

Άλγεβρα Β' Λυκείου

Επανάληψη

Συστήματα

Μέθοδος της αντικατάστασης

Λύνουμε τη μία από τις δύο εξισώσεις ως προς έναν άγνωστο, π.χ. την (1) ως προς x. Έτσι το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{cases} x = 2y + 6 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε στη δεύτερη εξίσωση το x με την παράσταση που βρήκαμε και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει

$$\begin{aligned} 3(2y + 6) + 4y &= 8 \Leftrightarrow 6y + 18 + 4y = 8 \\ &\Leftrightarrow 10y = -10 \\ &\Leftrightarrow y = -1 \end{aligned}$$

Έτσι το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{cases} x = 2y + 6 \\ y = -1 \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε την τιμή του y στην πρώτη εξίσωση και υπολογίζουμε τον άλλο άγνωστο :

$$x = 2(-1) + 6 = 4$$

Άρα λύση του συστήματος είναι το ζεύγος (4, -1).

31570

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1: 2x + y = 6$ και $\varepsilon_2: x - 2y = -2$.

α) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά το κοινό τους σημείο M.

(Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon_3: 3x + y = 8$ διέρχεται από το M.

(Μονάδες 12)

21227

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 5x - y = 5 \\ -5x + y = 2 \end{cases}$.

(Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε τις ευθείες (ε_1): $5x - y = 5$ και (ε_2): $-5x + y = 2$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το αποτέλεσμα του α) ερωτήματος.

(Μονάδες 13)

Μονοτονία Συνάρτησης

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει :

$$f(x_1) < f(x_2),$$

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) > f(x_2),$$

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο** όταν:

$$f(x) \geq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A$$

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο** όταν

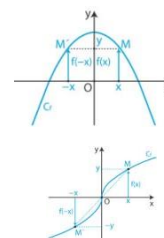
$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A$$

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , θα λέγεται **άρτια**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = f(x)$$

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , θα λέγεται **περιττή**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = -f(x)$$



32674

ΘΕΜΑ 2

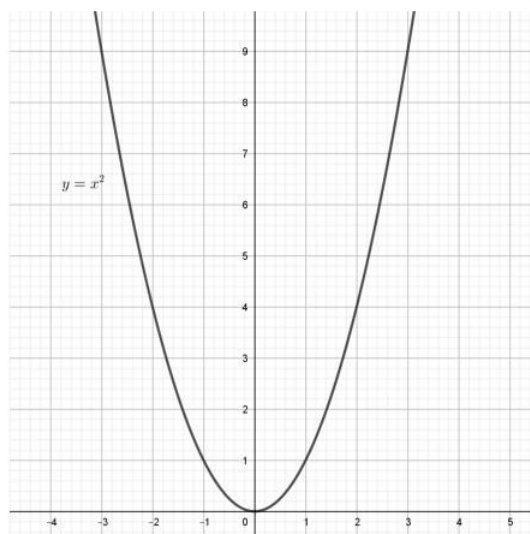
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5, x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x) = (x-2)^2 + 1$.

(Μονάδες 10)

β) Να αναφέρετε με ποιες μετατοπίσεις της $y(x) = x^2$ προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , την οποία και να χαράξετε στο σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί.

(Μονάδες 15)



Τριγωνομετρία

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

$$\epsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \epsilon\varphi^2\omega} \quad \text{και} \quad \eta\mu^2\omega = \frac{\epsilon\varphi^2\omega}{1 + \epsilon\varphi^2\omega}$$

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \quad \text{και} \quad \sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$$

$$\eta\mu(k \cdot 360^\circ + \omega) = \eta\mu\omega$$

$$\epsilon\varphi(k \cdot 360^\circ + \omega) = \epsilon\varphi\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$$

$$\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(k \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\sigma\varphi(k \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\varphi\omega$$

$$\epsilon\varphi(-\omega) = -\epsilon\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi(-\omega) = -\sigma\varphi\omega$$

$$\epsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi(180^\circ - \omega) = -\sigma\varphi\omega$$

$$\begin{aligned} \eta\mu(90^\circ - \omega) &= \sigma\upsilon\nu\omega \\ \epsilon\varphi(90^\circ - \omega) &= \sigma\varphi\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) &= \eta\mu\omega \\ \sigma\varphi(90^\circ - \omega) &= \epsilon\varphi\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta\mu(180^\circ + \omega) &= -\eta\mu\omega \\ \epsilon\varphi(180^\circ + \omega) &= \epsilon\varphi\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu(180^\circ + \omega) &= -\sigma\upsilon\nu\omega \\ \sigma\varphi(180^\circ + \omega) &= \sigma\varphi\omega \end{aligned}$$

$$\eta\mu x = \alpha$$

$$\begin{aligned} x &= 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \quad & \\ x &= 2\kappa\pi + (\pi - \theta) \end{aligned} \quad , \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \alpha$$

$$\begin{aligned} x &= 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \quad & \\ x &= 2\kappa\pi - \theta \end{aligned} \quad , \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\epsilon\varphi x = \alpha$$

$$x = \kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z}$$

18229

ΘΕΜΑ 2

Έστω θ μια γωνία για την οποία ισχύει $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{2}{3}$ και $\theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

α) Να βρείτε το $\eta\mu\theta$.

(Μονάδες 13)

β) Αν $\eta\mu\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \sigma\upsilon\nu(\pi - \theta)\sigma\upsilon\nu(-\theta) - \eta\mu(\pi - \theta)\eta\mu(-\theta).$$

(Μονάδες 12)

20867

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x$.

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A για $x = 0$.

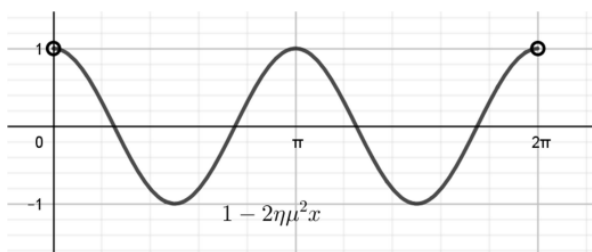
(Μονάδες 7)

β) Να δείξετε ότι $A = 1 - 2\eta\mu^2 x$.

(Μονάδες 9)

γ) Με χρήση της παρακάτω γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τύπο $1 - 2\eta\mu^2 x$ και του ερωτήματος β), να λύσετε την εξίσωση $A = 1$, για $0 < x < 2\pi$.

(Μονάδες 9)



18234

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x - 1$, $x \in [0, 2\pi]$.

α) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του x προκύπτουν αυτές;

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με τους άξονες x' και y' .

(Μονάδες 6)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 7)

δ) Αν για κάποιο αριθμό α με $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $f(\alpha) = f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

(Μονάδες 5)

15422

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - 2\eta\mu(\pi + 2x)$ με $a > 0$, η οποία έχει μέγιστη τιμή το 4.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = (a + 2)\eta\mu 2x$.

(Μονάδες 5)

β)

i. Να δείξετε ότι $a = 2$.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε την περίοδο της f .

(Μονάδες 5)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f σε διάστημα μιας περιόδου.

(Μονάδες 5)

δ) Αν $g(x) = 5 - \sigma\upsilon\nu^2 2x$, να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία της C_f με την C_g , όπου C_f, C_g οι γραφικές παραστάσεις των f, g αντίστοιχα.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Το βάθος y , σε μέτρα, του νερού σε ένα λιμάνι επηρεάζεται από το φαινόμενο της παλίρροιας κατά τη διάρκεια μιας ημέρας (εντός 24 ωρών). Το πρώτο (μετά τα μεσάνυχτα) μέγιστο βάθος είναι 5,8 μέτρα και συμβαίνει στις 3:00 π.μ. Το πρώτο ελάχιστο βάθος είναι 2,6 μέτρα και συμβαίνει στις 9:00 π.μ. Το βάθος y δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου t (σε ώρες) από τη σχέση: $y = \alpha \eta \mu(\omega t) + \beta$, με $\alpha, \omega, \beta > 0$ και $0 \leq t \leq 24$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, ω και β .

(Μονάδες 6)

β) Αν $\alpha = 1,6$, $\omega = \frac{\pi}{6}$ και $\beta = 4,2$,

i. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $y = 1,6 \cdot \eta \mu(\frac{\pi}{6}t) + 4,2$, με $0 \leq t \leq 24$.

(Μονάδες 8)

ii. Ποιο θα είναι το βάθος του νερού στις 12 το μεσημέρι;

(Μονάδες 4)

iii. Ένα μεγάλο πλοίο χρειάζεται τουλάχιστον 4,2 μέτρα βάθος νερού για να δέσει στο λιμάνι. Στη διάρκεια ποιού χρονικού διαστήματος από τις 12 το μεσημέρι και μετά θα μπορεί να δέσει με ασφάλεια;

(Μονάδες 7)

15347

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma \nu \nu^2(\pi - x) - 3\eta \mu(\frac{\pi}{2} + x) + \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2\sigma \nu \nu^2 x - 3\sigma \nu \nu x + \alpha$.

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε το α αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(\frac{\pi}{3}, 1)$.

(Μονάδες 5)

δ) Για $\alpha=2$ και $g(x) = 2\eta \mu^2 x + 9\sigma \nu \nu x - 9$, να εξετάσετε (αν υπάρχουν) κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 7)

Πολυώνυμο

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + P(\rho)$$

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$. Είναι δηλαδή

$$v = P(\rho)$$

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$.

(ακέραιων ριζών) Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$, με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0 .

18583

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$.

α)

i. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$.

(Μονάδες 10)

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$.

(Μονάδες 9)

β) Αν $P(x) = (2x - 1)(x^2 - 4)$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 6)

20943

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται γωνία x με $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ και οι παραστάσεις:

$$A = \eta\mu^2(\pi - x) + \eta\mu^2(\pi + x) + \sigma\upsilon\nu^2(-x),$$

$$B = \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $A = \eta\mu^2 x + 1$.

(Μονάδες 08)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση B .

(Μονάδες 08)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x για την οποία οι παραστάσεις A και B να είναι ίσες.

(Μονάδες 09)

18713

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - \alpha x^2 + 2x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν $P(1) = 2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$ ισούται με 15,

α) Να δείξετε ότι $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $\pi(x) = x^2 + 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

(Μονάδες 5)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\sin^3 x + \sin x = 1 - \frac{1}{2}\eta\mu^2 x$, $x \in (0, 2\pi)$.

(Μονάδες 7)

15790

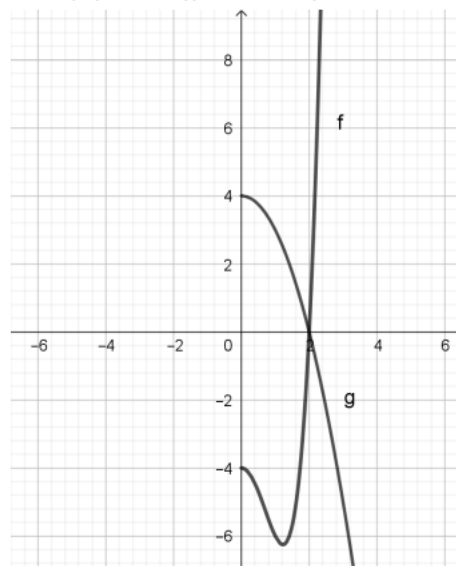
ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ και $g(x) = -x^2 + 4$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-x) = f(x)$ και $g(-x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

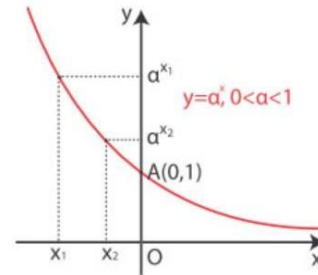
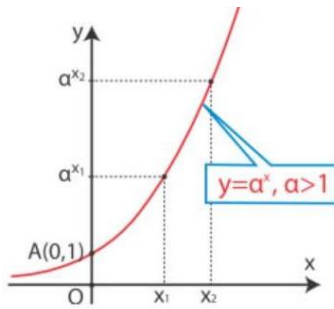
(Μονάδες 7)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μέρος των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .



Αφού μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας, να συμπληρώσετε τις γραφικές παραστάσεις σε όλο το $\mathbb{R}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Εκθετική Συνάρτηση



Λογάριθμοι

$$a^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_a \theta$$

$a > 0$ με $a \neq 1$ και $\theta > 0$,

$$\log_a a^x = x$$

$$a^{\log_a \theta} = \theta$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

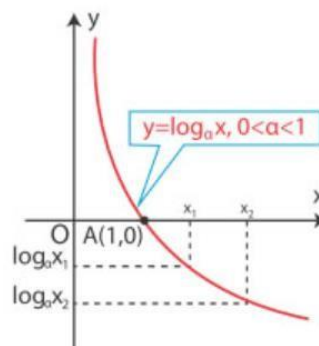
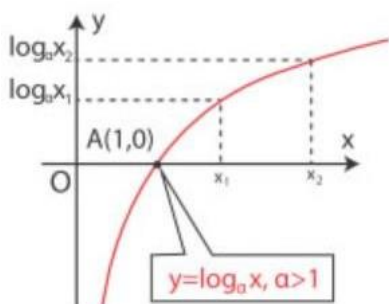
$$\log \theta = x \Leftrightarrow 10^x = \theta$$

$$\ln \theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$$

$$\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Αν $a > 0$ με $a \neq 1$, τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $k \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

1. $\log_a(\theta_1 \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$
2. $\log_a \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2$
3. $\log_a \theta^k = k \log_a \theta$



21163

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το σημείο $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$ το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f .

α) Αν η συνάρτηση f είναι η εκθετική συνάρτηση a^x , $0 < a < 1$, να βρείτε το a .

(Μονάδες 13)

β) Για $a = \frac{1}{2}$,

i) να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = a^x$.

(Μονάδες 4)

ii) να συγκρίνετε τους αριθμούς $a^{\sqrt{2}}$, $a^{\sqrt{3}}$.

(Μονάδες 8)

20854

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια.

(Μονάδες 05)

β) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$ και να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της.

(Μονάδες 05)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f .

(Μονάδες 10)

δ) Αν $g(x) = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, τότε να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 05)

20689

ΘΕΜΑ 4

α) Να λυθεί η ανίσωση $\frac{x-2}{x+1} > 0$.

(Μονάδες 07)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha-2}{\alpha+1}\right)^x$, με $x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι καλώς ορισμένη.

(Μονάδες 03)

ii. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα;

(Μονάδες 10)

iii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες η συνάρτηση f είναι σταθερή.

(Μονάδες 05)

21675

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2 + 1) = 1 - \log 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $1 - \log 2 = \log 5$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

(Μονάδες 13)

21952

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = \ln \sqrt{e} + \log \sqrt[3]{100}$. Να αποδείξετε ότι

α) $A = \frac{7}{6}$.

(Μονάδες 12)

β) $0 < \ln A < 1$.

(Μονάδες 13)

Δίνεται $e \approx 2.71$.

15676

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα xx' .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον xx' .

(Μονάδες 10)

20669

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$.

(Μονάδες 03)

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 09)

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $g(-x) + g(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 09)

ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O .

(Μονάδες 04)

21679

ΘΕΜΑ 4

Ένα ζεστό ρόφημα τη στιγμή που σερβίρεται, σε θερμοκρασία του περιβάλλοντος που είναι $T_a = 25^\circ\text{C}$, έχει θερμοκρασία $T_0 = 73^\circ\text{C}$. Η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από t λεπτά δίνεται, σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, από την συνάρτηση

$$T(t) = T_a + ce^{-\kappa t}$$

όπου όπου c , κ κατάλληλες σταθερές και $t \in [0, 60]$. Αν είναι γνωστό ότι η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από 10 λεπτά είναι 61°C , τότε:

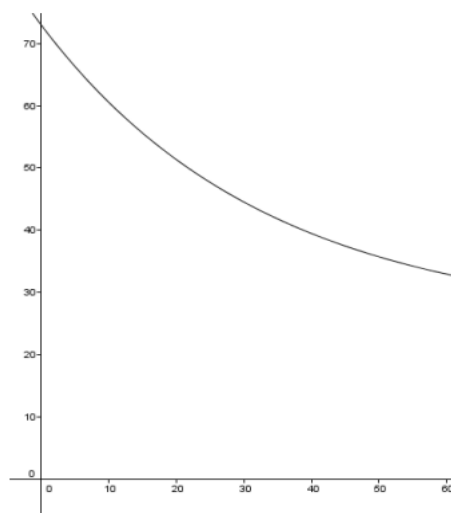
α) Να αποδείξετε ότι $c = 48$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την σταθερά κ . (Θεωρήστε $\ln 0,75 = -0,3$).

(Μονάδες 8)

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $T(t)$ φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



γ) Να βρείτε την θερμοκρασία του ροφήματος 40 λεπτά μετά το σερβίρισμα. (Θεωρήστε $e^{-1,2} = 0,3$).

(Μονάδες 5)

21950

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12}$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $\frac{\omega^3 - 8}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0$ είναι το $(-6, 2) \cup (2, +\infty)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R} - \{\ln 2\}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και του άξονα xx' .

(Μονάδες 9)

21678

ΘΕΜΑ 4

Ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού λέμε τον χρόνο που απαιτείται για να διασπασθεί η μισή από την αρχική του ποσότητα, οπότε να απομένει το 50% από αυτή.

Αν Q_0 είναι η αρχική ποσότητα ενός ραδιενεργού υλικού, τότε η ποσότητα $Q(t)$ που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον τύπο $Q(t) = Q_0 e^{-ct}$, όπου c είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το υλικό.

α) Να αποδείξετε ότι ο χρόνος ημιζωής t' δίνεται από τον τύπο $t' = -\frac{\ln 2}{c}$.

(Μονάδες 8)

Το ραδιοϊσότοπο του άνθρακα, άνθρακας -14 έχει χρόνο ημιζωής 5730 χρόνια.

β) Να αποδείξετε ότι η ποσότητα του άνθρακα -14 που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον τύπο

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\ln 2}{5730}t}$$

(Μονάδες 8)

γ) Κατά την εξέταση ενός οστού που ανακάλυψαν οι παλαιοντολόγοι διαπιστώθηκε ότι έχει απομένει σ' αυτό το 25% της ποσότητας του άνθρακα -14 που περιείχε αρχικά. Να βρείτε την ηλικία του οστού.

(Μονάδες 9)

15690

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2$, $x \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) = \ln x$.

(Μονάδες 6)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2$, $x \neq 0$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική της παράσταση είναι κάτω από την ευθεία $y = 2$.

(Μονάδες 7)