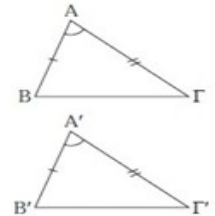


Θεωρία

Θεωρήματα

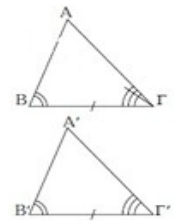
Θεώρημα I (1ο Κριτήριο – ΠΓΠ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.



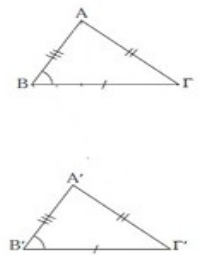
Θεώρημα (2ο Κριτήριο – ΓΠΓ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.



Θεώρημα (3ο Κριτήριο – ΠΠΠ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

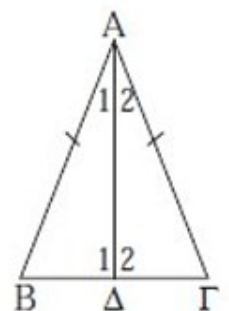


Πορίσματα

ΠΟΡΙΣΜΑ I

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.



ΠΟΡΙΣΜΑ I

Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.

36170

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA (προς το

A) θεωρούμε τα σημεία E και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε $AE = A\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = \Gamma\Delta$,

(Μονάδες 6)

β) $B\Delta = \Gamma E$,

(Μονάδες 10)

γ) $\angle B\Gamma E = \angle E\Gamma B$.

(Μονάδες 9)

36110

ΘΕΜΑ 2

Αν στο σχήμα που ακολουθεί είναι $\angle A\hat{O}B = \angle B\hat{O}\Gamma = \angle \Gamma\hat{O}\Delta$ και $OA = OB = O\Gamma = OD$, τότε να αποδείξετε

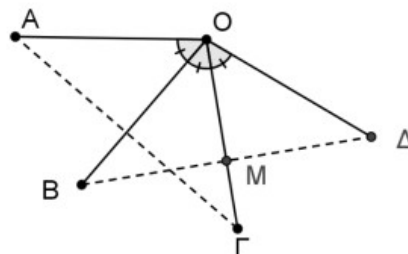
ότι:

α) $A\Gamma = B\Delta$,

(Μονάδες 10)

β) το M είναι μέσον της $B\Delta$, όπου M το σημείο τομής των τμημάτων $O\Gamma$ και $B\Delta$.

(Μονάδες 15)



36104

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γωνία $\chi\hat{O}\gamma$ και η διχοτόμος της $O\delta$. Θεωρούμε σημείο M της $O\delta$ και σημεία A και B στις ημιευθείες $O\chi$ και $O\gamma$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $OA = OB$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $MA = MB$,

(Μονάδες 15)

β) Η $O\delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{M}B$.

(Μονάδες 10)

36100

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο KAB ($KA=KB$) και $K\Gamma$ διχοτόμος της γωνίας $\hat{K}$. Στην προέκταση της BA (προς το A) παίρνουμε σημείο Λ και στην προέκταση της AB (προς το B) παίρνουμε σημείο M , έτσι ώστε $AL=BM$. Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο $K\Lambda M$ είναι ισοσκελές, (Μονάδες 12)
 β) η $K\Gamma$ είναι διάμεσος του τριγώνου $K\Lambda M$. (Μονάδες 13)

36099

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) και στις ίσες πλευρές $AB, A\Gamma$ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $A\Delta = \frac{1}{3} AB$ και $A\epsilon = \frac{1}{3} A\Gamma$. Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

- α) τα τμήματα $B\Delta$ και $\Gamma\epsilon$ είναι ίσα, (Μονάδες 5)
 β) τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $M\epsilon\Gamma$ είναι ίσα, (Μονάδες 10)
 γ) το τρίγωνο $\Delta\epsilon M$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

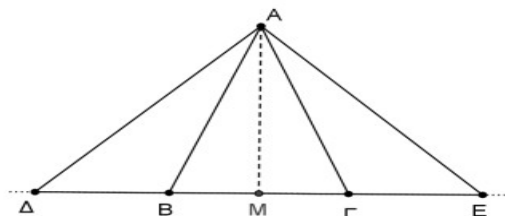
34774

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) και η διάμεσος του AM . Στην προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ και προς τα δυο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και ϵ αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma\epsilon$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}\epsilon$, (Μονάδες 6)
 β) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\epsilon$ είναι ίσα, (Μονάδες 12)
 γ) η AM είναι και διάμεσος του τριγώνου $A\Delta\epsilon$. (Μονάδες 7)

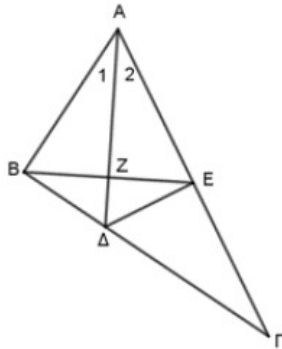


12705

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο, ώστε $A\Gamma = 2AB$. Η διχοτόμος του $A\Delta$ τέμνει την διάμεσο BE στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι:

- α) $AB = AE = \frac{A\Gamma}{2}$. (Μονάδες 7)
 β) $\Delta B = \Delta E$. (Μονάδες 8)
 γ) $AZ \perp BE$ (Μονάδες 10)



12635

Θέμα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M είναι το μέσο της βάσης του $B\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB , $A\Gamma$ προς τα B, Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα τμήματα BD και ΓE ώστε $BD = \Gamma E$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα MBD και $M\Gamma E$ είναι ίσα. (Μονάδες 15)
 β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $M\Delta E$ είναι ίση με τη γωνία $ME\Delta$. (Μονάδες 10)

34780

ΘΕΜΑ 2

Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA (προς το A) τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $A\epsilon = A\Gamma$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\Delta E = B\Gamma$. (Μονάδες 12)
 β) Αν AM είναι η διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ και η προέκταση της AM τέμνει την $E\Delta$ στο Z , να αποδείξετε ότι:
 i. τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και ABM είναι ίσα, (Μονάδες 7)
 ii. $Z\Delta = \frac{\Delta E}{2}$. (Μονάδες 6)

34511

ΘΕΜΑ 2

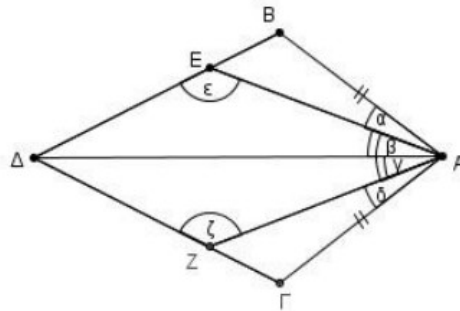
Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{\alpha} = \hat{\delta}$, $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$ και $AB=AG$, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AG\Delta$ είναι ίσα,

(Μονάδες 12)

β) οι γωνίες $\hat{\epsilon}$ και $\hat{\zeta}$ είναι ίσες.

(Μονάδες 13)



34493

ΘΕΜΑ 2

Έστω δυο ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και $A'B'\Gamma'$ ($A'B'=A'\Gamma'$).

α) Αν ισχύει $AB = A'B'$ και $\hat{A} = \hat{A'}$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

(Μονάδες 13)

β) Αν ισχύει $AG = A'\Gamma'$ και $\hat{B} = \hat{B'}$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

34784

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = AG$) και σημείο M εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο ώστε $MB = MG$.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα AMB και $AM\Gamma$ είναι ίσα

(Μονάδες 12)

β) η ευθεία AM διχοτομεί τη γωνία $\widehat{B\Gamma}$.

(Μονάδες 13)

36341

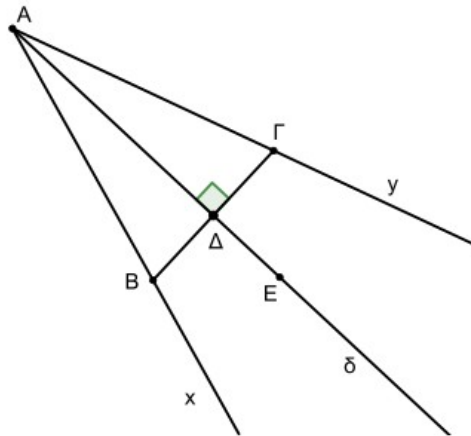
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γωνία $\chi A \gamma$ και η διχοτόμος της $A\delta$. Από τυχαίο σημείο B της $A\chi$ φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο $A\delta$, η οποία τέμνει την $A\delta$ στο σημείο Δ και την $A\gamma$ στο σημείο Γ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα AB και $A\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Αν E τυχαίο σημείο της $A\delta$, να αποδείξετε ότι το E ισαπέχει από τα B και Γ .

(Μονάδες 13)



36102

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA=B\Gamma$ και $\Delta A=\Delta\Gamma$. Οι διαγώνιοι $A\Gamma$, $B\Delta$ του τετραπλεύρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα.

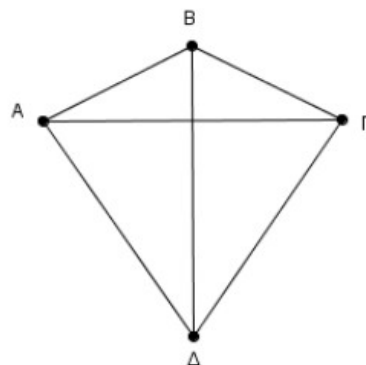
Να αποδείξετε ότι:

α) η $B\Delta$ είναι διχοτόμος των γωνιών B και Δ του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$,

(Μονάδες 12)

β) η $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$.

(Μονάδες 13)



34773

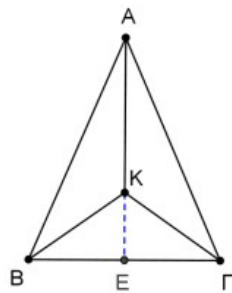
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και K εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο ώστε $KB = K\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. τα τρίγωνα BAK και $KA\Gamma$ είναι ίσα, (Μονάδες 12)
- ii. η AK είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$. (Μονάδες 6)

β) Αν η προέκταση της AK τέμνει την $B\Gamma$ στο E , τότε να δείξετε ότι η KE είναι διάμεσος του τριγώνου $BK\Gamma$. (Μονάδες 7)

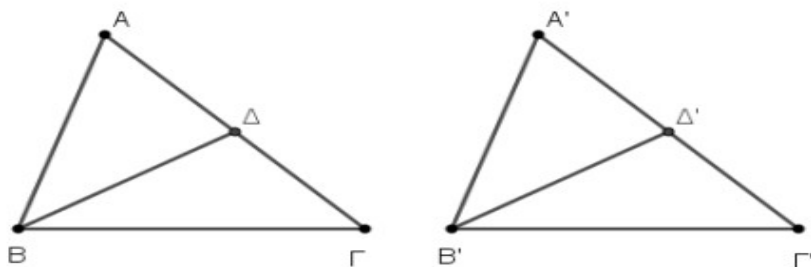


13518

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ του σχήματος με $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $AB = A'B'$. Αν οι διάμεσοι $B\Delta$ και $B'\Delta'$ είναι ίσες, να αποδείξετε ότι:

- α) $\hat{A} = \hat{A}'$ (Μονάδες 15)
- β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 2

Τα τρίγωνα ABK και $\Gamma\Delta\Lambda$ του σχήματος έχουν $AB = \Gamma\Delta = AK = \Gamma\Lambda$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABK και $\Gamma\Delta\Lambda$ είναι ίσα και ότι έχουν $BK = \Delta\Lambda$.

(Μονάδες 12)

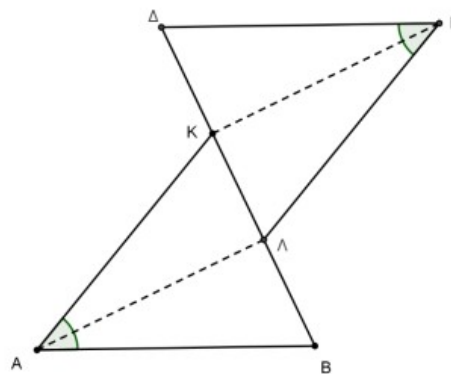
β) Έστω ότι Λ και K είναι τα μέσα των BK και $\Delta\Lambda$ αντίστοιχα:

i. Να εξετάσετε αν τα τμήματα $B\Lambda$, ΛK και $K\Delta$ είναι ίσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι οι $A\Lambda$ και ΓK είναι κάθετες στην ευθεία $K\Lambda$.

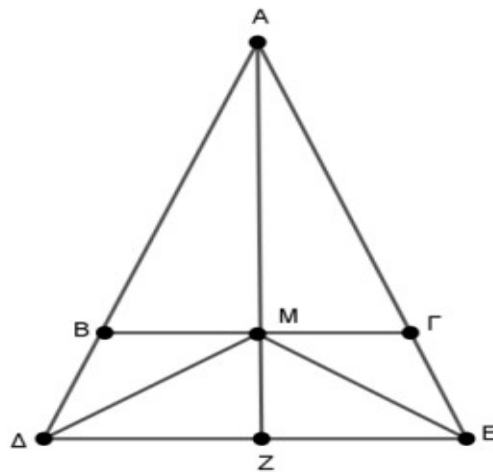
(Μονάδες 8)



Θέμα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=A\Gamma$ και M είναι το μέσο της βάσης $B\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB , $A\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα $B\Delta$, ΓE αντίστοιχα ώστε $B\Delta=\Gamma E$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $MB\Delta$ και $M\Gamma E$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)
β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $M\Delta E$ είναι ίση με τη γωνία $ME\Delta$. (Μονάδες 6)
γ) Αν η AM τέμνει την ΔE στο σημείο Z να αποδείξετε ότι η AZ είναι κάθετη στην ΔE . (Μονάδες 7)



14880

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = A\Delta$ και $\Gamma B = \Gamma\Delta$. Αν E είναι το σημείο τομής των προεκτάσεων των BA και $\Gamma\Delta$ και Z το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΔA και ΓB να αποδείξετε ότι:

α) Η ΓA είναι διχοτόμος της γωνίας $B\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 7)

β) $\Gamma Z = \Gamma E$

(Μονάδες 9)

γ) $EZ \parallel B\Delta$

(Μονάδες 9)

