

Τράπεζα Θεμάτων

Γεωμετρία Α' Λυκείου

Ευθεία και κύκλος

Θεωρία

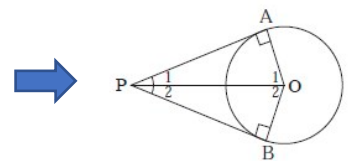
- Αν $\delta > R$, η ευθεία δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.
- Αν $\delta = R$, η ευθεία έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο.
- Αν $\delta < R$, η ευθεία έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο.

ΘΕΩΡΗΜΑ I

Μια ευθεία και ένας κύκλος έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

ΘΕΩΡΗΜΑ II

Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.



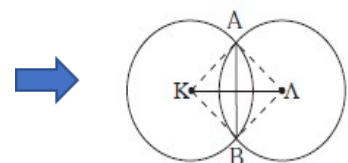
ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν P είναι ένα εξωτερικό σημείο ενός κύκλου, τότε η διακεντρική ευθεία του:

- είναι μεσοκάθετος της χορδής του κύκλου με άκρατα σημεία επαφής,
- διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων και τη γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.



Ασκήσεις

Θέμα 2 - 13759

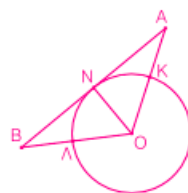
Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 6$. Έστω d η απόσταση του κέντρου O του κύκλου από μια ευθεία (ε) . Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου και της ευθείας (ε) στις εξής περιπτώσεις:

- α. $d = 3$.
- β. $d = 6$.
- γ. $d = 9$.

Θέμα 2 - 1676

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Σε σημείο N του κύκλου φέρουμε την εφαπτόμενή του, και εκατέρωθεν του N θεωρούμε σημεία A και B , τέτοια ώστε $NA = NB$. Οι OA και OB τέμνουν τον κύκλο στα K και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

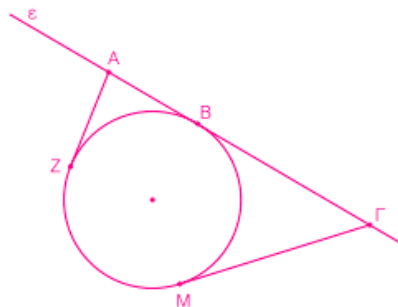
- α. Το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές.
- β. Το σημείο N είναι μέσο του τόξου $K\Lambda$.



Θέμα 2 - 13817

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Σε σημείο B του κύκλου φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία (ε) . Θεωρούμε στην ευθεία (ε) δύο σημεία A και Γ εκατέρωθεν του B έτσι ώστε $BA < B\Gamma$ και από τα σημεία αυτά, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AZ και ΓM στον κύκλο.

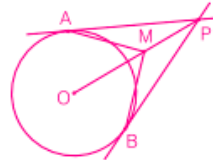
- α. Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι ίσα, αιτιολογώντας την απάντησή σας.
- β. Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = AZ + M\Gamma$.



Θέμα 2 - 1617

Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου (O, ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Αν M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος OP , να αποδείξετε ότι:

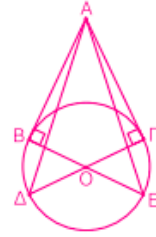
- α. τα τρίγωνα PAM και PMB είναι ίσα
- β. οι γωνίες $\hat{MAO}$ και $\hat{MBO}$ είναι ίσες.



Θέμα 2 - 1684

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Από σημείο A εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AB και AG . Τα σημεία E και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των B και Γ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

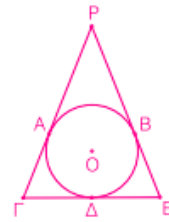
- α. Τα τρίγωνα ABE και $AG\Delta$ είναι ίσα.
- β. Τα τρίγωνα ABA και AGE είναι ίσα.



Θέμα 2 - 1751

Έστω ότι ο κύκλος (O, ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου PGE στα σημεία A , Δ και B .

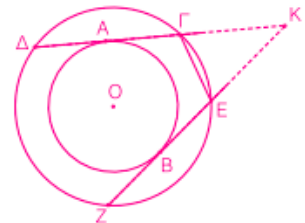
- α. Να αποδείξετε ότι:
 - i. $PG = \Gamma\Delta + AP$
 - ii. $PG - \Gamma\Delta = PE - \Delta E$
- β. Αν $AG = BE$, να αποδείξετε ότι:
 - i. Το τρίγωνο PGE είναι ισοσκελές.
 - ii. Τα σημεία P , O και Δ είναι συνευθειακά.



Θέμα 2 - 1667

Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο O και ακτίνες ρ και R ($\rho < R$). Οι χορδές $\Delta\Gamma$ και ZE του κύκλου (O, R) εφάπτονται του κύκλου (O, ρ) στα σημεία A και B αντίστοιχα.

- α. Να αποδείξετε ότι $\Delta\Gamma = ZE$.
- β. Αν οι $\Delta\Gamma$ και ZE προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $KE\Gamma$ είναι ισοσκελές.



Θέμα 2 - 13758

Δίνονται δύο κύκλοι $(K, 3)$ και $(\Lambda, 8)$. Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων, αιτιολογώντας την απάντησή σας, όταν:

- α. $K\Lambda = 13$.
- β. $K\Lambda = 2$.
- γ. $K\Lambda = 5$.
- δ. $K\Lambda = 11$.
- ε. $K\Lambda = 9$.

Θέμα 2 - 13757

Δίνονται δύο κύκλοι $(K, 2)$ και $(\Lambda, 5)$.

- α. Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.
- β. Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.
- γ. Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν ο κύκλος $(K, 2)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $(\Lambda, 5)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- δ. Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν οι κύκλοι τέμνονται; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Θέμα 2 - 12417

Έστω δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, r) , με $R = 3$, $r = 2$ και $K\Lambda = 4$. Να αποδείξετε ότι:

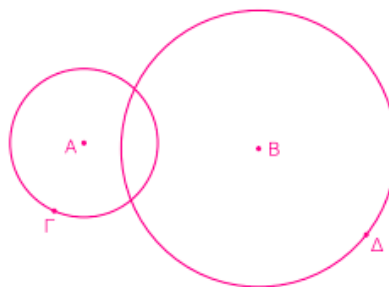
- α. Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, r) τέμνονται σε δύο σημεία, έστω A και B .
- β. $\hat{KAA} > \hat{A\Lambda K}$.

Θέμα 2 - 13836

- α. Στο διπλανό σχήμα για τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) ισχύει $\rho < R$.

Να αποδείξετε ότι $BA - AG < AB < AG + BA$.

- β. Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία A και B , τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το A του χάρτη και 5 από το B του χάρτη. Ποια είναι τα σημεία του χάρτη στα οποία μπορεί να είναι κρυμμένος ο θησαυρός;



Θέμα 2 - 13835

Τα σημεία A , K και Λ δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Το σημείο A απέχει 4 από το K και 5 από το Λ .

- α. Να αποδείξετε ότι $1 < K\Lambda < 9$.
- β. Να βρείτε ένα σημείο B του επιπέδου διαφορετικό από το A , που να απέχει 4 από το K και 5 από το Λ .

A

K

Λ

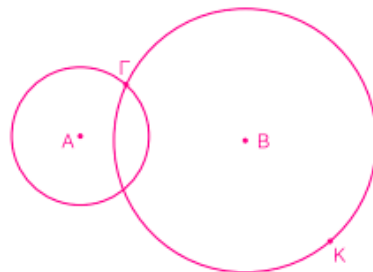
Θέμα 4 - 1752

Θεωρούμε κύκλο κέντρου O και εξωτερικό σημείο του P . Από το P φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Η διακεντρική ευθεία PO τέμνει τον κύκλο στο σημείο A . Η εφαπτόμενη του κύκλου στο A τέμνει τα PA και PB στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α. το τρίγωνο $P\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές
- β. $\Gamma A = \Delta B$
- γ. η περίμετρος του τριγώνου $P\Gamma\Delta$ είναι ίση με $PA + PB$.

Θέμα 4 - 13823

- α. Στο διπλανό σχήμα για τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) ισχύει $\rho < R$ και $AB = 6$.
 - i. Να αποδείξετε ότι $BK - \Gamma\Gamma < AB < BK + \Gamma\Gamma$.
 - ii. Παρακάτω γράφονται οι ιδιότητες 1 και 2. Ποιο σημείο από τα K και Γ έχει την ιδιότητα 1, ποιο την ιδιότητα 2 και ποιο έχει και τις δύο;



Ιδιότητα 1: «Το σημείο απέχει R από το B .»

Ιδιότητα 2: «Το σημείο απέχει ρ από το A .»

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

- β. Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία A και B , τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το A του χάρτη και 2 από το B του χάρτη. Μπορεί να είναι σωστή η πληροφορία που δίνει ο χάρτης για να βρει κανείς το θησαυρό;