενός κύκλου προς τη διάμετρό του και ο οποίος χρησιμοποιείται πολύ συχνά στα μαθηματικά, τη φυσική και τη μηχανολογία. Ο συμβολισμός προέρχεται από το αρχικό γράμμα πι της λέξης «περιφέρεια» και έχει καθιερωθεί διεθνώς. Το π είναι γνωστό επίσης ως σταθερά του Αρχιμήδη .

Έχει παρατηρηθεί ότι το μήκος κάθε ποταμού, μαζί με τους μαιάνδρους που δημιουργεί, όταν το διαιρέσουμε με το μήκος της απόστασης της πηγής από την εκβολή του, είναι περίπου **ΙΣΟ ΜΕ ΤΟΝ ΑΡΙΘΜΟ π!!!**

- **Ο αριθμός e**

Ο Ελβετός μαθηματικός Λέοναρντ ΄Οιλερ ,όρισε τη χρήση του γράμματος <<e>> ,που συμβολίζει μια άλλη θεμελιώδη σχέση των μαθηματικών:

e= lim $(1+1/\nu)^{\nu}$

Δηλαδή **το <e> είναι το όριο** που παίρνουμε, όταν αφήνουμε το <ν> να γίνεται όλο και μεγαλύτερο στην ακολουθία $(1+1/\nu)^{\nu}$, αρχίζοντας από το 1 και παίρνοντας την τιμή κάθε διαδοχικού επόμενου φυσικού αριθμού.

Και είναι: **e=2,7182…….**

- **Φανταστικοί αριθμοί.**

Τον 16^{o} αιώνα οι ιταλοί μαθηματικοί Ferro-Tartaglia αντικαθιστώντας στον τύπο επίλυσης μιας τριτοβάθμιας εξίσωσης, μια λύση της που είχαν βρει, προέκυψε **ρίζα ΑΡΝΗΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ!** (Γνωρίζουμε ότι στο σύνολο των πραγματικών δεν υπάρχουν ρίζες αρνητικών αριθμών).

Έτσι η ρίζα του αριθμού -1 ονομάστηκε **i** από το αρχικό γράμμα της λέξης imaginaire (φανταστικός).

Δηλαδή $\sqrt{-1}=i$

Και με αυτό τον τρόπο ορίστηκαν οι ρίζες **και** των αρνητικών αριθμών. Δημιουργήθηκε δηλαδή ένα καινούργιο σύνολο, το σύνολο των **ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.**

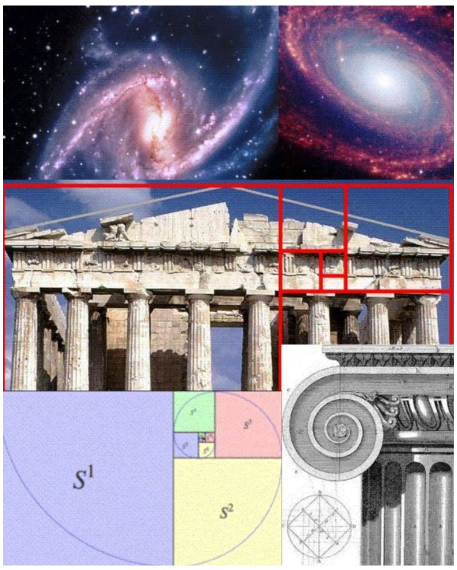
Συνδυασμός πραγματικών και φανταστικών αριθμών «γέννησε» το σύνολο των **ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.**

- **Μια πολύ σπουδαία σχέση.**

Κλείνοντας ,η σχέση που συνδέει τους πέντε σημαντικότερους αριθμούς των μαθηματικών είναι:

1, 0, π, e και i σε μια σχέση!!!!! $e^{i\pi}+1=0$

1η Θεματική ενότητα: Ίνκας-Μάγια -Σουμέριοι-Βαβυλώνιοι-Αιγύπτιοι



Οι μαθητές:

- **Κάτσενου Μαρία-Δέσποινα**
- **Λιάρου Ελένη**

- **Φραγκουλοπούλου Μαρία- Δήμητρα**
- **Θωμά Αθανασία**
- **Τόσκα Τζούλια**

Σουμέριοι

Η δημιουργία της γραφής ήταν στενά συνδεδεμένη με την ανάγκη απογραφής των καταμετρήσεων και με την χρήση των αριθμών. Σύντομα εμφανίστηκαν σύμβολα στη θέση των κανονικών ονομάτων (για να ταυτοποιήσουν τον ιδιοκτήτη των αγαθών) . Οι παλαιότεροι πήλινοι δίσκοι, που χρονολογούνται πριν από το 3.100 π. Χ. και προέρχονται από τις πόλεις της Σουμερίας, δείχνουν αποτυπώματα αριθμητικών μονάδων που απεικονίζουν διάφορους αριθμούς και επιπλέον σχέδια ή πικτογράμματα αγαθών, όπως κοπάδια ή μόδια σπόρων.

Τα κείμενα σφηνοειδούς γραφής της τρίτης χιλιετηρίδας δεν αφήνουν αμφιβολία για το γεγονός ότι οι Σουμέριοι είχαν αναπτύξει ένα περίπλοκο εξηκονταδικό σύστημα αρίθμησης. Δεν υπάρχει επίσης αμφιβολία ότι η αριθμητική τους βασιζόταν στην **αφηρημένη αρίθμηση**.

Η Ντενίζ Σμαντ-Μπέσερατ αποδίδει και αυτή την εξέλιξη από τους συγκεκριμένους αριθμούς στους αφηρημένους, που έγινε γύρω στο 3100 π. Χ. , σε μια συγκεκριμένη πόλη, την Ουρούκ, που βρισκόταν βορειοδυτικά της συμβολής των ποταμών Τίγρη και Ευφράτη, στο νότιο Ιράκ.

Η εμφάνιση του αριθμητικού συστήματος των Σουμερίων, που άρχισε με την χρήση πήλινων μονάδων μέτρησης και τελείωσε με ένα πολύπλοκο σύστημα γραφής για τους αφηρημένους αριθμούς, **σηματοδοτούν τις δύο από τις τρεις κινητήριες δυνάμεις που προώθησαν τα μαθηματικά.** Πρώτα είχαμε την γενίκευση, δηλαδή την απόδοση αφηρημένης έννοιας στους αριθμούς. Για παράδειγμα, οι αριθμοί δεν αναφέρονταν πια σε συγκεκριμένα φυσικά αντικείμενα αλλά άρχισαν να έχουν, από μόνοι τους, δική τους ανεξάρτητη οντότητα. Για να απεικονιστεί οποιοδήποτε σύνολο από δύο αντικείμενα απαιτούνταν ένας μόνο αριθμός ,το δύο, χωρίς να χρειάζονται πλέον διαφορετικά ονόματα για διαφορετικά σύνολα που περιείχαν δύο στοιχεία . η μεταβολή δεν φαίνεται να συνέβη ξαφνικά - μάλλον διήρκεσε πολλά χρόνια. Μολονότι αυτό μπορεί να φαίνεται απλό επίτευγμα, παρά ταύτα αποτελεί λαμπρό άλμα πνευματικής δεξιοτεχνίας.

Η δεύτερη μεγάλη κινητήρια δύναμη που έδωσε ώθηση στα μαθηματικά ήταν η ανάπτυξη ενός συμβολισμού που μας επιτρέπει να καταγράφουμε και να χειριζόμαστε τους αριθμούς. Ξεκίνησε και αυτό από τους Σουμέριους , όταν άρχισαν να αποτυπώνουν το σχήμα των μονάδων τους σε μαλακές πήλινες πινακίδες πριν τις ψήσουν. Ως εκ τούτου, οι αριθμοί μπορούσαν, πλέον, να απεικονιστούν με γραπτά σύμβολα. Στην αρχή, η διαδικασία αυτή ήταν ένας αμφιμονοσήμαντος συγκεκριμένος συμβολισμός, αλλά τελικά προέκυψαν σύμβολα που αντιπροσώπευαν ομάδες αντικειμένων.

Το σύστημα αρίθμησης των Σουμερίων χρησιμοποιούσε συνδυασμό συμβόλων για το 10 και το 60, και είναι γνωστό ως εξηκονταδικό. Από το 2400 π. Χ. είχαν αρχίσει να χρησιμοποιούν κλάσματα. Με το εξηκονταδικό τους σύστημα μπορούσαν να γράφουν πολύ μεγάλους αλλά και πολύ μικρούς αριθμούς . **Και ενώ οι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν μόνο τα μοναδιαία κλάσματα , οι Σουμέριοι χρησιμοποιούσαν κλάσματα της μορφής n/60 .** Το πλεονέκτημα του συστήματος των Σουμερίων ήταν ότι τα κλάσματα μπορούσαν να γραφτούν και να χρησιμοποιηθούν εύκολα. Το μειονέκτημα ήταν ότι ο αναγνώστης έπρεπε να καταλαβαίνει από το κείμενο αν επρόκειτο για ακέραιους αριθμούς ή κλάσματα .

Δεν είναι ξεκάθαρο πότε οι άνθρωποι άρχισαν να εξετάζουν την έννοια του απείρου. Σίγουρα την εξέταζαν πριν από τους Έλληνες, αφού οι Σουμέριοι είχαν εξοικείωση με την έννοια. Στο μύθο του Γκιλγκαμές, που έφτασε ως εμάς σε σφηνοειδής πίνακες που χρονολογούνται από το 2000 π.Χ.

Θεωρούμε ότι η λέξη <<αιώνιο>> πρέπει να σημαίνει <<συνεχιζόμενο χωρίς τέλος>> ή άπειρο στο χρόνο. Στην γλώσσα των Σουμερίων, η λέξη <<ιμίν>> σήμαινε τον αριθμό επτά αλλά πήρε, επίσης και την έννοια του μη αριθμήσιμου.

Η ανάγκη δημιουργίας των αριθμών από τους Σουμέριους ήταν για εμπορικούς λόγους. Όταν ήθελαν να στείλουν ένα εμπόρευμα, το φορτίο έπρεπε να συνοδεύεται από ένα <<έγγραφο>> το οποίο αποτελούνταν από ένα σύνολο κουπονιών που προσδιόριζαν τον αριθμό και το είδος των αγαθών που μεταφέρονταν. Υπήρχε όμως ο κίνδυνος κλοπής αγαθών και των αντίστοιχων κουπονιών. Επομένως επινόησαν μια τεχνική για να φρουρούν τα κουπόνια: τα κάλυπταν με πηλό και μετά τα έψηναν, με αποτέλεσμα τη δημιουργία μιας σκληρής μπάλας από πηλό που στο εσωτερικό της βρίσκονταν τα κουπόνια. Ο αγοραστής όταν παραλάμβανε το φορτίο έσπαγε τον πηλό για να επαληθεύσει ότι ο αριθμός των κουπονιών αντιστοιχούσε στα αγαθά.

Το σύστημα αυτό λειτουργούσε καλά, μέχρι που οι Σουμέριοι κατάλαβαν ότι τα κουπόνια που περιέχονταν ήταν περιττά. Κάθε κουπόνι όμως , εξακολουθούσε να αναπαριστά ένα συγκεκριμένο αντικείμενο, γιατί οι αριθμοί δεν είχαν διαχωριστεί από τα μετρούμενα αντικείμενα. Αυτό το είδος αρίθμησης ονομάζεται *συγκεκριμένη αρίθμηση* από την Ντενίζ Σμαντ-Μπεσερά και χρησιμοποιούνταν σε φακέλους και πλακίδια μεταξύ 3500-3100 π.Χ. Τέλος γύρω στο 3100 π.Χ. ,οι Σουμέριοι διαχώρισαν τα αποτυπώματα που αναπαριστούσαν τον αριθμό των αντικειμένων από τα ίδια αντικείμενα.

Όταν διαχωρίστηκαν οι έννοιες των αριθμών από τις έννοιες των μετρούμενων αντικειμένων, τα πικτογράμματα δεν δήλωναν πλέον αποκλειστικά τον αριθμό των αγαθών με μία αντιστοιχία ένα προς ένα. Με την εφεύρεση των αριθμητικών ψηφίων, η πικτογραφία δεν περιοριζόταν πλέον στους λογαριασμούς, αλλά επεκτάθηκε και σε άλλες περιοχές των ανθρώπινων επιδιώξεων. Η εφεύρεση των αφηρημένων αριθμητικών ψηφίων ήταν η αρχή των μαθηματικών και, επίσης, η αρχή της γραφής.

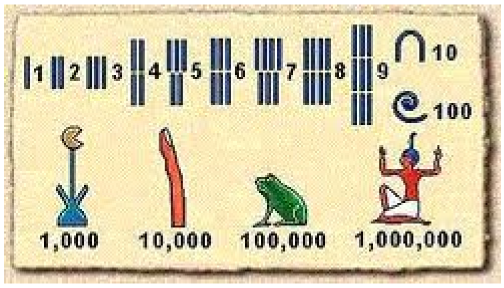
Η ανάγκη καταγραφής των αριθμών ήταν αυτή που έδωσε αρχικά την ώθηση για την ανάπτυξη της γραφής.

Λίγα είναι γνωστά για τα μαθηματικά των Σουμέριων αλλά από τα πλακίδια που σώζονται είναι φανερό ότι γνώριζαν τις τέσσερις βασικές πράξεις της αριθμητικής: την πρόσθεση, την αφαίρεση, τον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση. Επειδή η κοινωνία των Σουμερίων ήταν πολύπλοκη απαιτούσε επιδεξιότητα στον χειρισμό των φυσικών αριθμών. Από τα πρώτα κουπόνια που αντιπροσώπευαν αριθμούς καταλαβαίνουμε ότι το σύστημα αρίθμησης των Σουμέριων ήταν πολύπλοκο σε σχέση με το δυαδικό ή το εξηκονταδικό. Από τα πλακίδια που έχουν σωθεί, λοιπόν, γνωρίζουμε ότι οι Σουμέριοι μπορούσαν να δουλεύουν τόσο με μεγάλους ή μικρούς αριθμούς, όσο και με κλάσματα.

Αιγύπτιοι

Οι Αιγύπτιοι ανέπτυξαν δύο είδη συμβόλων για τους αριθμούς τους. Το ένα ήταν η επίσημη

γραπτή γλώσσα των ιερογλυφικών που χρησιμοποιούνταν στα μνημεία και στα δημόσια κτίρια, ενώ η άλλη ήταν η ιερατική γραπτή γλώσσα που χρησιμοποιούνταν στις καθημερινές εμπορικές συναλλαγές. Οι πρώτοι εννέα αριθμοί στα ιερογλυφικά εμφανίζουν το χαρακτηριστικό της **αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης.** Για το 10 εισάγεται νέο σύμβολο και στη συνέχεια νέα σύμβολα εισάγονται μέχρι και το ένα εκατομμύριο. Από τα κατασκευαστικά τους επιτεύγματα, συμπεριλαμβανομένων και των πυραμίδων και των ναών λατρείας , μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι Αιγύπτιοι ανέπτυξαν τα μαθηματικά τους στη διάρκεια του πρώτου μισού της τρίτης χιλιετίας προ Χριστού.



Το αρχαιότερο μαθηματικό κείμενο είναι ο λεγόμενος **Πάπυρος της Μόσχας**, που χρονολογείται περίπου στα 1890 π. Χ. Το ότι οι Αιγύπτιοι εκτελούσαν πολύπλοκες μαθηματικές πράξεις , είναι βέβαιο από την εξέταση των πλευρών της Μεγάλης Πυραμίδας.

Οι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν κλάσματα, αλλά μόνο κλάσματα μονάδας , όπου ο αριθμητής είναι το 1 και ο παρονομαστής μπορεί να είναι οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος αριθμός. Για παράδειγμα , για να εκφράσουν οι Αιγύπτιοι το κλάσμα 3/7 το έγραφαν σαν άθροισμα των μοναδιαίων κλασμάτων 1/3 + 1/11 + 1/231 . Η μεγάλη δυσκολία αυτού του συστήματος είναι εμφανής , αφού μόνο για την πρόσθεση και την αφαίρεση απλών κλασμάτων πρέπει να κάνουμε δύσκολους υπολογισμούς . Για να διευκολύνουν τη δουλειά τους , οι Αιγύπτιοι όταν έπρεπε να κάνουν κλασματικούς υπολογισμούς χρησιμοποιούσαν εκτενείς πίνακες μοναδιαίων κλασμάτων.

Οι Αιγύπτιοι επίσης υπολόγιζαν εμβαδά κανονικών σχημάτων , όπως τριγώνων και τραπεζίων, καθώς και τους όγκους κυλίνδρων και πυραμίδων.

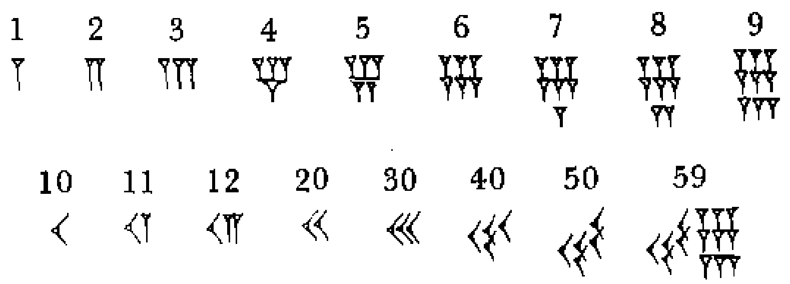
Τόσο οι Αιγύπτιοι όσο και οι Σουμέριοι είχαν επεκτείνει το αριθμητικό σύστημα ώστε να περιλαμβάνει κλάσματα . Αυτά τα κλάσματα , όμως , αντιπροσώπευαν μέρη αντικειμένων ή τμήματα της μονάδας μήκους .
Οι Αιγύπτιοι γνώριζαν τους θετικούς ακέραιους και τα θετικά μοναδιαία κλάσματα .

Τόσο οι Αιγύπτιοι όσο και οι Βαβυλώνιοι είχαν αναπτύξει κάποιες διαδικασίες για να πραγματοποιούν ειδικούς υπολογισμούς μέτρησης εμβαδών, διανομής προϊόντων κλπ. Στα γραπτά κείμενα που έχουν διασωθεί βλέπουμε την ύπαρξη τέτοιων μεθόδων. Οι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν την μέθοδο της αντικατάστασης για να επαληθεύσουν το αποτέλεσμα ενός υπολογισμού. Μόλις ολοκληρωνόταν το αποτέλεσμα του υπολογισμού ενός προβλήματος, ο μαθηματικός αντικαθιστούσε την απάντηση στο αρχικό πρόβλημα και εξέταζε αν έβγαινε νόημα.

Αυτό το είδος αρίθμησης ονομάζεται *συγκεκριμένη αρίθμηση* από την Ντενίζ Σμαντ-Μπεσερά και χρησιμοποιούνταν σε φακέλους και πλακίδια μεταξύ 3500-3100π. Χ ., οι Σουμέριοι διαχώρισαν τα αποτυπώματα που αναπαριστούσαν τον αριθμό των αντικειμένων από τα ίδια τα αντικείμενα.

Βαβυλώνιοι

Οι Βαβυλώνιοι υιοθέτησαν το σύστημα γραφής και τα μαθηματικά των Σουμερίων και, στη συνέχεια, ανέπτυξαν περαιτέρω και τα δύο. Οι Βαβυλώνιοι μπορούσαν να προσδιορίσουν τις θετικές ρίζες δευτεροβάθμιων εξισώσεων . Οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις περιλαμβάνουν τουλάχιστον έναν όρο στον οποίο η μεταβλητή είναι υψωμένη στο τετράγωνο. Μπορούσαν πιθανών να λύσουν και ορισμένες τριτοβάθμιες εξισώσεις , αλλά δεν είχαν προσδιορίσει γενική λύση για τέτοιες εξισώσεις. Χρησιμοποιούσαν πίνακες για να βρουν αποτελέσματα ανατοκισμών και είχαν κάποια ιδέα για το Πυθαγόρειο Θεώρημα, που λέει ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο πλευρών ισούται με το τετράγωνο της υποτείνουσας. Έκαναν επίσης αρκετά καλές προσεγγίσεις για την τιμή του αριθμού ρίζα 2.



Το εξηκονταδικό σύστημα των Σουμερίων και των Βαβυλωνίων έφτασε μέχρι τις μέρες μας . **Εκείνοι διαίρεσαν την ημέρα σε 24 ώρες , την ώρα σε 60 λεπτά και το λεπτό σε 60 δευτερόλεπτα .** Από το 2000 π. Χ . χρησιμοποιούσαν **ημερολόγιο 360 ημερών** , διαιρεμένο σε **12 μήνες των 30 ημερών**. Επίσης , διαίρεσαν **τον κύκλο σε 360 μοίρες** , πιθανόν εξαιτίας των 360 ημερών του έτους τους .

Από ενδείξεις που προέρχονται τόσο από πήλινες πινακίδες των Βαβυλώνιων, όσο και από κυλινδρικούς παπύρους των Αιγυπτίων, προκύπτει ότι αυτές οι κοινωνίες χρησιμοποιούσαν τα μαθηματικά για να επιλύσουν προβλήματα του πραγματικού κόσμου, όπως η μέτρηση εμβαδών και όγκων για την κατασκευή κτιρίων ή ο υπολογισμός των ημερομηνιών για τη συγκρότηση των ημερολογίων . Όταν αναφέρονταν σε ευθείες , εννοούσαν συγκεκριμένες γραμμές που σχεδιάζονταν στο έδαφος . Όταν υπολόγιζαν τον όγκο ενός κυλίνδρου, επρόκειτο για έναν πραγματικό υπαρκτό κύλινδρο.

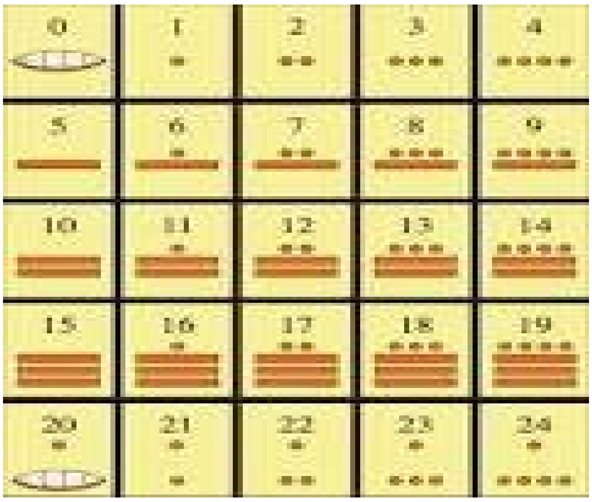
Οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν τους θετικούς ακέραιους , και κλάσματα της μορφής n/60, όπου **n** ακέραιος.

Οι Βαβυλώνιοι ήταν οι πρώτοι οι οποίοι εφάρμοσαν <u>καθοριζόμενο σύστημα αρίθμησης</u>!

Για παράδειγμα ο αριθμός 143 είναι ίσος με 1+4+3=8.Ενώ στο δεκαδικό σύστημα που είναι καθοριζόμενο από τη θέση σύστημα αρίθμησης , είναι ίσος με $1\cdot100+4\cdot10+3$, δηλ εκατόν σαράντα τρία.

Μάγια

Μέχρι σήμερα δεν υπάρχουν κείμενα των Μάγια πριν από την εισβολή των Ισπανών που να αναφέρονται άμεσα στα μαθηματικά τους. Επομένως, ό,τι καταλαβαίνουμε για τα μαθηματικά των Μάγια προέρχεται κυρίως από τους αριθμούς που υπάρχουν πάνω στα μνημεία που χρησίμευαν στην καταγραφή των ημερομηνιών σημαντικών γεγονότων. Δεν έχουμε κάποια καταγραφή των επακριβών σκέψεων τους σχετικά με τα μαθηματικά, ενώ αυτά που γνωρίζουμε για τα μαθηματικά τους αφορούν κυρίως στο ημερολόγιό τους.



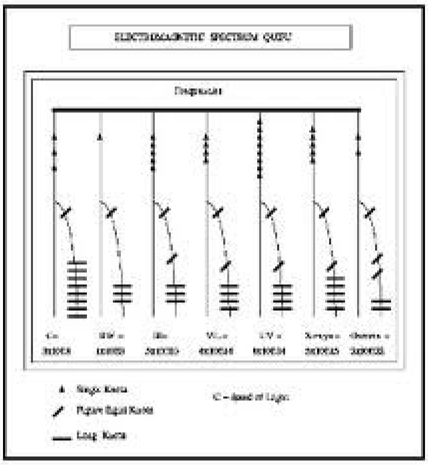
Οι παλαιότεροι αριθμοί των Μάγια εμφανίζονται πάνω σε μνημεία γύρω στο 400 μ.Χ. Το σύστημα αρίθμησης των Μάγια είχε ως βάση το 20, επρόκειτο δηλαδή για εικοσαδικό σύστημα και όχι για ένα δεκαδικό σύστημα, όπως το δικό μας. **Το σύστημά τους περιλάμβανε τόσο τιμές θέσης όσο και το μηδέν**. Οι αριθμοί τους γράφονταν κάθετα, με τα ψηφία με τις μικρότερες τιμές στο κάτω μέρος και τα μεγαλύτερα στο επάνω. Στη γλώσσα των Μάγια υπήρχαν ξεχωριστές αριθμητικές λέξεις για τους αριθμούς 1 έως το 10. Οι αριθμοί από το 11 έως το 19 μοιάζουν πολύ με τις αγγλικές προφορικές αριθμητικές λέξεις – οι λέξεις για τις μονάδες συνδυάζονται με τη λέξη για το 10. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι χρειάζονται μόνο τρία σύμβολα για να γράφουν τους αριθμούς τους: μία κουκίδα για τον αριθμό 1, μια μικρή λωρίδα για το 5 και ένα ωοειδές σχήμα για το 0. Οι γραπτοί αριθμοί από το 1 έως το 19 σχηματίζονταν από συνδυασμούς κουκίδων και λωρίδων.

Συνοψίζοντας οι Μάγια ανέπτυξαν ένα εκπληκτικό σύστημα αριθμών. Είχαν ένα καθοριζόμενο από τη θέση σύστημα που περιελάμβανε **το 0 τέσσερις αιώνες πριν αναπτυχθεί το δικό μας σύγχρονο σύστημα, και μια ολόκληρη χιλιετία πριν το ινδοαραβικό σύστημα υιοθετηθεί από την Ευρώπη.**

Ίνκας

Οι Ίνκας δεν είχαν γραπτή γλώσσα γι' αυτό έπρεπε να απομνημονεύουν μηνύματα και επίσημα έγγραφα. Για να διευκολύνονται σε αυτή την απομνημόνευση ανέπτυξαν ένα πολύπλοκο σύστημα κόμπων πάνω σε σκοινιά, που ονομάζονταν ***κίπου***, για να καταγράφουν αριθμούς καθώς και το είδος των μετρούμενων αντικειμένων .

Το ***κίπου*** κατασκευαζόταν από ένα σύνολο πλεγμένων σκοινιών , καθένα από τα οποία είχε μήκος περίπου σαράντα εκατοστά. Κάποια **κίπου** περιείχαν πάνω από εκατό διαφορετικά πλεγμένα σκοινιά, καθένα από τα οποία κατέγραφε έναν αριθμό. Συχνά, κάθε πλεγμένο σκοινί ήταν βαμμένο με διαφορετικό χρώμα για να προσδιορίζει το είδος του μετρούμενου αντικειμένου. Μερικές φορές ένα πλεγμένο σκοινί ενωνόταν με άλλα για να δείχνει συνολικά κάποιον υπολογισμό.



Το αριθμητικό σύστημα που χρησιμοποιούσαν οι Ίνκας είχε ως βάση το 10. Κάθε ψηφίο συμβολιζόταν από ένα συνδυασμό κόμπων και απείχε εξίσου από τα γειτονικά ψηφία. Το μηδέν υποδηλωνόταν από ένα κενό διάστημα στο σκοινί. Χρησιμοποιούνταν τρία είδη κόμπων: ο απλός κόμπος, ο διπλός κόμπος και ένας κυλιόμενος κόμπος που είχε από δύο έως εννέα θηλιές. Οι κόμποι δένονταν με φθίνουσα σειρά πάνω στο σκοινί. Επομένως, ο αριθμός 475 θα υποδηλωνόταν με 4 κόμπους στο πάνω μέρος του σκοινιού, ακολουθούμενος από μία ομάδα 7 κόμπων και, στη συνέχεια, θα υπήρχαν είτε 5 κόμποι είτε ένας κυλιόμενος κόμπος με 5 θηλιές.

Οι Ίνκας δε ζούσαν σε πόλεις, όπως οι Μάγια και οι Αζτέκοι, αλλά κατοικούσαν σε μικρά χωριά που σπάνια είχαν περισσότερους από χίλιους κατοίκους. Το δεκαδικό σύστημα αριθμών, σε συνδυασμό με την πενταδική αρίθμηση, χρησιμοποιούνταν για την υποδιαίρεση του πληθυσμού σε ομάδες των δέκα, πενήντα, εκατό, χιλίων, πέντε χιλιάδων οικογενειών. Τα αγροκτήματα διαιρούνταν σε τρία τμήματα: η σοδειά του ενός τμήματος πήγαινε στους ναούς, του άλλου τμήματος πήγαινε στον κεντρικό διοικητή (Σάπα Ίνκας) και του τελευταίου τμήματος ήταν στη διάθεση του αγρότη. Κάθε πολίτης, συμπεριλαμβανομένων των γυναικών και των παιδιών, ήταν υποχρεωμένος να αφιερώνει ένα μέρος της εργασίας του στην κυβέρνηση. Όλα αυτά έπρεπε να καταγράφονται και να υπολογίζονται με τα κίπου των Καμαγιόκ και οι πληροφορίες έπρεπε να μεταδίδονται κατόπιν στην κεντρική εξουσία στο Κούσκο – μια τρομερή δουλειά.

Οι Ίνκας επομένως, όπως και οι Μάγια, χρησιμοποιούσαν ένα **σύστημα θέσης-τιμής που συμπεριλάμβανε το μηδέν**. Όμως, εκεί που οι Μάγια χρησιμοποιούσαν το αριθμητικό τους σύστημα για να αναπτύξουν το ημερολόγιό τους ώστε να παρακολουθούν τους θεούς τους, οι Ίνκας χρησιμοποιούσαν το δικό τους αριθμητικό σύστημα για να ελέγχουν και να διοικούν τις καθημερινές δραστηριότητες του τεράστιου πληθυσμού τους.

Σχετικά με την μουσική:

Στη μουσική και στα μαθηματικά υπάρχουν οι ακολουθίες που αποτελούνται από νότες και πράξεις αντίστοιχα και εξελίσσονται μέσα στο χρόνο. Και τα δύο είναι εξίσου πολύπλοκα και μπορεί να κρύβουν εκπλήξεις.

Τόσο στην καλή μουσική όσο και στα μαθηματικά, κατανοούμε την ανάγκη της τελειότητας. Στη μουσική πιστεύουμε ότι ένα κομμάτι παρουσιάζεται τέλειο. Η αλλαγή μιας νότας θα το κατέστρεφε. Όταν όμως εμφανιστεί ένας ταλαντούχος μουσικός και αλλάξει κάτι, αντιλαμβανόμαστε ξαφνικά ότι το αρχικό δεν ήταν τέλειο, και ότι η νέα εκδοχή είναι απολύτως τέλεια! Στα μαθηματικά συμβαίνει το ίδιο. Το σημείο της ισότητας στην εξίσωση σημαίνει ακριβώς ίσον. Αν τα δύο μέλη της εξίσωσης δεν είναι ακριβώς ίσα, τότε χρησιμοποιούμε ένα διαφορετικό σύμβολο. Όταν λοιπόν βλέπουμε δύο εντελώς διαφορετικές μορφές (μία σε κάθε πλευρά του σημείου της ισότητας) και συνειδητοποιούμε ότι αυτές οι μορφές είναι πραγματικά ίσες, μένουμε κατάπληκτοι από την τελειότητα της ισότητας.

Το τελευταίο κοινό χαρακτηριστικό μουσικής και μαθηματικών είναι η δυνατότητα της επανάληψης των μοτίβων. Στην μουσική, μπορεί να έχουμε διαφορετικά θέματα, όταν όμως παίζονται μαζί, το αποτέλεσμα είναι αρμονικό και ακούγεται καλύτερα από ότι θα ακουγόταν αν τα θέματα παίζονταν ξεχωριστά. Τα μαθηματικά επίσης υφαίνουν διαφορετικά θέματα και μπορούν να δημιουργήσουν ένα πλούσιο χαλί. Δουλεύουμε πάνω σε ένα πεδίο και ξαφνικά συνειδητοποιούμε ότι αυτό που κάνουμε μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα σε κάποιο άλλο διαφορετικό πεδίο με έναν μοναδικό και εκπληκτικό τρόπο.

2η Θεματική ενότητα: Άραβες, Κινέζοι, Ινδοί.

Οι μαθητές:

Αγγελόπουλος Μάριος,

Τσιάνας Γεώργιος,

Ρίζος Αναστάσιος,

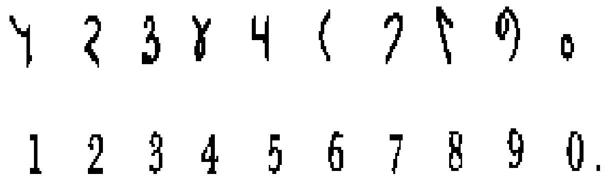
Ψημούλης Μιχάλης

Οι λογαριασμοί

Αρχικά οι ιερείς υποχρεώθηκαν να καταγράψουν με κάποιο τρόπο τις ποσότητες των αγαθών που διαχειρίζονταν. Έτσι χρησιμοποιήθηκαν αρχικά σαν μέτρο: καλάθια, δοχεία μπύρας, κομμάτια πανιού κ.α). Ύστερα όμως ήρθε η τυποποίηση. Καθώς το εμπόριο είχε αναπτυχθεί πολύ οι πόλεις έπρεπε να συντονιστούν μεταξύ τους και να προκαθορίσουν συγκεκριμένες μονάδες ώστε να μην γίνονται λάθη στην μοιρασιά των αγαθών. ΄Ενα άλλο γεγονός που δεν θα μπορούσε να παραληφθεί μιλώντας για την ιστορία των αριθμών είναι η μέτρηση του βάρους. Η διαδικασία αυτή γινόταν με την χρήση ζυγών οι οποίοι μάλιστα ήταν ιδιαίτερα εύχρηστοι στις αγοραπωλησίες πολύτιμων μετάλλων.

Με λίγα λόγια. . .

Στα αρχαία χρόνια, ο καλύτερος τρόπος να προσθέτεις αριθμούς ήταν με άβακα, έναν αριθμητικό πίνακα που αποτελούνταν από στήλες με πετραδάκια .Αλλά σχεδόν 1.500 χρόνια πριν, οι κάτοικοι της Ινδίας είχαν μια καλύτερη ιδέα Σκέφτηκαν η αξία κάθε συμβόλου να καθορίζεται από τη θέση του μέσα στον αριθμό (θεσιακό σύστημα).Με τον τρόπο αυτό μπορούσαν να κάνουν περίπλοκες προσθέσεις χωρίς τον άβακα, γράφοντας απλώς τους αριθμούς τον ένα κάτω από τον άλλον .Κάτι έπρεπε να υπάρχει όμως για να αντιστοιχεί σε μια κενή στήλη, έτσι **οι Ινδοί εφεύραν το μηδέν**. Το μηδέν ήταν μια ιδιοφυής ιδέα που άλλαξε τον κόσμο .



Οι νέοι αριθμοί πέρασαν γρήγορα από την Ασία στην Ευρώπη και έγιναν οι αριθμοί που χρησιμοποιούμε σήμερα. Σε αντίθεση με άλλους πολιτισμούς , οι Ινδοί χρησιμοποίησαν μόνο 10 σύμβολα για τους αριθμούς , κάτι που απλούστευσε αρκετά τα πράγματα .Αυτά τα σύμβολα άλλαξαν αρκετές φορές ανά τους αιώνες καθώς εξαπλώνονταν σε όλο το κόσμο για να πάρουν τελικά τη σημερινή τους μορφή . Οι Άραβες διέσωσαν και παρουσίασαν στην Ευρώπη το νέο σύστημα αρίθμησης και έτσι αυτό πήρε την ονομασία :
ινδοαραβικό.

Οι τεχνικές των αλγεβρικών υπολογισμών ήταν γνωστές στην Ινδία από πολύ παλιά. Υπάρχουν διάφορες πραγματείες από Ινδούς μαθηματικούς μεταξύ του 1.000 π.Χ. και του 1.000 μ.Χ όπου φαίνεται πως η έννοια του μηδενός ,οι τεχνικές της Άλγεβρας και των Αλγόριθμων, της τετραγωνικής και κυβικής ρίζας, ήταν γνωστές από τότε. Οι Άραβες μαθηματικοί οικειοποιήθηκαν της Ινδικές Μαθηματικές γνώσεις στις οποίες έδωσαν το όνομα 'Al Jabr' που σημαίνει επανένωση των σπασμένων μερών και από εκεί προήλθε και η λέξη Άλγεβρα. Σύμφωνα με τον A.L .Basham «Ο κόσμος οφείλει πολλά στην Ινδία στο χώρο τον μαθηματικών τα οποία ανέπτυξαν παρά πολύ, στην εποχή Gupta , όσο κανένα άλλο έθνος εκείνη την εποχή». Η επιτυχία των Ινδών στα μαθηματικά οφειλόταν κυρίως στο γεγονός ότι οι Ινδοί είχαν μια ξεκάθαρη αντίληψη των αφηρημένων αριθμών ξεχωριστή από τις αριθμητικές υλικές ποσότητες .

Αλλά πέρα από την άλγεβρα η Ινδία πρόσφερε και στην γεωμετρία .Υπήρχε ένα πεδίο μαθηματικών υπολογισμών που λεγόταν Rekha Ganita (μαθηματικοί υπολογισμοί). Τα Sulva Sutras που σημαίνουν «Κανόνας της Χορδής», δίνουν γεωμετρικές μεθόδους κατασκευής πυλώνων και ναών .Τα Sulva Sutras είναι από τα πιο παλιά Ινδικά μαθηματικά κείμενα που έχουν βρεθεί γραμμένα σε φύλλα από φλοιούς δέντρων και σε πινακίδες που ανάγονται στο 500 π.Χ. περίπου .

Η πλέον σημαντική προσφορά της Ινδίας στα μαθηματικά είναι η έννοια του μηδενός.

Στην αρχαία Ινδία το μηδέν χρησιμοποιούνταν σε υπολογισμούς συμβολιζόταν με μια τέλεια και ονομαζόταν Pujam. Περιέργως αυτή η λέξη σήμαινε και ιερό. Αυτό μάλλον έχει την προέλευση του στην Ινδική μεταφυσική .Η Ινδική φιλοσοφία θεωρεί τον υλικό κόσμο ως ψευδαίσθηση και τον ονομάζει Mayia. Τη δράση ,αποκόλληση από την Mayia την ονομάζει Tyaga και τον σκοπό της ένωσης με το κενό της αιωνιότητας ,Nirvana .Από εδώ μπορούμε να κατανοήσουμε γιατί η μαθηματική αντίληψη για το μηδέν ήταν σεβαστή από τους Ινδούς .

Ο πιο γνωστός αστρονόμος και μαθηματικός της αρχαίας Ινδίας είναι ο Brahmapoygpta

(Βραχμαγκούπτα)που γεννήθηκε στο 592 π.Χ. Οι πραγματείες του συνέβαλαν στην ανάπτυξη των ακολουθιών, των επιτοκίων και στη μέτρηση των γεωμετρικών εμβαδών**. Ήταν ο πρώτος που έγραψε κανόνες για υπολογισμούς με αρνητικούς αριθμούς και με το μηδέν.** Οι Ευρωπαίοι χρειάστηκαν αιώνες για να αποδεχθούν και τους αρνητικούς αριθμούς και το μηδέν. **Κάποιοι επιστήμονες υποστηρίζουν ότι την έννοια του μηδενός την πήραν οι Ινδοί από τους αρχαίους Έλληνες. Είναι γεγονός πως το μηδέν εμφανίζεται το 2 ο μ.Χ αιώνα σε ένα έργο του μαθηματικού Πτολεμαίου με το γράμμα ο το πρώτο γράμμα της ελληνικής λέξης «ουδέν». Πάντως , με την προσθήκη του μηδενός έχουμε το δεκαδικό σύστημα το οποίο διευκολύνει στο να παραστήσουμε μεγάλους αριθμούς κάτι το οποίο δεν μπορούσαν να κάνουν τα ήδη υπάρχοντα αλγεβρικά συστήματα .**

Σήμερα ο καλύτερος Ινδός μαθηματικός θεωρείται ο Ραμανούτζαν (1887-1920). Πέθανε σε ηλικία μόλις 33 χρονών και άφησε πίσω του 4000 πρωτότυπα θεωρήματα που κάποια από αυτά μελετώνται ακόμη. Ήταν δάσκαλος στην Ινδία σε μικρά παιδιά και τα δίδασκε αριθμητική και μάλιστα διαίρεση χρησιμοποιώντας παραδείγματα. Πήρε το πτυχίο του στα μαθηματικά πολύ αργά γιατί δεν τον ενδιέφερε κανένα άλλο μάθημα εκτός από τα μαθηματικά και αφιέρωσε όλη του τη ζωή σε αυτά. Θεωρείται ισάξιος του Γκάους και του Όιλερ και πολλές φορές αναφέρεται ως ένας Μότσαρτ των Μαθηματικών.

Μεταξύ του $5^{ου}$ – $8^{ου}$ αιώνα μΧ όλα όσα ήξεραν για τα μαθηματικά οι Έλληνες πέρασαν στα χέρια των Αράβων Μαθηματικών και εκείνοι με την σειρά τους τα ανέπτυξαν. Οι Άραβες σοφοί,

($9^{ος}$ – $10^{ος}$ αιώνας) ήταν μεγάλοι Μαθηματικοί και ικανότατοι μεταφραστές.
Προσπάθησαν να μεταφράσουν ελληνικά μαθηματικά κείμενα του Ευκλείδη, Αρχιμήδη, και άλλων .Έτσι αυτό τους επέτρεψε να κατακτήσουν πολλές μαθηματικές γνώσεις της αρχαιότητας μετά τις διεύρυναν και στην συνέχεια δημιούργησαν νέα πεδία που απουσίαζαν από τα ελληνικά μαθηματικά. Οι Άραβες μαθηματικοί είχαν κοινά τα μαθηματικά με την ιατρική, αστρονομία, φυσική, φιλοσοφία.

Δημιούργησαν την Άλγεβρα, την Συνδυαστική, την Τριγωνομετρία.
Ο Αλ Κάσι διευθυντής του παρατηρητηρίου της Σαμαρκάνδης κάνει την σύνθεση 7 αιώνων αραβικών μαθηματικών: Σύνδεση της Άλγεβρας με την Γεωμετρία, Σύνδεση της Άλγεβρας με την θεωρία αριθμών. Τριγωνομετρία & Συνδυαστική ανάλυση. Λύση εξισώσεων με ριζικά.

Οι μεγαλύτεροι Άραβες Μαθηματικοί ήταν:

i. Αλ Κβαρισμι, ο οποίος είναι ο πατέρας της Άλγεβρας.

ii. Αλ Karazi που πρώτος θεώρησε τις άρρητες ποσότητες ως αριθμούς.

iii. Αλ Φαριζι, βάσεις της στοιχειώδους θεωρίας των αριθμών

Η πρώτη προσπάθεια εισαγωγής των ινδοαραβικών αριθμητικών ψηφίων στην Ευρώπη έγινε από τον Φιμπονάτσι (1180 – 1250 μΧ) αλλά πέρασαν 400 χρόνια μέχρι να τα υιοθετήσουν οι Ευρωπαίοι

Κινέζοι

Οι Κινέζοι ανεξάρτητα, έδωσαν υλική υπόσταση στους αρνητικούς αριθμούς, όταν από τον 12ο αιώνα χρησιμοποιούσαν κόκκινα ραβδιά για τις αρνητικές ποσότητες και μαύρα ραβδιά για τις θετικές ,το ακριβές ανάλογο των καταθέσεων και των χρεών στο τραπεζικό μας σύστημα.

Παρ’ όλα αυτά δεν αποδέχτηκαν της αρνητικές λύσεις στις εξισώσεις.

Όσο αφορά τον συμβολισμό των πρόσημων πλην(-) και συν (+) τον οφείλουμε σε εμπόρους. Χρησιμοποιήθηκαν τον 15ο αιώνα στην Γερμανία σε αποθήκες με εμπορεύματα , όταν τα κοντέινερ της εποχής είχαν περισσότερο ή λιγότερο φορτίο από το προβλεπόμενο.

3^{η} Θεματική ενότητα: Οι αριθμοί στην αρχαία Έλλαδα.

Οι μαθητές

Κοράκη Κωνσταντίνα

Μουτσογκλάβα Ειρηναία

Μπισμπίκης Αλέξανδρος

Ξηρογιάννη Ισμήνη

Σκούμας Χρήστος

Αρχή Πυθαγορείων: «Τα πάντα είναι αριθμοί»

4^{ος} αι. π. Χ

Ενώ το 1 συμβολιζόταν με μια απλή κάθετη γραμμή τα άλλα 5 σύμβολα ήταν όλα γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου. Διάφοροι αριθμοί σχηματίζοντα από συνδυασμούς αυτών των 6 συμβόλων κάτι που έμοιαζε πολύ με το παλιότερο αιγυπτιακό σύστημα και το μεταγενέστερο ρωμαϊκό σύστημα. Το σύμβολο για το 5 το Γ χρησιμοποιούνταν σε συνδυασμό με άλλα σύμβολα ως πολλαπλασιαστής. Για παράδειγμα έχουμε το Γ το οποίο συμβολίζει το 5x100 η 500.Για να πάρουμε το 5.000 απλώς συνδυάζουμε το Γ με το Χ και παίρνουμε το Γ.
Τα σύμβολα γράφονταν συνήθως άλλα όχι πάντα με φθίνουσα σειρά.
Το δεύτερο σύστημα το ιωνικό εκχωρούσε τιμές σε γράμματα της αλφαβήτου.
Χρειάστηκε να προστεθούν τρία επιπλέον σύμβολα για να φτάσουμε στο είκοσι εννέα. Το στίγμα S για το έξι, το κόππα S για το ενενήντα και το σαμπί για το εννιακόσια.

Αρχαίοι ελληνικοί αριθμοί

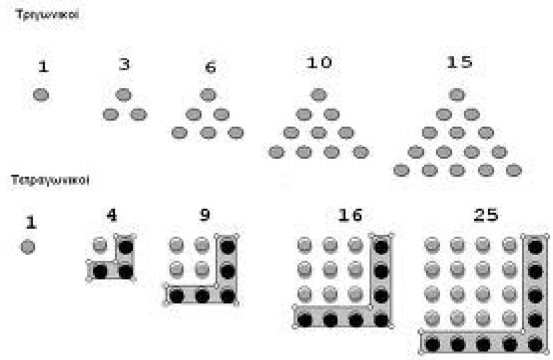
Μετατροπή από αραβικά ψηφία σε αρχαιοελληνικά σημεία					
1= α'	11= ια'	10= ι'	100= ϱ'	1.000= ,α	20.000= ,κ
2= β'	12= ιβ'	20= κ'	200= σ'	2.000= ,β	100.000= ,ϱ
3= γ'	13= ιγ'	30= λ'	300= τ'	3.000= ,γ	κ.ο.κ.
4= δ'	14= ιδ'	40= μ'	400= υ'	4.000= ,δ	
5= ε'	15= ιε'	50= ν'	500= φ'	5.000= ,ε	
6= ϛ'	16= ιϛ'	60= ξ'	600= χ'	6.000= ,ϛ	
7= ζ'	17= ιζ'	70= ο'	700= ψ'	7.000= ,ζ	
8= η'	18= ιη'	80= π'	800= ω'	8.000= ,η	
9= θ'	19= ιθ'	90= ϟ (κόππα)	900= ϡ (σαμπί)	9.000= ,θ	
10= ι'	20= κ'	100= ϱ'	1.000= ,α	10.000= ,ι	

Οι Έλληνες είναι βέβαιο ότι χρησιμοποιούσαν υπολογιστικά πινάκια για να κάνουν υπολογισμούς αλλά υπάρχουν λίγες απευθείας μαρτυρίες για την μέθοδο που χρησιμοποιούσαν.

Πυθαγόρεια Σχολή:

Ο Πυθαγόρας ίδρυσε μια σχολή στη νότια Ιταλία. Στη πραγματικότητα ήταν μια θρησκευτική κοινότητα με μέλη 300 πλούσιους και ισχυρούς άντρες .Οι μαθητές λοιπόν, χωρισμένοι σε 2 ομάδες :στον εσωτερικό κύκλο(μαθηματικός) και στον εξωτερικό κύκλο(ακουσματικός). Καθένας από τους μαθηματικούς για να περάσει στον εσωτερικό κύκλο έπρεπε πρώτα να περάσει από τον εξωτερικό. Η σχολή δεν ήταν μόνο γνωστή λόγω της μαθηματικής της φύσης αλλά και της μυστικότητας που την διέκρινε. Τα μέλη της κοινότητας έπαιρναν έναν όρκο μυστικότητας ,κάτι που εμπόδιζε την διάδοση των ιδεών τους. Ακόμα κι ο ίδιος ο Πυθαγόρας δεν άφησε πίσω του γραπτά κείμενα. Οι περιττοί αριθμοί ήταν αρσενικοί και οι άρτιοι θηλυκοί. Τα τέλεια τετράγωνα όπως το 4 και το 9 συμβολίζουν το δίκαιο, το 5 συμβολίζει το γάμο-τη συνάντηση του περιττού(αρσενικό) με το άρτιο (θηλυκό).

Στα σχήματα που ακολουθούν απεικονίζονται «τριγωνικοί» και «τετραγωνικοί» αριθμοί.



Η ιστορία του ΄Ιππασου ως απόδειξη της καταστρεπτικής μυστικότητας των Πυθαγορείων:

Σύμφωνα με μια ιστορία, ο Ίππασος αποκάλυψε την ύπαρξη των ασύμμετρων μηκών σε μη μέλη των Πυθαγορείων. Για αυτή του την προδοσία λέγεται ότι τον έπνιξαν στη διάρκεια ενός ταξιδιού. Αυτή η ιστορία δείχνει πόσο καταστρεπτική ήταν αυτή η αντίληψη της μυστικότητας μετά την κατάρρευση της σχολής έπειτα από την απόδειξη ότι οι αριθμοί είναι φυσικά μεγέθη που εκτείνονται στον χώρο.

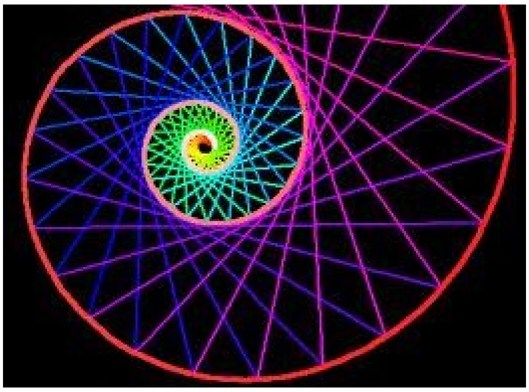
Πυθαγόρεια γεωμετρική αντίληψη:

Στα μέσα του 5^{ου} αιώνα π.Χ οι Πυθαγόρειοι οικοδόμησαν τον κόσμο τους από σημεία που έχουν διαστάσεις. Δεν ήταν ίσως δυνατό να λεχτεί από πόσα σημεία αποτελούνταν η ευθεία γραμμή. Όμως, ο αριθμός τους ήταν ορισμένος. Ύστερα με την πρόοδο της μαθηματικής τους επιστήμη οι βάσεις του σύμπαντος τους ανατραπήκανε. Αποδείχτηκε πως διαγώνιος και πλευρά του τετραγώνου είναι άνισες μεταξύ τους. Ότι η τετραγωνική ρίζα του 2 είναι «αλογικός αριθμός». Αυτή η έκφραση βγήκε από τους ίδιους και δείχνει πόσο κλονίστηκαν όταν βρήκαν πως δεν μπορούσαν να εκφράσουν την τετραγωνική ρίζα του δυο με κανένα **αριθμό.**

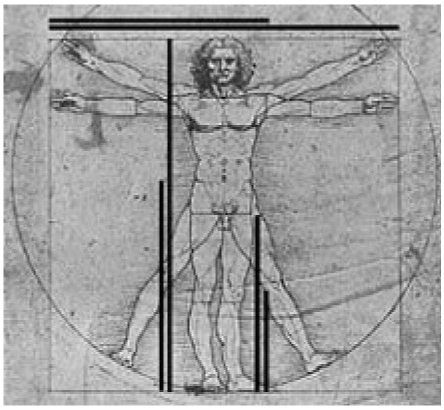
Ο αριθμός Φ(1,618)

Ο χρυσός λόγος ήταν γνωστός στους Πυθαγόρειους. Στο μυστικό τους σύμβολο, την πεντάλφα, ο χρυσός λόγος εμφανίζεται στις πλευρές του αστεριού. Με βάση το χρυσό λόγο δημιουργήθηκαν πολλά έργα της κλασσικής εποχής, όπως ο Παρθενώνας, και της αναγεννησιακής εποχής, όπως είναι ζωγραφικά έργα του Λεονάρντο ντα Βίντσι. Ακόμη και σήμερα χρησιμοποιείται για την απόδοση της αρμονίας σε έργα, ή στην πλαστική χειρουργική για την ωραιοποίηση του ανθρώπινου προσώπου.

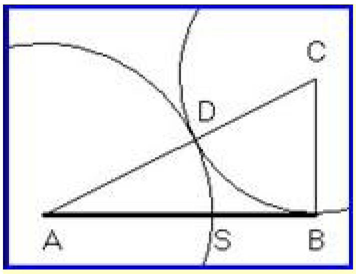
Ο χρυσός λόγος εντοπίζεται και στη φύση. Για παράδειγμα στον ναυτίλο, ο λόγος των ακτίνων του κάθε θαλάμου με τον προηγούμενο ισούται με το χρυσό λόγο. Στο ανθρώπινο σώμα ο χρυσός λόγος εντοπίζεται σε πολλές ανατομικές αναλογίες, τις οποίες παρατήρησε και κατέγραψε ο Λεονάρντο ντα Βίντσι στον βιτρούβιο άντρα.



ναυτίλος

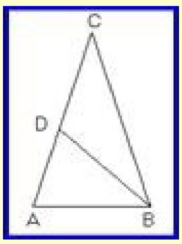


βιτρούβιος



Για να χωρίσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα σε δύο άλλα , ώστε να ισχύει ο χρυσός λόγος, κάνουμε τα εξής:
Κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές AB=λ και BC = λ/2, οπότε η υποτείνουσα AC θα είναι $\sqrt{5}$λ/2.
Με το διαβήτη χαράσσουμε έναν κύκλο κέντρου C και ακτίνας λ/2, οπότε προσδιορίζεται το σημείο D, σημείο τομής του κύκλου και της AC. Με κέντρο το A χαράσσουμε έναν κύκλο ακτίνας AD, ο οποίος τέμνει την AB στο σημείο S. Εύκολα αποδεικνύεται ότι AB/AS = $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ότι το S δηλαδή τέμνει την AB με χρυσή τομή.

Χρυσό τρίγωνο

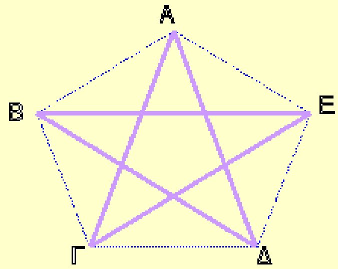


Χρυσό λέγεται κάθε τρίγωνο στο οποίο ο λόγος της μεγάλης πλευράς προς τη μικρή θα είναι ίσος με φ.
Κάθε ισοσκελές με γωνία κορυφής 36^0 είναι *χρυσό*.
Μπορούμε να το αποδείξουμε φέρνοντας τη διχοτόμο μιας από τις παρά τη βάση γωνίες – στο σχήμα της B –

τα τρίγωνα ABC και ABD είναι όμοια, οπότε (AC) = φ(AB)
Η διχοτόμος της γωνίας B = 72^0 δημιουργεί στην απέναντι πλευρά χρυσή τομή.

Το αστέρι των Πυθαγορείων

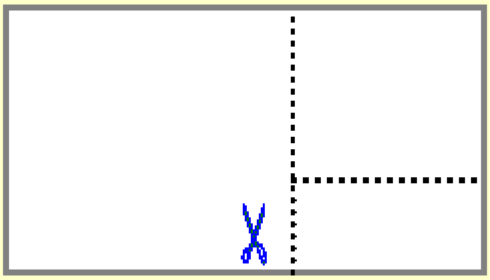
Το σύμβολο της αδελφότητας των Πυθαγορείων ήταν το «πεντάγραμμο», το αστέρι δηλαδή που σχηματίζεται από τις πέντε διαγωνίους του κανονικού πενταγώνου.



Αποδεικνύεται ότι κάθε πλευρά του «πενταγράμμου» διαιρεί τις δύο άλλες σε χρυσή τομή.
Κάθε γωνία του «πενταγράμμου» είναι 36^0. Στο τρίγωνο ΑΓΔ του σχήματος η ΓΕ διχοτομεί τη γωνία ΑΓΔ άρα τέμνει κατά χρυσή τομή την ΔΓ.

Χρυσό ορθογώνιο

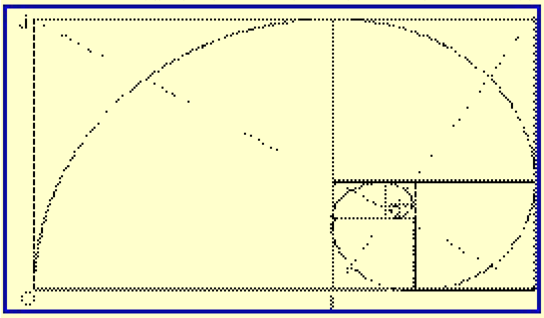
Το χρυσό ορθογώνιο έχει λόγο των πλευρών του ίσο με φ. α/β = φ .



Αν του αποκόψουμε ένα τετράγωνο με πλευρά β, το ορθογώνιο με πλευρές β, γ που θα απομείνει θα είναι και πάλι χρυσό, θα είναι δηλαδή β/γ = φ και αυτό θα συνεχίζεται επ' άπειρον.

Χρυσό σπιράλ, κοχύλια και ηλιοτρόπια

Εάν αντί να χρησιμοποιήσουμε το ψαλίδι σχεδιάσουμε πάνω στο αρχικό ορθογώνιο τις τομές και



σε κάθε τετράγωνο που δημιουργείται σχεδιάσουμε τα αντίστοιχα τεταρτοκύκλια θα έχουμε αρχίσει να φτιάχνουμε το χρυσό ελικοειδές, το σπιράλ που σχεδιάζει η φύση και το διακρίνουμε στα κουκουνάρια, στα κοχύλια, στα ηλιοτρόπια και στους τρόπους με τους οποίους διευθετούνται τα πέταλα, τα φύλλα και τα κλαδιά ποικίλων προσωρινών κατοίκων της γήινης βιόσφαιρας.

Ο αριθμός π

Η μαθηματική σταθερά **π** είναι ένας πραγματικός αριθμός που μπορεί να οριστεί ως ο λόγος του μήκους της περιφέρειας ενός κύκλου προς τη διάμετρό του στην Ευκλείδεια γεωμετρία, και ο οποίος χρησιμοποιείται πολύ συχνά στα μαθηματικά, τη φυσική και τη μηχανολογία. Ο συμβολισμός προέρχεται από το αρχικό γράμμα πι της λέξης «περιφέρεια» και έχει καθιερωθεί διεθνώς, ενώ στο λατινικό αλφάβητο συμβολίζεται ως *Pi* όταν δεν είναι διαθέσιμοι τυπογραφικά ελληνικοί χαρακτήρες. Το π είναι γνωστό επίσης ως **σταθερά του Αρχιμήδη** (δεν πρέπει να συγχέεται με τον αριθμό του Αρχιμήδη) ή **αριθμός του Λούντολφ**.

Στην Ευκλείδεια επιπεδομετρία, το π μπορεί να οριστεί είτε ως ο λόγος της περιφέρειας ενός κύκλου προς τη διάμετρό του, είτε ως ο λόγος του εμβαδού ενός κύκλου προς το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει πλευρά ίση με την ακτίνα του κύκλου. Τα εγχειρίδια ανώτερων μαθηματικών ορίζουν το π αναλυτικά χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές συναρτήσεις, για παράδειγμα ως το μικρότερο θετικό x για το οποίο ισχύει ημ(x) = 0, ή ως δύο φορές το μικρότερο θετικό x για το οποίο ισχύει συν(x) = 0. Όλοι αυτοί οι ορισμοί είναι ισοδύναμοι.

Ο Αρχιμήδης καθόρισε την πρώτη επιστημονικά αποδεδειγμένη μέθοδο με την οποία υπολογίζεται ο αριθμός.

Συνήθως χρησιμοποιείται η προσέγγιση π ≈ 3,14. Τα πρώτα 50 δεκαδικά ψηφία του π είναι:

3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510

Μολονότι η ακρίβεια αυτή είναι παραπάνω από επαρκής για πρακτικούς σκοπούς στη μηχανολογία και την επιστήμη, η ακριβής τιμή του π περιλαμβάνει άπειρα δεκαδικά ψηφία (που επιπλέον δεν επαναλαμβάνονται ποτέ με την ίδια σειρά). Κατά τους λίγους τελευταίους αιώνες έχουν καταβληθεί μεγάλες προσπάθειες για τον υπολογισμό όλο και περισσότερων ψηφίων του π και τη διερεύνηση των ιδιοτήτων του αριθμού αυτού. Παρά τον όγκο της αναλυτικής εργασίας, σε συνδυασμό με τη χρήση υπερυπολογιστών σε υπολογισμούς που έχουν προσδιορίσει πάνω από 1 τρισεκατομμύριο ψηφία του π, δεν βρέθηκε ποτέ κάποια αναγνωρίσιμη διάταξη στα ψηφία του. Ψηφία του π είναι διαθέσιμα από μια πληθώρα πηγών στο Διαδίκτυο, και ένας κοινός προσωπικός υπολογιστής μπορεί να υπολογίσει δισεκατομμύρια ψηφία του π μέσω διαθέσιμου λογισμικού.

Πολλές ιστοσελίδες δίνουν το π με πολλά δεκαδικά ψηφία. Και ενώ τα δεκαδικά του π έχουν υπολογιστεί σε περισσότερα από πέντε τρισεκατομμύρια σε πρακτικές εφαρμογές κανένας δεν χρειάζεται περισσότερα από μια ντουζίνα. Παραδείγματος χάριν με 11 δεκαδικά ψηφία του π μπορεί κάποιος να υπολογίσει ένα κύκλο που θα χωράει μέσα του τη Γη και το σφάλμα θα είναι λιγότερο από 1 χιλιοστό. Με 39 δεκαδικά μπορεί να υπολογιστεί κύκλος που θα χωράει μέσα του όλο το ορατό σύμπαν και το σφάλμα θα είναι όσο η ακτίνα του ατόμου του υδρογόνου.

4η Θεματική ενότητα: Η εξέλιξη των αριθμών στους νεότερους χρόνους.

Οι μαθητές

Καραμέρης Δημήτριος

Κατσούρος Φλώριος

Κέφος Ιωάννης

Φράκταλ

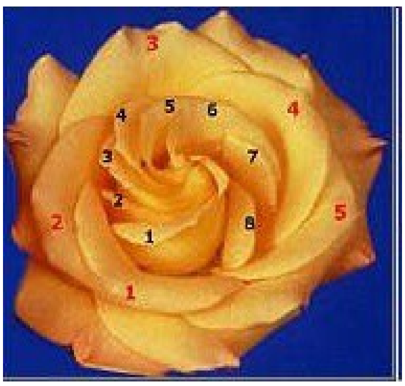
Σε πολλές περιπτώσεις η φύση μας αποκαλύπτει μαθηματικά. Το 1970 ο Μ. Μάντελμπροτ, που εργάζονταν στην εταιρεία Ι.Β.Μ. , ανακάλυψε την ύπαρξη ενός νήματος που τον διευκόλυνε στην ολοκλήρωση του έργου του.

Μελετούσε κάποια φαινόμενα όπως η ροή του νερού και ακόμα διάφορα ηλεκτρικά κυκλώματα και συνειδητοποίησε ότι ανάμεσα σε όλα αυτά υπάρχει ένα κοινό στοιχείο. Για παράδειγμα ένα δέντρο χωρίζεται σε διάφορες δομές, όπως ο κορμός, τα φύλλα, τα κλαδιά κτλ.

Οι περισσότερες μορφές είναι φράκταλ, για παράδειγμα ένας βράχος είναι μικρογραφία ενός βουνού. Η επιφάνεια της σελήνης αποτελείται από κρατήρες κάθε μεγέθους. Τα παραδοσιακά σχήματα του Ευκλείδη διαφέρουν. Υποστηρίζει πως δεν υπάρχει τίποτα περίπλοκο σε ένα τρίγωνο, σε ένα κύκλο ή σε μια σφαίρα. Όταν μεγεθύνουμε μια σφαίρα παρατηρούμε πως η επιφάνεια της είναι επίπεδη. Σε αντίθεση με τα φράκταλ που είναι εξαιρετικά πολύπλοκα. Πολλά μαθηματικά είναι εμπνευσμένα από την μουσική. Το 1966 ο Αμερικάνος μαθηματικός Μάρκ Κας υποστήριξε ότι όλα έχουν μια πρακτικά σημασία. Για παράδειγμα όταν γίνεται ένας σεισμός η γη δονίζεται σαν καμπάνα και οι σεισμολόγοι συμπεραίνουν την εσωτερική δομή της από τον ήχο που παράγει ο σεισμός. Επίσης τα σχήματα της φύσης παρουσιάζουν μεγάλη ποικιλία. Στα μαθηματικά η λέξη συμμετρία έχει ακριβές νόημα. Τα απλούστερα μαθηματικά είναι η αμφίπλευρη συμμετρία στην οποία η αριστερή και δεξιά πλευρά του αντικειμένου είναι ίδιες.

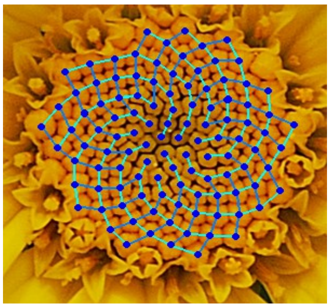
Η ακολουθία Fibonacci

Ο Fibonacci ήταν πολύ γνωστός στην εποχή του και σήμερα αναγνωρίζεται ως ο μεγαλύτερος μαθηματικός του Μεσαίωνα. Σύμφωνα με την ακολουθία του κάθε αριθμός, εκτός από τους δύο πρώτους, είναι ίσος με το άθροισμα τον 2 προηγούμενων: Δηλαδή



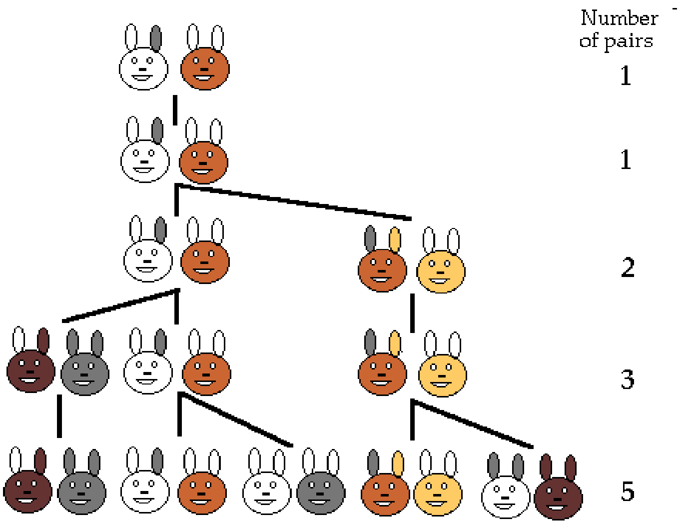
1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,82,144……..

Οι αριθμοί Fibonacci προκύπτουν επίσης στις σπειροειδείς δομές που αναπτύσσουν τα φυτά για να τακτοποιήσουν τους σπόρους τους, τα πέταλά τους, όπως στα τριαντάφυλλα, στις μαργαρίτες , στα ηλιοτρόπια.



ηλιοτρόπιο μαργαρίτα

Με την ακολουθία αυτή σχετίζεται και η αναπαραγωγή των κουνελιών.
«Κάποιος τοποθέτησε σε έναν αποκλεισμένο τόπο ένα ζευγάρι κουνελιών. Τα κουνέλια αυτά αναπαράγονται με ρυθμό ένα νέο ζευγάρι τον μήνα και κάθε νέο ζευγάρι γίνεται γόνιμο δύο μήνες μετά κι αναπαράγεται με τον ίδιο ρυθμό. Πόσα ζευγάρια κουνελιών έχουν παραχθεί σε έναν χρόνο από το αρχικό ζεύγος;»



Το θεώρημα του Φερμά

Σύμφωνα με τον Φερμά, όταν ένας αριθμός διαιρείται με το 0(μηδέν), ο αριθμός που προκύπτει είναι ακατανόητος. Το 0 ήταν από τους τελευταίους αριθμούς που βρέθηκαν στην φύση. Οι περισσότερες από τις σημειώσεις του Φερμά περιείχαν μια ολόκληρη σειρά θεωρημάτων. Ένα από αυτά τα θεωρήματα είναι το λεγόμενο ως το **<<τελευταίο θεώρημα του Φερμά>> κατά το οποίο: $x^{\nu} + y^{\nu}=z^{\nu}$**. Για να ισχύει αυτή η εξίσωση θα πρέπει ο εκθέτης να μην είναι μεγαλύτερος του 2. Ο Φερμά άλλαξε την δύναμη από 2 σε 3, κάνοντας την νέα αυτή εξίσωση να φαίνεται πως δεν έχει καμία απολύτως ακέραια λύση. Τα λάθη που έγιναν κατά την προσπάθεια της απόδειξης της εξίσωσης αυτής αποδεικνύουν την δυσκολία να βρεθεί το άθροισμα 2 αριθμών που ο καθένας τους ήταν υψωμένος στον κύβο που το αποτέλεσμα τους ήταν επίσης υψωμένο στον κύβο. Ύστερα ο Φερμά πειραματίστηκε βάζοντας ως εκθέτες αριθμούς μεγαλύτερους του 3 κάνοντας την επίλυση της εξίσωσης εξίσου δύσκολη. Κατά την άποψη του δεν υπήρχαν αριθμοί που να ικανοποιούν το: $x^v + y^v = z^v$, όπου το v να είναι μεγαλύτερος του 2.

Σειρές

Ένα άλλο μαθηματικό αντικείμενο ήταν οι άπειρες σειρές, ένας τομέας με τον οποίο ασχολήθηκε ο Ζήνωνας. Ένα παράδειγμα που έθεσε ήταν η περιγραφή ενός αγώνα δρόμου ανάμεσα σε ένα λαγό και σε μια χελώνα, όπου ο λαγός τρέχει με την διπλάσια ταχύτητα από ότι η χελώνα. Αφού η χελώνα έχει ξεκινήσει πρώτη, κάθε φορά που ο λαγός προσπαθεί να την πλησιάσει θα φτάνει στην θέση που η χελώνα βρισκόταν πιο πριν. Αυτό που καταφέρνει ο λαγός είναι να καλύπτει την μισή απόσταση που τους χωρίζει, ενώ παράλληλα η χελώνα θα έχει πάλι προχωρήσει. Έτσι συμπεραίνουμε ότι ο λαγός δεν θα φτάσει ποτέ την χελώνα, αφού θα πρέπει να διανύει πάντα την μισή απόσταση που τους χωρίζει.

Οι φανταστικοί αριθμοί

Τον 16^o αιώνα οι ιταλοί μαθηματικοί Ferro-Tartaglia αντικαθιστώντας στον τύπο επίλυσης μιας τριτοβάθμιας εξίσωσης, τη λύση που είχαν βρει, προέκυψε **ρίζα ΑΡΝΗΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ!**

Επίσης ο Ιταλός μαθηματικός Ραφαέλο Μπομπέλι μελετώντας τις τετραγωνικές ρίζες αριθμών βρέθηκε αντιμέτωπος με ένα αναπάντητο ερώτημα: Ποια είναι η τετραγωνική ρίζα της μονάδας -1; Η απάντηση δεν μπορούσε να είναι ούτε το +1 αλλά ούτε και το -1, αφού το τετράγωνο και των δύο είναι το +1. Η λύση από την μεριά του Μπομπέλι ήταν να δημιουργηθεί ένας νέος αριθμός, ο **i (imagine).**Ονομάστηκε έτσι για τον λόγο ότι είναι φανταστικός αριθμός και απαντάει στο: Ποια η τετραγωνική ρίζα της αρνητικής μονάδας;

Τον 17^o αι. ο Γερμανός μαθηματικός Λάιμπνιτς περιέγραψε την φύση του φανταστικού αριθμού: **¨Ο φανταστικός αριθμός είναι μια ωραία επινόηση θεϊκού πνεύματος σχεδόν ανάμεσα στο ον και στο μη ον ¨**

Το Δυαδικό σύστημα

Οι αριθμοί στο δυαδικό σύστημα αποτελούνται από το <0> και το <1>.Ενα ηλεκτρονικό σήμα αντιπροσωπεύει το <1>,ενώ η έλλειψη σήματος αντιπροσωπεύει το <0>.Στους υπολογιστές χρησιμοποιούνται οι δυαδικές στοιχειοσειρές. Αυτές αντιπροσωπεύουν πολλά πράγματα, για παράδειγμα αριθμούς:

0: 0	5: 101
1: 1	6: 110
2: 10	7: 111
3: 11	8: 1000
4: 100	9: 1001

10: 1010

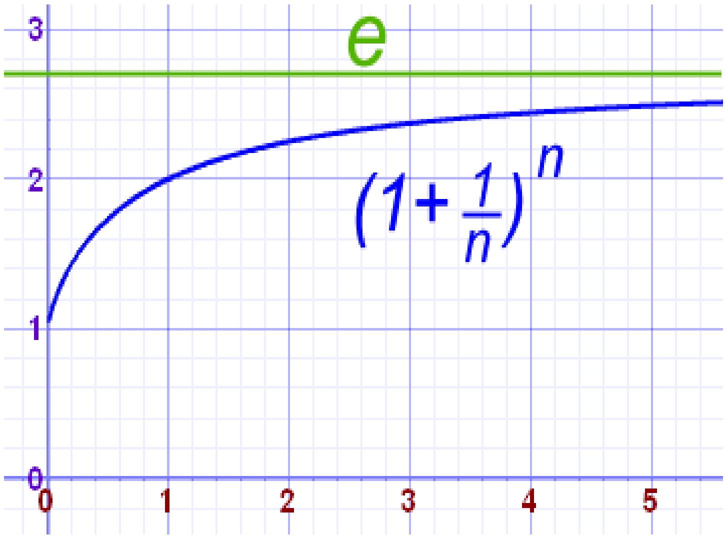
Ο αριθμός e

Ο Ελβετός μαθηματικός Λέοναρντ ΄Οιλερ ,όρισε τη χρήση του γράμματος **<<e>>** ,που συμβολίζει μια άλλη θεμελιώδη σχέση των μαθηματικών:

$e = \lim (1+1/v)^v$

Δηλαδή **το <e> είναι το όριο** που παίρνουμε όταν αφήνουμε το <ν> να γίνεται όλο και μεγαλύτερο αρχίζοντας από το 1.

ν=1	2.00000
ν=2	2.25000
ν=5	2.48832
ν=10	2.59374
ν=100	2.70481
ν=1,000	2.71692
ν=10,000	2.71815
ν=100,000	2.71827



Βλέπουμε ,ότι όσο μεγαλώνει το ν βρίσκουμε αριθμό ίσο με το: **e=2,71282…Ένας αριθμός πολύ χρήσιμος στη φυσική!**

Ο Όιλερ ήταν ο πρώτος που αναρωτήθηκε το 1748 αν το <e> και το <π> είναι αλγεβρικοί αριθμοί. Δηλαδή αν μπορούν να είναι λύσεις πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές. Αυτό το ερώτημα έχει μια ιδιαίτερη σημασία για το <π>.

Τις λύσεις των πολυωνύμων που οι συντελεστές τους είναι ακέραιοι αριθμοί, τις ορίζουμε ως αλγεβρικούς αριθμούς. Για να είμαστε ακριβείς μπορούμε να πούμε ότι όλες οι λύσεις των πολυωνύμων με ρητούς συντελεστές είναι αλγεβρικοί αριθμοί. Αλγεβρικός αριθμός είναι ο αριθμός που αποτελεί λύση μιας πολυωνυμικής εξίσωσης, που όλοι οι συντελεστές της είναι ακέραιοι αριθμοί.

Επίλογος

Τελειώνοντας τη σύντομη περιήγηση στον κόσμο των αριθμών, αναφέρουμε τη σχέση που συνδέει τους πέντε σημαντικότερους αριθμούς των μαθηματικών:

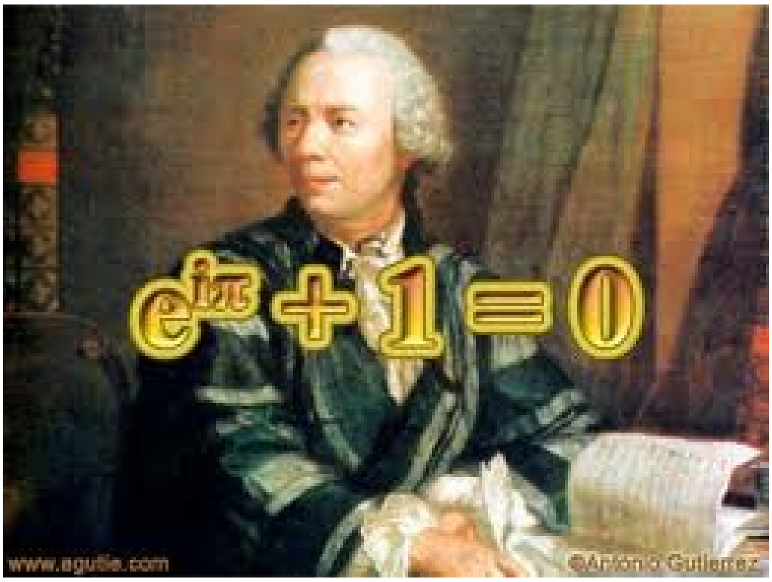
1, 0, π, e και i !!!!!!

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Είναι οι αριθμοί που μας έρχονται από τους αρχαίους χρόνους, σε συνδυασμό με αυτούς που ανακαλύφθηκαν πολύ αργότερα.

Μέσα από αυτή τη σχέση βλέπουμε τη διαχρονική εξέλιξη των αριθμών.

Και μέσα από την εργασία ελπίζουμε να αποκαλύψαμε τη μαγεία , τα μυστικά των αριθμών, να κάναμε γνωστή την ιστορία τους , τη χρησιμότητά τους και τη σχέση τους με τον άνθρωπο και τη φύση!



Ο μαθηματικός Euler

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Η μαγεία των μαθηματικών (CALVIN C. CLAWSON)

2. Αρχαία Ελληνική Επιστήμη (ΑΝΤΩΝΗΣ ΑΝΤΩΝΙΑΔΗΣ)

3. Το θεώρημα του παπαγάλου (ΝΤΕΝΙ ΓΚΕΤΖ)

4. Ο ταξιδευτής των μαθηματικών (CALVIN C. CLAWSON)

5. Η μέτρηση του κόσμου (ΝΤΑΝΙΕΛ ΚΕΛΜΑΝ)

6. Από το 1 έως το 9 , η κρυφή ζωή των αριθμών (ANDREW HODGES)

7. Ο πρίγκιπας των μαθηματικών (M.B.W. TENT)

8. Το τελευταίο θεώρημα του Φερμά (SIMON SINGH)

9. Οι Μυ6τικοί Αρι8μοί (IAN STEWART)

7. Ιστορία των Επιστημών και της Τεχνολογίας (ΘΕΟΔΩΡΟΣ ΑΡΑΜΠΑΤΖΗΣ-ΚΩΣΤΑΣ ΓΑΒΡΟΓΛΟΥ-ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΔΙΑΛΕΤΗΣ-ΓΙΑΝΝΗΣ ΧΡΙΣΤΙΑΝΙΔΗΣ-ΝΙΚΟΣ ΚΑΝΔΕΡΑΚΗΣ-ΣΤΕΛΙΟΣ ΒΕΡΝΙΚΟΣ)

8. Διαδύκτιο.