

Τράπεζα Θεμάτων
Α' Λυκείου
Συναρτήσεις

Η έννοια της συνάρτησης

37202

ΘΕΜΑ 2

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$.

(Μονάδες 12)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης.

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = \frac{1}{x-3}$.

(Μονάδες 8)

37189

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \neq 0$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2)$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{5}{2}$.

(Μονάδες 15)

37185

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 16x}{x-4}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει ότι $f(x) = x^2 + 4x$.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 32$.

(Μονάδες 10)

37175

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \begin{cases} 8-x, & \text{αν } x < 0 \\ 2x+5, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-5) = f(4)$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = 9$.

(Μονάδες 12)

35405

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-6}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι: $f(2) + f(4) = 0$.

(Μονάδες 10)

35298

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x+4, & x < 0 \\ x-1, & x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-1) = f(3)$.

(Μονάδες 13)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε: $f(x) = 0$.

(Μονάδες 12)

34446

ΘΕΜΑ 2

Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μία πόλη Α, μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση:

$$y = 35 + 0,8x$$

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά;

(Μονάδες 12)

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α;

(Μονάδες 13)

14728

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης $f(-1)$ και $f(1)$.

(Μονάδες 12)

β) Για $x \geq 0$ να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq 2$.

(Μονάδες 13)

14681

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0 \\ 2x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$

α) Να βρείτε τις τιμές $f(3)$ και $f(-3)$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x) = 8$.

(Μονάδες 13)

14781

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών μιας αντιστοίχισης $x \rightarrow y$ με το x να παίρνει μόνο τις

τιμές: $-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1$ και 3 .

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
y	0	-4	-6	$-\frac{25}{4}$	-6	0

α)

i. Να αιτιολογήσετε γιατί η παραπάνω αντιστοίχιση $x \rightarrow y$ είναι συνάρτηση.

ii. Είναι η αντιστοίχιση $y \rightarrow x$ συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

β) Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $x \rightarrow y$.

(Μονάδες 12)

13026

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ 2x, & \text{αν } x \text{ ρητός} \end{cases}$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(\sqrt{2})$ και $f(\frac{1}{2})$

(Μονάδες 10)

β) Αν x ρητός, να λύσετε την εξίσωση $[f(x)]^2 = 4x - 1$.

(Μονάδες 15)

12765

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης f για όποιους από τους αριθμούς $-1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 6$, είναι αυτό δυνατό.

(Μονάδες 12)

13032

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - 3x$ και $g(x) = \sqrt{x+5}$.

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $f(-1) = g(1)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την τιμή του x , ώστε $f(x) = g(4)$.

(Μονάδες 9)

13031

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση G , με $G(x) = \frac{2x+3}{x-4}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης G για $x = 2$, $x = 0$, $x = -\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία δεν ορίζεται η συνάρτηση G .

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την τιμή του x που αντιστοιχίζεται, μέσω της G , στο 3.

(Μονάδες 9)

12997

ΘΕΜΑ 2

Έχουμε μπροστά μας τη λίστα με τα ονοματεπώνυμα των μαθητών ενός τμήματος της Α' λυκείου ενός Γενικού Λυκείου.

Σχηματίζουμε τα σύνολα A , με στοιχεία τα μικρά ονόματα μαθητών της Α' τάξης ενός Γενικού Λυκείου και B με στοιχεία τα επώνυμα μαθητών της Α' τάξης του ίδιου Γενικού Λυκείου.

Ορίζουμε την αντιστοίχιση $f: A \rightarrow B$ σύμφωνα με την οποία αντιστοιχούμε κάθε μικρό όνομα μαθητή στο επώνυμό του και την $g: B \rightarrow A$ με την οποία αντιστοιχούμε σε κάθε επώνυμο μαθητή το μικρό του όνομα.

α) Να εξετάσετε αν η αντιστοίχιση $f: A \rightarrow B$ ορίζει πάντα συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B .

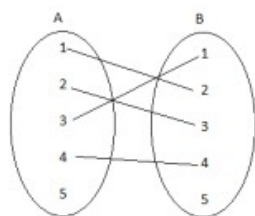
(Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε υπό ποιες προϋποθέσεις η αντιστοίχιση $g: B \rightarrow A$ αποτελεί συνάρτηση από το σύνολο B στο σύνολο A και να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη και ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή.

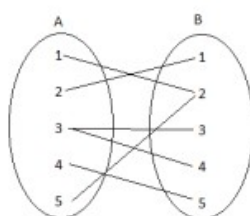
(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

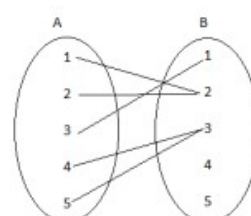
Στα παρακάτω σχήματα δίνονται 3 αντιστοιχίσεις από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B.



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

α) Να αιτιολογήσετε γιατί οι αντιστοιχίσεις των σχημάτων 1 και 2 δεν παριστάνουν συνάρτηση από το A στο B ενώ του σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το A στο B.

(Μονάδες 9)

β) Αν η αντιστοίχιση του σχήματος 3 είναι η συνάρτηση f ,

i. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

(Μονάδες 4)

ii. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο τιμών $f(A)$ της συνάρτησης f .

(Μονάδες 4)

iii. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f(2)$.

(Μονάδες 8)

36680

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 - 4x + \alpha \text{ και } g(x) = \alpha x - 5, \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

α) Αν ισχύει $f(2) = g(2)$, να βρείτε την τιμή του α .

(Μονάδες 7)

β) Για $\alpha = 1$,

i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = g(x)$.

(Μονάδες 8)

ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση: $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$.

(Μονάδες 5 + 5 = 10)

36679

ΘΕΜΑ 4

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}.$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = |x| - 2$.

(Μονάδες 9)

γ) Για $x \in A$, να λύσετε την εξίσωση $(f(x) + 2)^2 - 4f(x) - 5 = 0$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) σε βαθμούς Φαρενάιτ ($^{\circ}\text{F}$), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.

Π2: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) σε βαθμούς Κέλβιν ($^{\circ}\text{K}$), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) το 273.

α) Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν ($^{\circ}\text{K}$) και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ ($^{\circ}\text{F}$) είναι η

$$K = \frac{F - 32}{1,8} + 273$$

(Μονάδες 7)

γ) Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 278°K μέχρι 283°K . Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε $^{\circ}\text{F}$.

(Μονάδες 10)

36654

ΘΕΜΑ 4

Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν πάνω σε μπλουζάκια και ίδρυσαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Σε διάστημα ενός μηνός τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση $K(x) = 12,5x + 120$ και τα έσοδα από την πώληση τους (σε ευρώ), από τη συνάρτηση $E(x) = 15,5x$.

α) Αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, έχει έξοδα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

β) Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος;

(Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση).

(Μονάδες 6)

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

14654

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x και y τέτοια, ώστε $x+y=10$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του ορθογωνίου τριγώνου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $E(x) = \frac{1}{2}(10x - x^2)$ με $x \in (0,10)$.

(Μονάδες 8)

β) i. Να αποδείξετε ότι $E(x) \leq \frac{25}{2}$ για κάθε $x \in (0,10)$.

(Μονάδες 7)

ii. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$;

(Μονάδες 6)

γ) Αν $x=5$, ποιο συμπέρασμα προκύπτει για το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του;

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 4

Το ποσό που θα πληρώσει (σε ευρώ) ένας κάτοικος μιας πόλης A ο οποίος καταναλώνει x κυβικά μέτρα νερού σε ένα χρόνο, δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 0,5x + 12, & \text{αν } 0 \leq x \leq 30 \\ 0,7x + 6, & \text{αν } x > 30 \end{cases}.$$

α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει κάποιος αν:

- i. έλλειπε από το σπίτι του και δεν έχει καταναλώσει καθόλου νερό,

(Μονάδες 2)

- ii. έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού,

(Μονάδες 3)

- iii. έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού.

(Μονάδες 5)

β) Σε μια άλλη πόλη B , το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο:

$$g(x) = 12 + 0,6x, \text{ για } x \geq 0.$$

Ένας κάτοικος της πόλης A και ένας κάτοικος της πόλης B κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά μέτρα νερού. Αν ο κάτοικος της πόλης A πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλης B , να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με κάθετες πλευρές $AB = x$ και $A\Gamma = y$, έτσι ώστε $x + y = 10$.

α) Να εκφράσετε το εμβαδόν E του τριγώνου $AB\Gamma$ ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.

(Μονάδες 9)

β) Αν το εμβαδόν του τριγώνου είναι $E(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 10x)$, να δείξετε ότι $E(x) \leq \frac{25}{2}$, για κάθε $x \in (0, 10)$.

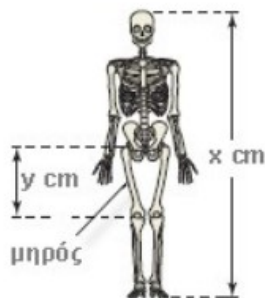
(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή του $x \in (0, 10)$ ώστε το εμβαδόν $E(x)$ να γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$. Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο $AB\Gamma$;

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του :



Γυναίκα: $y = 0,43x - 26$

Άνδρας: $y = 0,45x - 31$

α) Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 38,5 cm που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας.

(Μονάδες 8)

β) Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου 164 cm. Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 42,8 cm που ανήκει σε άντρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους.

(Μονάδες 9)

14702

ΘΕΜΑ 4

Για τις ανάγκες ενός αρχιτεκτονικού σχεδίου ενός κτηρίου, απαιτείται η κατασκευή μιας μακέτας ενός πάρκου, σχήματος ορθογώνιου ΑΒΓΔ, με διαστάσεις x και $2x - 1$, όπου $x > \frac{1}{2}$.

α) Να εκφράσετε την περίμετρο Π και το εμβαδόν E της μακέτας σε συνάρτηση του x .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνονται οι διαστάσεις της μακέτας, ώστε η περίφραξη του πάρκου στη μακέτα, να μη ξεπερνά τα 8 μέτρα.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις τιμές του x , ώστε το εμβαδόν της μακέτας, να είναι το πολύ 1 τετραγωνικό μέτρο.

(Μονάδες 10)

14629

ΘΕΜΑ 4

Σε μια γραπτή εξέταση 100 ερωτήσεων Σ-Λ (Σωστό - Λάθος) σε κάποιο Πανεπιστήμιο, κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 1 μονάδα και κάθε λανθασμένη απάντηση βαθμολογείται με $-\frac{1}{3}$ της μονάδας (για κάθε τριάδα λανθασμένων απαντήσεων αφαιρείται μια μονάδα).

α) Να αποδείξετε ότι αν ένας φοιτητής απαντήσει σωστά σε x από τις 100 ερωτήσεις, τότε η βαθμολογία του $E(x)$ δίνεται από τον τύπο $E(x) = \frac{4}{3}(x - 25)$.

(Μονάδες 7)

β) Ένας φοιτητής βαθμολογήθηκε με 88. Πόσες ήταν οι σωστές και πόσες οι λανθασμένες απαντήσεις που έδωσε;

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι η βαθμολογία ενός φοιτητή δεν μπορεί να είναι ίση με 50. Πόσες σωστές απαντήσεις πρέπει να δώσει ένας φοιτητής για να πάρει βαθμολογία μεγαλύτερη από τη βάση που είναι 50;

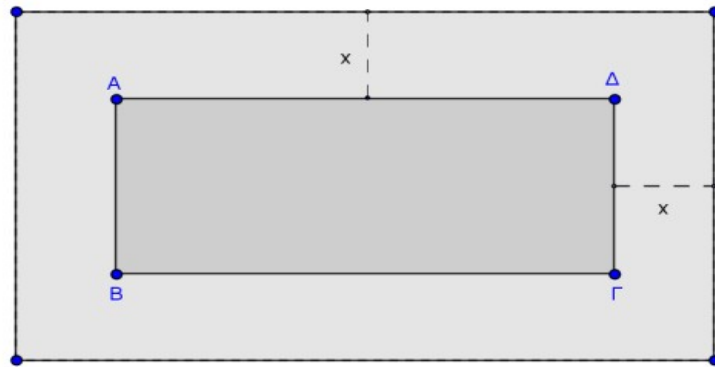
(Μονάδες 8)

δ) Το άθροισμα των επιδόσεων δυο φοιτητών ήταν 140. Πόσες ήταν οι λανθασμένες απαντήσεις και των δυο μαζί;

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με διαστάσεις $15m$ και $25m$. Ο δήμος, για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος x m ($x > 0$), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση: $E(x) = 4x^2 + 80x$, $x > 0$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδό $E = 500 m^2$.

(Μονάδες 7)

γ) Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από $500 m^2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

3688

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 15$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-5) + f(0) + f(3)$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τους άξονες.

(Μονάδες 15)

36885

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 5)

β)

i. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 0$.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(3)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

(Μονάδες 8)

35413

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 13)

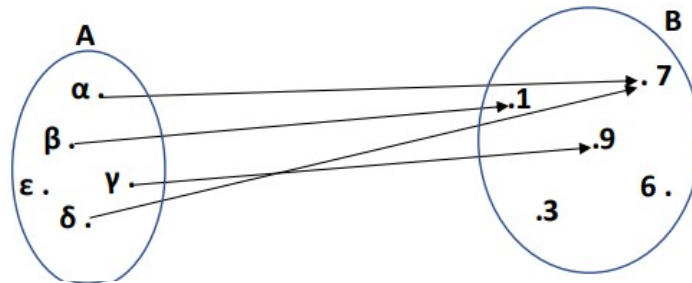
β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α , ώστε το σημείο $M\left(\alpha, \frac{1}{8}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 1

A1. Στις τέσσερις πρώτες ερωτήσεις να γράψετε στην κόλλα σας το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι σωστή ή το γράμμα Λ αν η πρόταση είναι λάθος, μετά από τον αριθμό της ερώτησης. Στην πέμπτη ερώτηση να γράψετε το γράμμα της σωστής απάντησης μετά από τον αριθμό της ερώτησης.

- i) Αν $\alpha \leq 0$ και n άρτιος, τότε ισχύει $\sqrt[n]{\alpha^n} = |\alpha|$.
- ii) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$ μπορεί να τέμνει τον άξονα $y'y$ σε ακριβώς δύο σημεία.
- iii) Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο (α_n) με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω . Το άθροισμα S_n των n πρώτων διαδοχικών όρων της (α_n) δίνεται από την σχέση $S_n = \frac{n}{2} [\alpha_1 + (n-1)\omega]$.
- iv) Η εξίσωση $\alpha \cdot x + \beta = 0$ είναι αδύνατη ως προς x , όταν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$
- v)



Στο παραπάνω σχήμα δίνεται μια αντιστοιχία στοιχείων ενός συνόλου A σε στοιχεία ενός συνόλου B. Ποιο από τα παρακάτω είναι σωστό;

- A) η αντιστοιχία αυτή παριστάνει συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B.
- B) η αντιστοιχία αυτή δεν παριστάνει συνάρτηση διότι στο 3 και στο 6 δεν αντιστοιχεί κανένα στοιχείο του A.
- Γ) η αντιστοιχία αυτή δεν παριστάνει συνάρτηση διότι τα διαφορετικά στοιχεία α και δ του συνόλου A αντιστοιχούν στο ίδιο στοιχείο του συνόλου B, το 7.
- Δ) η αντιστοιχία αυτή δεν παριστάνει συνάρτηση διότι το στοιχείο ε δεν αντιστοιχεί σε κανένα στοιχείο του B.

(M10)

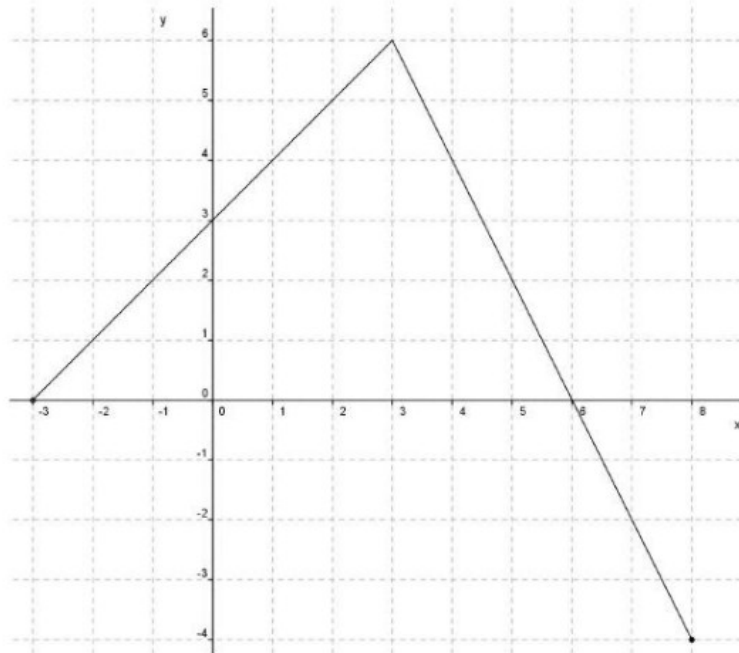
A2. Έστω x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο πραγματικές ρίζες του τριωνύμου

$$f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι, αν για την μεταβλητή x ισχύει $x < x_1$ ή $x > x_2$ τότε τότε το τριώνυμο $f(x)$ γίνεται ομόσημο του a .

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 6)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	3		
y					-2	-4

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες συντεταγμένων.

(Μονάδες 6)

δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.

(Μονάδες 7)

34159

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 9)

14628

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$, $x \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(4, 3)$.

(Μονάδες 7)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $B(-4, -3)$ είναι σημείο της C_f .

(Μονάδες 8)

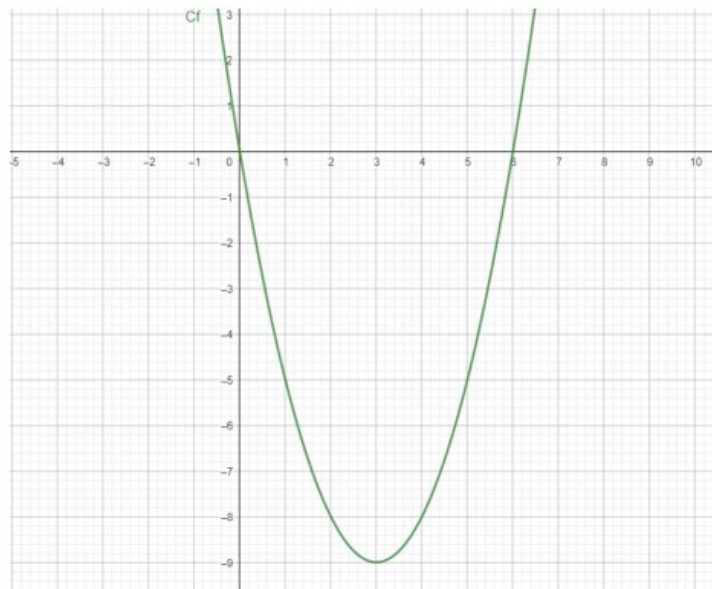
γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = 3$.

(Μονάδες 10)

15000

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Με τη βοήθεια του σχήματος:

α) Να βρείτε τις τιμές της f για $x = 0, 1, 3, 5$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x) = 0$.

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) < 0$.

(Μονάδες 11)

14603

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f , με: $f(x) = \begin{cases} 2x-5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3 < x < 10 \end{cases}$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$.

(Μονάδες 6)

β) Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον $y'y$ άξονα.

(Μονάδες 9)

14596

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x+1}$ με $x \neq -1$.

α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης και να δείξετε ότι $f(x) = x - 3$ για κάθε $x \neq -1$.

(Μονάδες 13)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$.

(Μονάδες 12)

14306

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $|y-3| < 1$.

(Μονάδες 12)

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου.

(Μονάδες 13)

14072

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

(Μονάδες 8)

β) Ανήκει το σημείο $M(1,3)$ στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ;

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 9)

12913

ΘΕΜΑ 2

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$.

(Μονάδες 8)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της παραπάνω συνάρτησης f .

(Μονάδες 5)

ii. Να δείξετε ότι $f(x) = x + 3$ για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 4)

iii. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .

(Μονάδες 8)

13322

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{x}{x^2 + 2} + \sqrt{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε (εφόσον ορίζονται) τις τιμές της συνάρτησης g για $x = 1$, $x = -2$, $x = 2$.

(Μονάδες 9)

γ) Τέμνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τον $y'y$ άξονα;

(Μονάδες 8)

12686

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(2,4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

(Μονάδες 8)

12680

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(4,3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

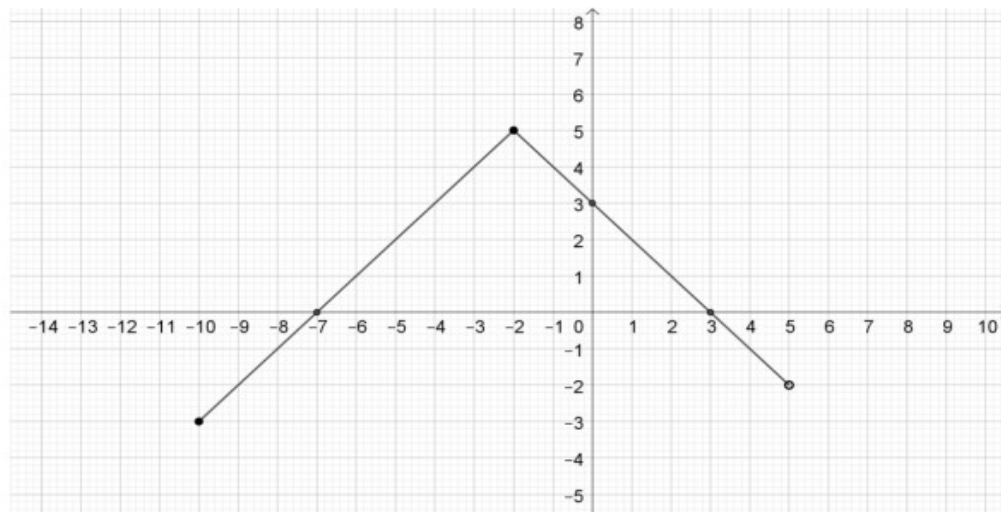
(Μονάδες 7)

γ) Να εξετάσετε αν το σημείο $N(-1,-2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και το σύνολο τιμών της $f(A)$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$.

(Μονάδες 6)

γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) = 0$.

(Μονάδες 4)

δ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) < 0$.

(Μονάδες 7)

12729

ΘΕΜΑ 2

Ένα σώμα εκτελεί κατακόρυφη βολή. Η σχέση της απόστασής του από το έδαφος (μέτρα) με το χρόνο (sec), φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα. Από τις πληροφορίες του διαγράμματος να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α) Από ποιο ύψος εκτελείται η κατακόρυφη βολή;

(Μονάδες 6)

β) Ποιο είναι το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα και ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό;

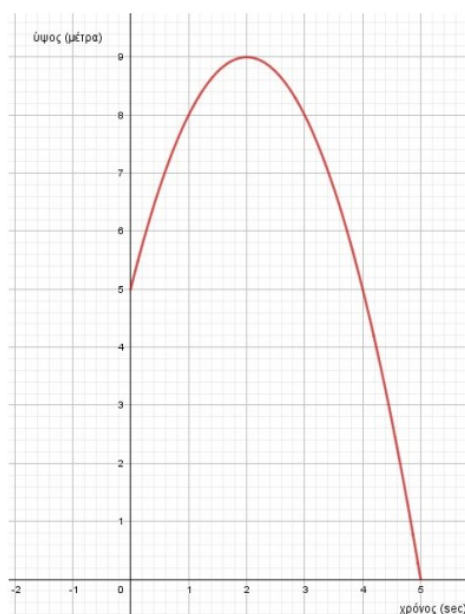
(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα βρίσκεται σε ύψος 8 μέτρα από το έδαφος.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε τη χρονική στιγμή που το σώμα συναντά το έδαφος.

(Μονάδες 6)



37190

ΘΕΜΑ 3

α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $A = x^3 - x^2 + 3x - 3$.

(Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{3}{x}$ και

$g(x) = x^2 - x + 3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(1,3)$.

(Μονάδες 12)

14754

ΘΕΜΑ 3

α) Να δείξετε ότι $x^2 + 2x + 4 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left| \frac{x^3 - 8}{x - 2} \right|$.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A .

(Μονάδες 4)

γ) Να δείξετε ότι $f(x) = x^2 + 2x + 4$ για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 6)

δ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της g , όπου $g(x) = 6x$.

(Μονάδες 8)

14752

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x - 2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A .

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι το σημείο $M(1, -\sqrt{2})$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες xx' , yy' .

(Μονάδες 10)

14604

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση f , με: $f(x) = \begin{cases} 2x-5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3 < x < 10 \end{cases}$

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$.

(Μονάδες 6)

γ) Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

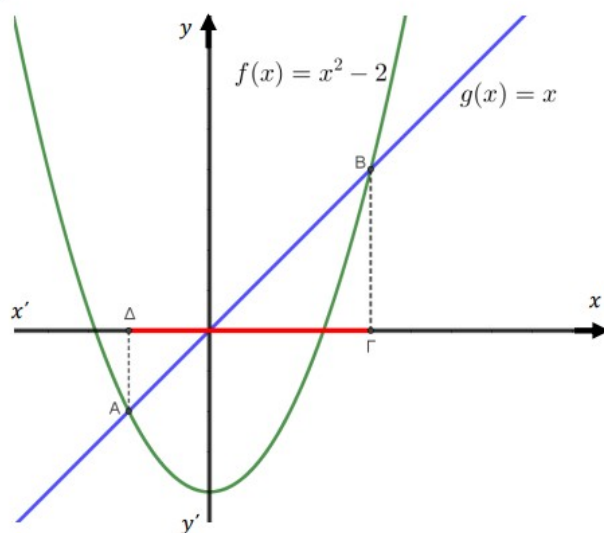
δ) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f που έχει τεταγμένη $y = 21$.

(Μονάδες 7)

14673

ΘΕΜΑ 3

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2 - 2$ και $g(x) = x$.



α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων A και B είναι $A(-1, -1)$ και $B(2, 2)$.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - x - 2 < 0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\omega^2 - |\omega| - 2 < 0$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = 4\lambda^2 - 16\lambda - 20$.

(Μονάδες 05)

β) Θεωρούμε την συνάρτηση f , που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5.$$

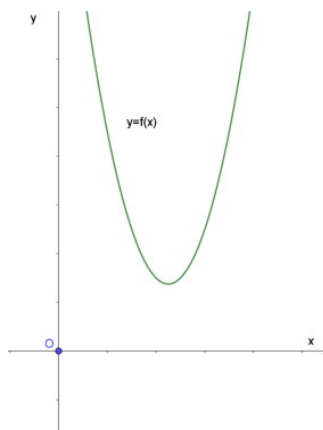
Στο καθένα από τα επόμενα σχήματα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ .

i. Για τα δύο πρώτα σχήματα δίνεται ότι η παράμετρος $\lambda \in \{-2, 4\}$. Να βρείτε σε ποια τιμή του λ αντιστοιχεί το καθένα από τα σχήματα αυτά, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

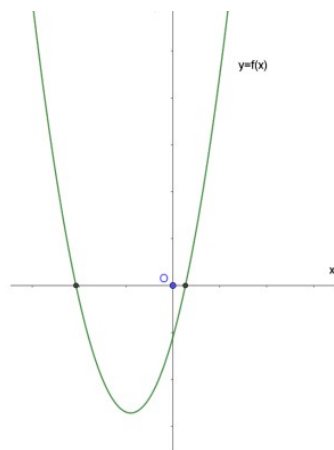
(Μονάδες 10)

ii. Για το σχήμα 3 να βρείτε τις δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει η παράμετρος $\lambda \in \mathbb{R}$, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

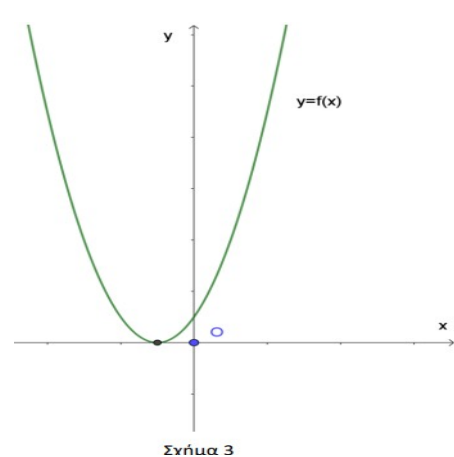
(Μονάδες 10)



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - \lambda x + 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = \lambda^2 - 4$.

(Μονάδες 05)

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g που είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ με

$$f(x) = \lambda x - \lambda + 2 \text{ και } g(x) = x^2 - \lambda + 3, \lambda \in \mathbb{R}.$$

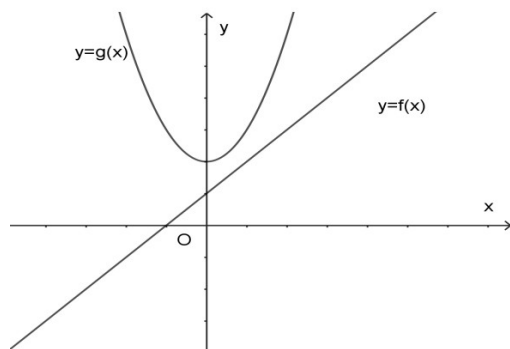
i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση από την οποία μπορούμε να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x^2 - \lambda x + 1 = 0$.

(Μονάδες 05)

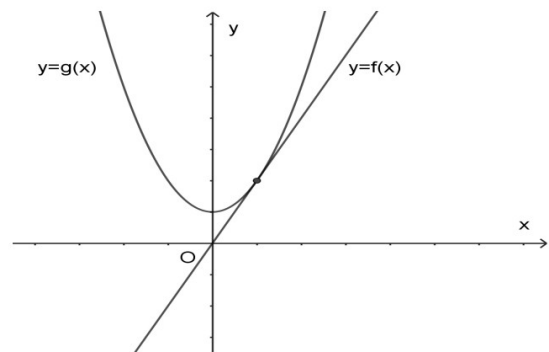
ii. Στο καθένα από τα επόμενα σχήματα δίνεται οι γραφικές παραστάσεις των δυο συναρτήσεων για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ .

Με δεδομένο ότι $\lambda \in \{1, 2, 4\}$, να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ σε καθένα από τα σχήματα, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

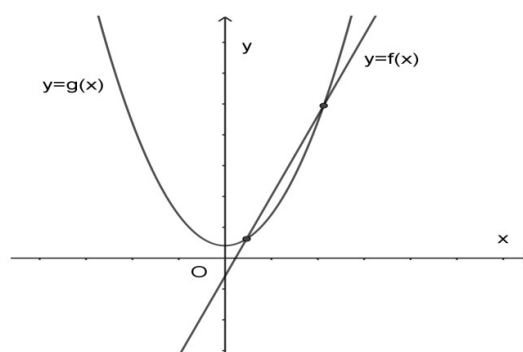
(Μονάδες 15)



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

37206

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 3x + 2$ και $g(x) = x + 1, x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

β) Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = x + a$. Να δείξετε ότι:

- i. Αν $a > 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h έχουν δύο κοινά σημεία.
- ii. Αν $a < 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h δεν έχουν κοινά σημεία.

(Μονάδες 15)

36676

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x - \alpha + 2$ και $g(x) = x^2 - \alpha + 3$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α .

(Μονάδες 7)

β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:

- i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.

(Μονάδες 4)

- ii) Για $\alpha = 2$ υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g ;
Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι ίδιο με το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2 - \alpha x + 1 = 0$ και στη συνέχεια ότι για $\alpha = 3, \alpha = -2, \alpha = 1$ έχουν αντίστοιχα δύο, ένα, κανένα σημεία τομής.

(Μονάδες 10)

36684

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , με $f(x) = x^2 - 2x$ και $g(x) = 3x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g .

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y = \alpha$, $\alpha < -1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 10)

36681

ΘΕΜΑ 4

Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f , με

$$f(x) = (\lambda + 1)x^2 - (\lambda + 1)x + 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ , η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$.

(Μονάδες 3)

β) Για $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 4)

γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2, 0)$, να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ και σε άλλο σημείο.

(Μονάδες 8)

δ) Για $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

36657

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = \lambda x + (1 - \lambda)$, $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \neq 0$, παράμετρος.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους C_f , C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f , C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό;

(Μονάδες 8)

γ) Αν $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f , C_g , να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε να ισχύει $(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2$.

(Μονάδες 9)

35385

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \beta$, $g(x) = x + \beta$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και β σταθερός πραγματικός αριθμός. Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της $g(x)$ διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{3\beta}{2}, -3 - \frac{\beta}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\beta = -1$.

(Μονάδες 6)

β) Για $\beta = -1$

(i) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ με τους άξονες $x'x$, $y'y$.

(Μονάδες 5)

(ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$.

(Μονάδες 7)

(iii) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{g(x)}{f(x)} = 3$.

(Μονάδες 7)

14786

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A(\lambda, 1)$ και $B(2 - \lambda^2, \mu)$, με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

α) Αν τα σημεία A, B είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$, να βρείτε τις τιμές των λ, μ .

(Μονάδες 7)

β) Αν επιπλέον το σημείο A βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο του ορθοκανονικού συστήματος, να βρείτε την τιμή του λ .

(Μονάδες 6)

γ) Για $\lambda = -2$ και $\mu = -1$

i. Να βρείτε την απόσταση των σημείων A, B .

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB , όπου O η αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 5)

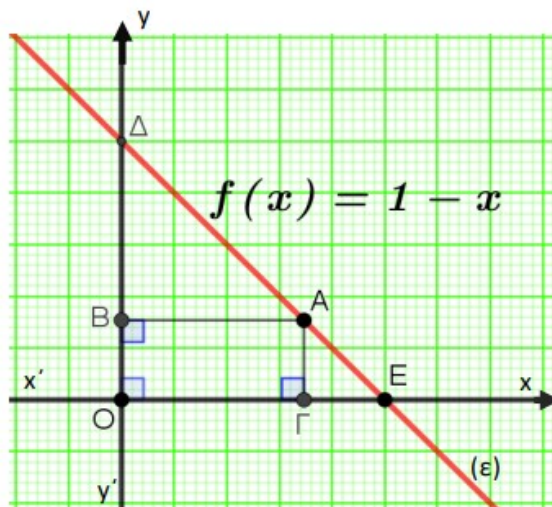
14774

ΘΕΜΑ 4

α) Να αποδείξετε ότι $x - x^2 \leq \frac{1}{4}$ για κάθε πραγματικό αριθμό x . Πότε ισχύει το ίσον;

(Μονάδες 8)

β) Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιασθεί η γραφική παράσταση (ε) της συνάρτησης $f(x) = 1 - x$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία E και Δ αντίστοιχα. Ένα μεταβλητό σημείο A , με τετμημένη α , κινείται επί της ευθείας (ε) και μεταξύ των σημείων Δ και E . Φέρνουμε από το A καθέτους στους άξονες και έστω B και Γ τα σημεία τομής με $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα.



i. Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου $ABOG$.

(Μονάδες 10)

ii. Να αποδείξετε ότι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του εμβαδού του μεταβλητού ορθογωνίου $ABOG$ είναι $\frac{1}{4}$. Για ποια θέση του σημείου A επιτυγχάνεται αυτή η τιμή;

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3\sqrt{x^2-8x+\lambda}}{x-4} + 2$, για $x \neq 4$ και $\lambda \geq 16$.

α) Να βρείτε το $\lambda \geq 16$ ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο της $M(0, -1)$.

(Μονάδες 7)

β) Αν $\lambda = 16$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 4 \\ 5, & x > 4 \end{cases}$.

(Μονάδες 7)

ii. Να σχεδιάσετε σε σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 5)

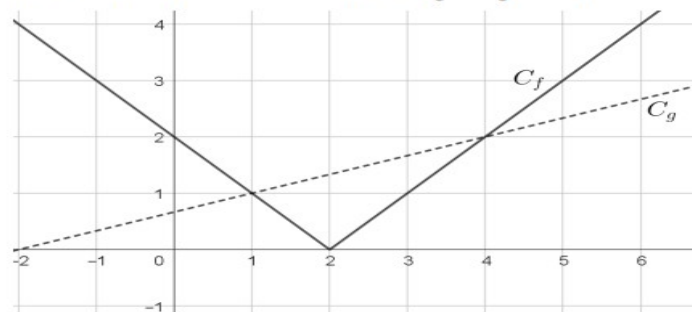
iii. Για $x < 4$, να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f των οποίων η απόστασή τους από το σημείο $A(-1, -1)$ είναι 10 μονάδες μήκους.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με:

$$f(x) = |x - 2| \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \quad \text{με } x \in \mathbb{R}.$$



α) Με βάση το σχήμα, να εκτιμήσετε την τιμή των συντεταγμένων των σημείων τομής γραφικών παραστάσεων C_f και C_g .

(Μονάδες 6)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα α).

(Μονάδες 8)

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g .

(Μονάδες 6)

δ) Με τη βοήθεια του ερωτήματος γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς η παράσταση:

$$K = \sqrt{3|2 - x| - (x + 2)}.$$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ και } g(x) = x + \alpha \text{ με } x \in \mathbb{R} \text{ και } \alpha \in \mathbb{R}.$$

α) Για $\alpha = 1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α , οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δύο σημεία.

(Μονάδες 10)

γ) Για $\alpha > 1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες.

(Μονάδες 10)

33754

ΘΕΜΑ 4

Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μια ημέρα, η εταιρία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο:

$$y = 60 + 0,20x$$

Όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε km και y το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

α) Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α, ο οποίος σε μια ημέρα, ταξίδεψε 400 Km;

(Μονάδες 5)

β) Πόσα χιλιόμετρα ταξίδεψε ένας πελάτης ο οποίος για μια ημέρα πλήρωσε 150 ευρώ;

(Μονάδες 5)

γ) Μια άλλη εταιρεία, η Β, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο:

$$y = 80 + 0,10x$$

όπου, όπως και προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε.

(Μονάδες 10)

δ) Αν

$$f(x) = 60 + 0,20x \quad \text{και} \quad g(x) = 80 + 0,10x$$

είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή κάθε μιας από τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα το ερωτήματος γ).

(Μονάδες 5)

33701

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x - 1)^2 - 4$ και $g(x) = |x - 1| + 2$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 9)

β) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 4)

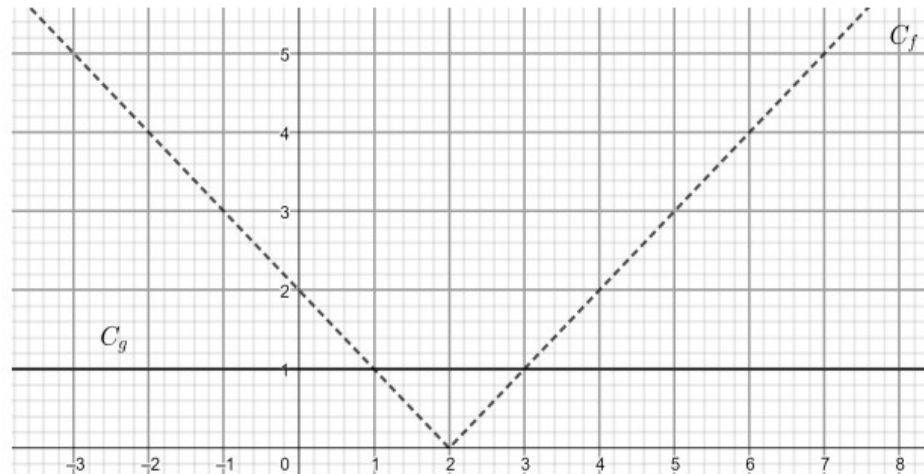
γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με

$$f(x) = |x-2| \quad \text{και} \quad g(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$



α) Με τη βοήθεια του παραπάνω σχήματος, να βρείτε

i. τα σημεία τομής των C_f και C_g .

(Μονάδες 5)

ii. τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η C_f είναι κάτω από την C_g .

(Μονάδες 5)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα αι) και αιι).

(Μονάδες 10)

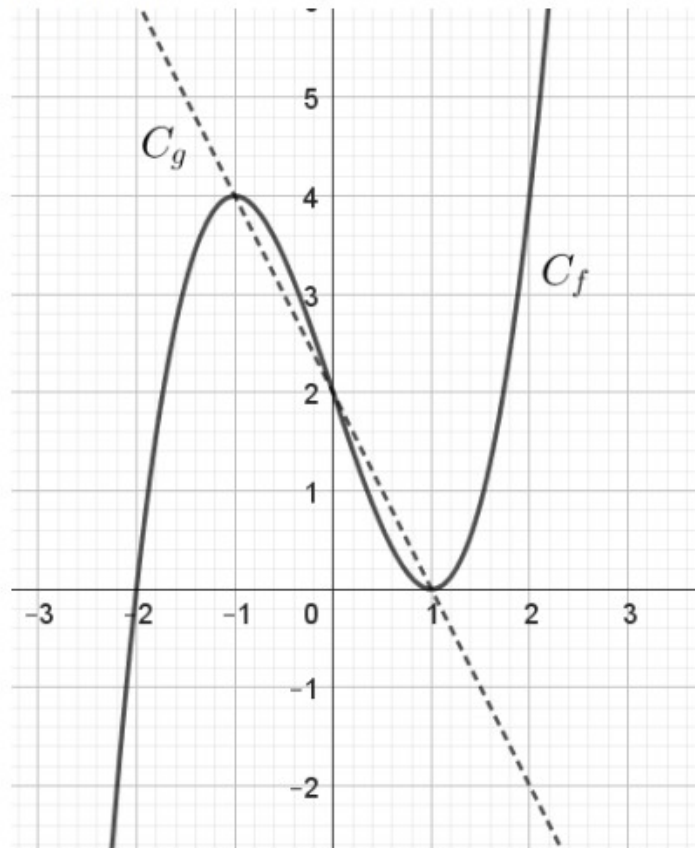
γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η παράσταση $\Lambda = \frac{\sqrt{1-f(x)}}{f(x)}$ ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.

(Μονάδες 5)

32742

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x) = -2x + 2$.



Με τη βοήθεια του σχήματος να βρείτε:

α) τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) = -2x + 2$,

(Μονάδες 6)

16153

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 1 + \frac{4}{x^2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 7)

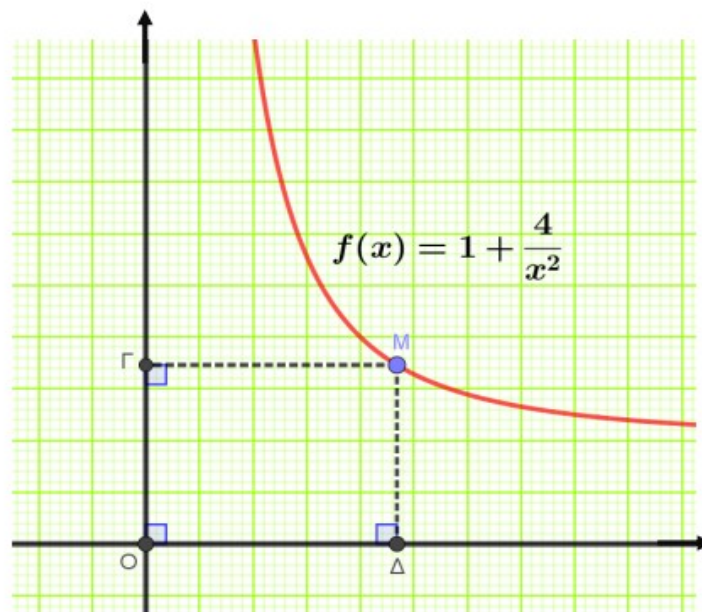
γ) Έστω $\alpha > 0$ η τετμημένη ενός τυχαίου σημείου M της γραφικής παράστασης της f . Αν ονομάσουμε E το εμβαδόν του ορθογωνίου $ΟΓΜΔ$ του σχήματος, να αποδείξετε ότι

i. $E = \alpha + \frac{4}{\alpha}$.

(Μονάδες 7)

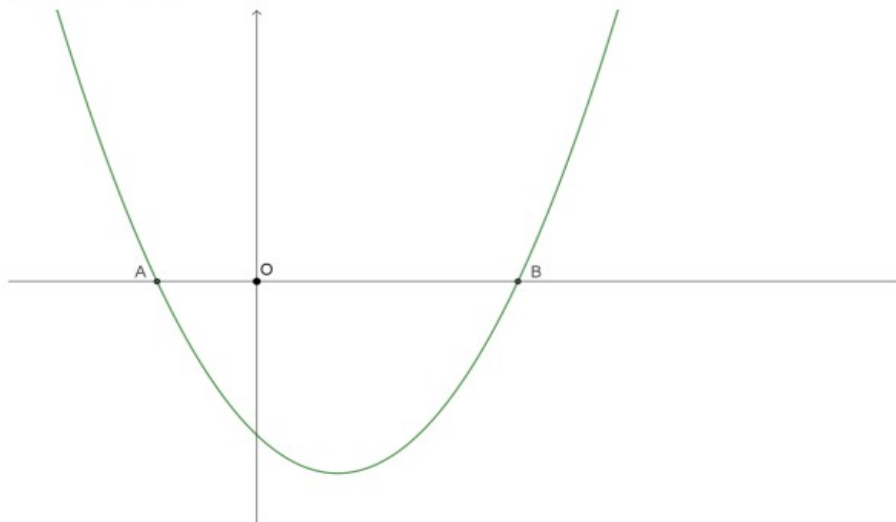
ii. $E \geq 4$.

(Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x - 1$.



Αν $A(\omega, 0)$, $B(\phi, 0)$

α) Να δείξετε ότι :

i. $\omega + \phi = 1$.

(Μονάδες 4)

ii. $\omega \cdot \phi = -1$.

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι $(OB) > (OA)$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν ένας θετικός αριθμός β είναι μεγαλύτερος από τον αντίστροφό του και η διαφορά τους ξεπερνάει τη μία μονάδα, να δείξετε ότι $\beta > \phi$.

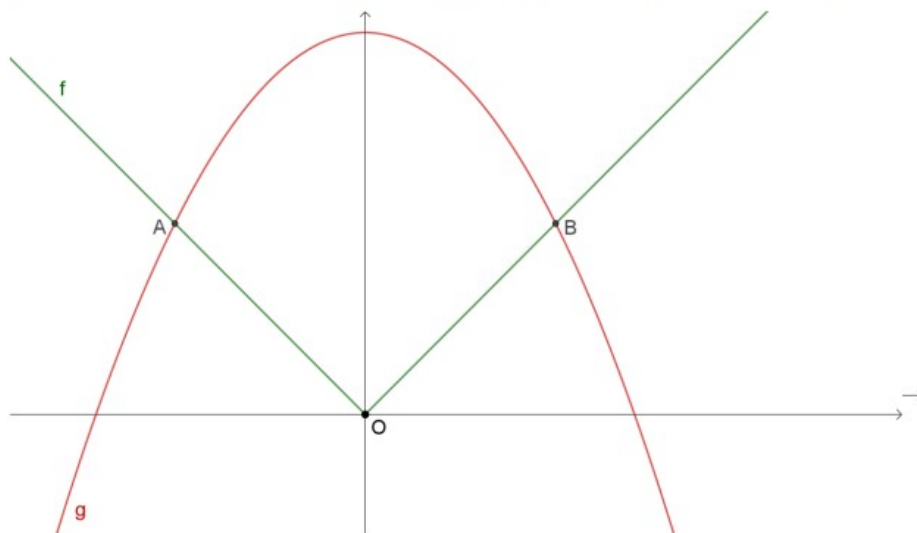
(Μονάδες 6)

δ) Να δείξετε ότι $\phi < \frac{5}{3}$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = |x|$ και $g(x) = 2 - x^2$. Τα A, B είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g .



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B .

(Μονάδες 10)

β) Αν $A(-1,1)$ και $B(1,1)$,

i. Με βάση το παραπάνω σχήμα, να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει ότι: $f(x) < g(x)$.

(Μονάδες 6)

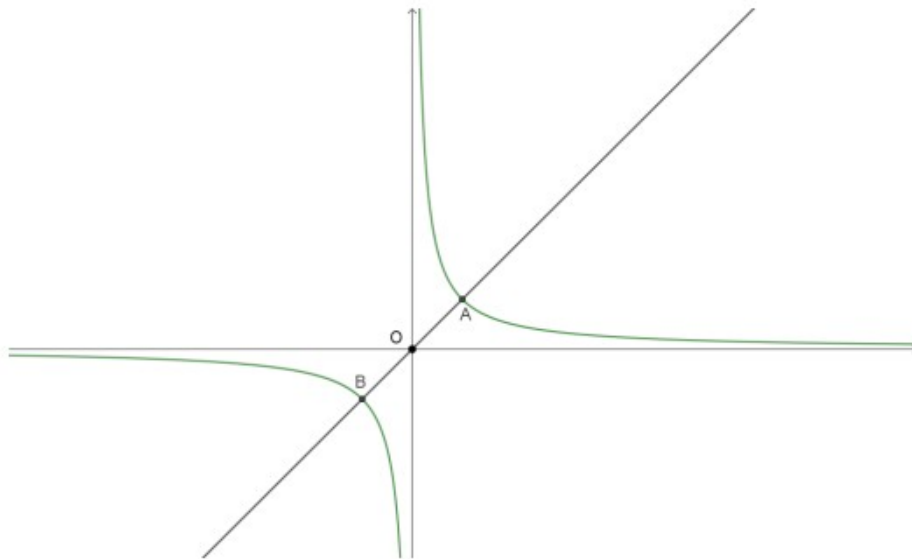
ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση $f(x) < g(x)$ επαληθεύοντας την απάντηση στο ερώτημα βi).

(Μονάδες 9)

14925

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{x}$ και η ευθεία AB με εξίσωση $y = x$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των A, B και να δείξετε ότι το $O(0,0)$ είναι το μέσο του AB .

(Μονάδες 9)

Έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της γραφική παράστασης της f .

β) Να δείξετε ότι και το συμμετρικό M' του M ως προς το $O(0,0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 8)

γ) Αν $A(1,1), B(-1,-1), M'(-x,-y)$ να δείξετε ότι $(AB) \leq (MM')$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ και να εξετάσετε πότε $(AB) = (MM')$.

(Μονάδες 8)

14810

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 7x + \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη $y = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 10$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

γ) Έστω $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$, $\alpha < \beta$ δυο σημεία της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha < \frac{2\alpha + 3\beta}{5} < \beta$

(Μονάδες 6)

ii. Να εξετάσετε αν το σημείο της C_f με τετμημένη $x_0 = \frac{2\alpha + 3\beta}{5}$ βρίσκεται πάνω ή κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 8)

14760

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση: $g(x) = \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - x - 12}} \right]^3 \cdot (x^2 - 16)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $g(x) = \frac{x+4}{x+3}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τους άξονες.

(Μονάδες 8)

14745

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $g(x)$. Κάποια σημεία της γραφικής παράστασης που έχουν ακέραιες συντεταγμένες έχουν σημειωθεί με έντονο τρόπο.

α) Να λύσετε την ανίσωση $-2 \leq g(x) \leq 0$.

(Μονάδες 6)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|g(x)| \leq 2$.

(Μονάδες 7)

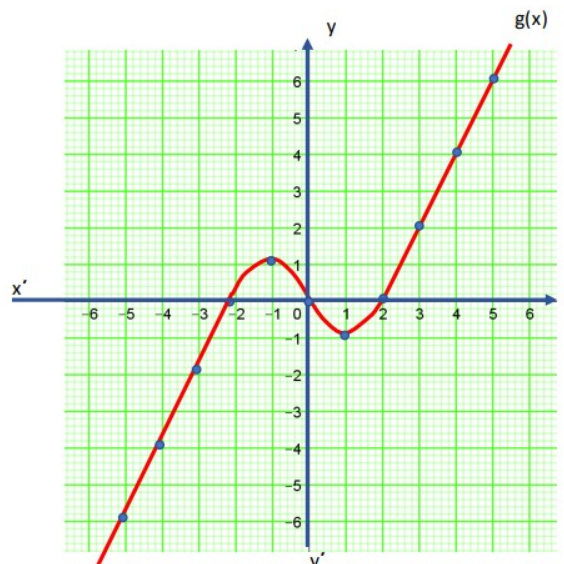
γ)

i. Να βρείτε το πλήθος λύσεων των εξισώσεων $g(x) = \frac{4}{5}$ και $g(x) = -1$.

(Μονάδες 6)

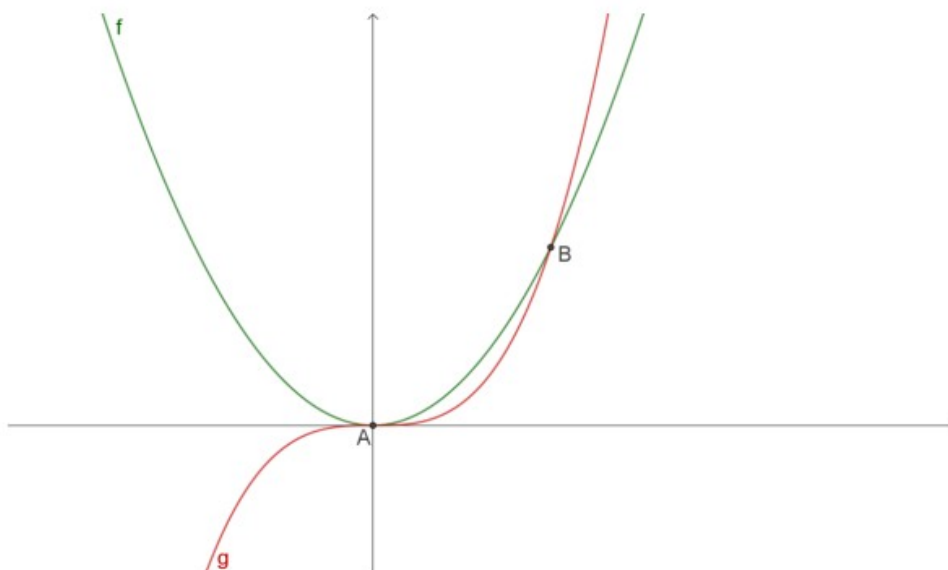
ii. Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $g(x) = k$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου k .

(Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2$ και $g(x)=x^3$ που τέμνονται στα σημεία A,B.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A,B.

(Μονάδες 8)

Έστω $A(0,0), B(1,1)$.

β) Με βάση το παραπάνω σχήμα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0,1)$ ισχύει ότι $x^3 < x^2$.

γ) Είναι ο κύβος οποιουδήποτε αριθμού μεγαλύτερος από το τετράγωνό του;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

δ) Για τον πραγματικό αριθμό $\pi = 3,1415\dots$ να δείξετε ότι

i. $(\pi-3)^3 < (\pi-3)^2$.

(Μονάδες 3)

ii. $\pi^3 - 10\pi^2 + 33\pi - 36 < 0$.

(Μονάδες 3)

14459

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ και η ευθεία $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι αν $0 < \alpha < 1$, τότε η C_f έχει με την ευθεία δυο κοινά σημεία των οποίων να βρείτε τις τετμημένες.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $|xf(x)| \leq \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 10)

14225

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(x-2)(x^2-5x+4)}{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A .

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι $f(x) = x^2 - 6x + 8$, $x \in A$.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν είναι πάνω από την ευθεία $y = 3$.

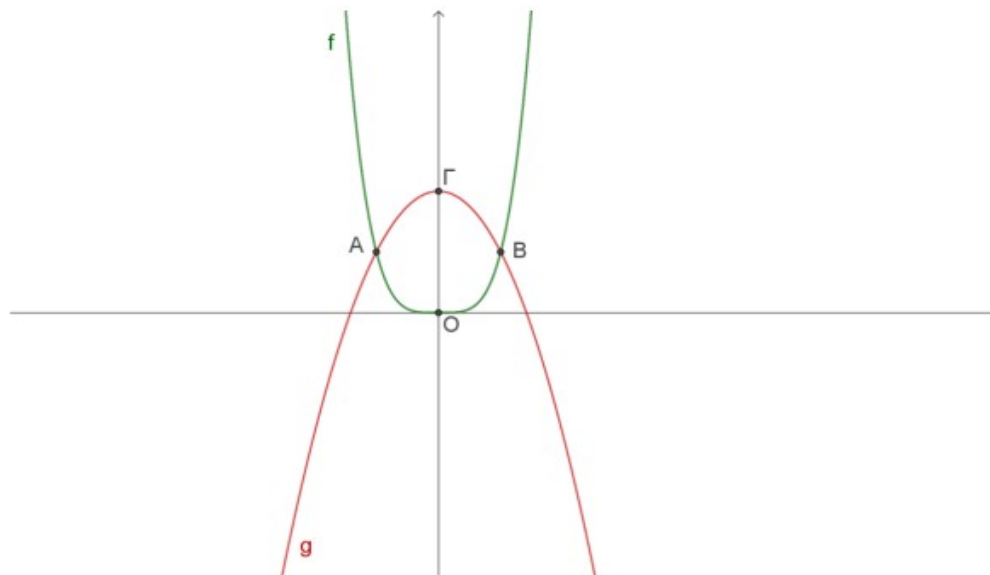
(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x) = x^4 - 6x - 4$ τέμνει την γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^4$ και $g(x)=2-x^2$. Τα σημεία A,B είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f,g ενώ Γ είναι το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα $y'y$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A,B,Γ.

(Μονάδες 9)

Αν $A(-1,1)$, $B(1,1)$, $\Gamma(0,2)$

β) Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

(Μονάδες 6)

γ) Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα β).

(Μονάδες 10)

14190

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq -\frac{1}{2}$, τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με τετμημένες α και $-\alpha - 1$ έχουν την ίδια τεταγμένη.

(Μονάδες 8)

γ) Θεωρούμε μεταβλητό σημείο M της γραφικής παράστασης της f με τετμημένη $\beta > 0$. Από το M φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και έστω A και Δ τα σημεία τομής αυτών των ευθειών με τους άξονες, όπου το A ανήκει στον $x'x$ και το Δ στον $y'y$.

Αποδείξτε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου $OAMD$ είναι $[\sqrt{2}(\beta + 1)]^2$.

(Μονάδες 9)

14185

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^3 - 2x^2 + x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι : $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 4)

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 1$.

(Μονάδες 7)

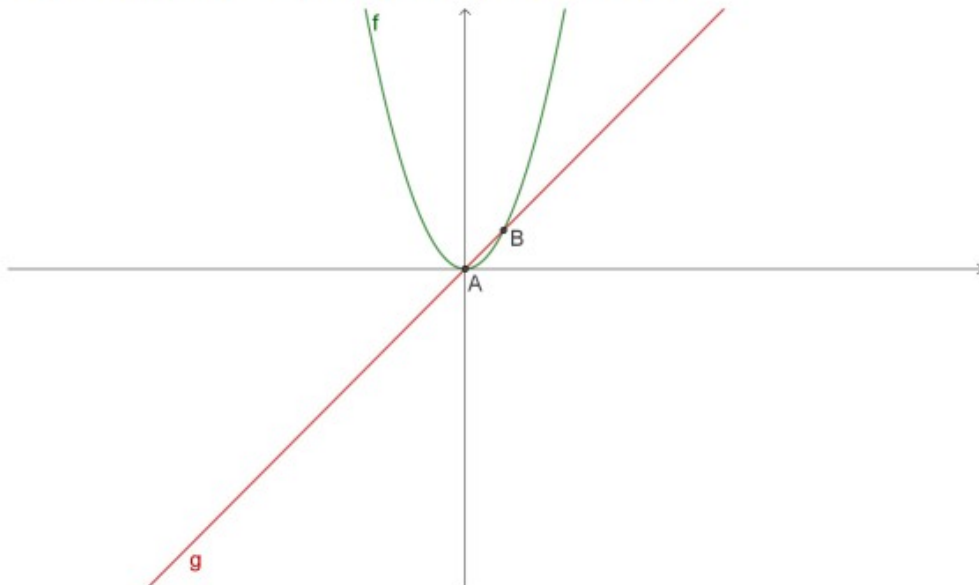
δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι πάνω από την ευθεία $y = 1$.

(Μονάδες 8)

13557

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = x$ που τέμνονται στα σημεία A, B.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B.

(Μονάδες 7)

β) Αν $A(0,0), B(1,1)$, τότε:

i. Με βάση το σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g .

(Μονάδες 5)

ii. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο i. ερώτημα.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 < \frac{\alpha}{\beta}$ για τυχαίους πραγματικούς αριθμούς α, β με $\beta \neq 0$, να δείξετε (με

βάση τα παραπάνω ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε) ότι $|\alpha| < |\beta|$.

(Μονάδες 6)

13479

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |3x - 12| - |2x - 8| - 3|x^2 - 16|$.

Αν $|x| \leq 4$, τότε:

α) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f χωρίς τις απόλυτες τιμές.

(Μονάδες 9)

β) Αν $f(x) = 3x^2 - x - 44$.

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

(Μονάδες 8)

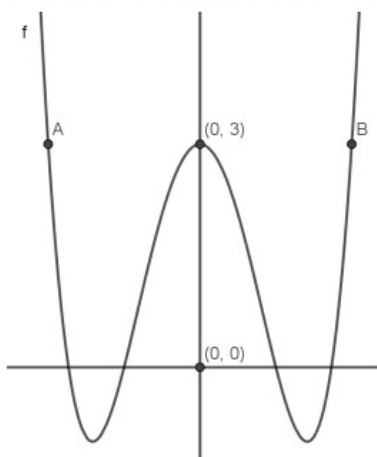
ii. Αν το σημείο $M(\mu + 1, -20)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , να βρείτε την ακέραια τιμή του μ .

(Μονάδες 8)

13454

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = ax^4 - 4x^2 + \gamma$, η οποία είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.



α) Να δείξετε ότι $\gamma = 3$.

(Μονάδες 6)

β) Αν $A(a^2 - 3, 3)$ και $B(5 - 3a, 3)$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της f , όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι $a = 1$ και να γράψετε τον τύπο της f .

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

δ) Με τη βοήθεια του σχήματος και την απάντηση του ερωτήματος γ), να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

13168

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 2\lambda x + \gamma$ με $x \in \mathbb{R}$ και παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $(0, -1)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\gamma = -1$

(Μονάδες 5)

ii. Η γραφική παράσταση της f δεν είναι κάτω από την ευθεία $y = -\lambda^2 - 1$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

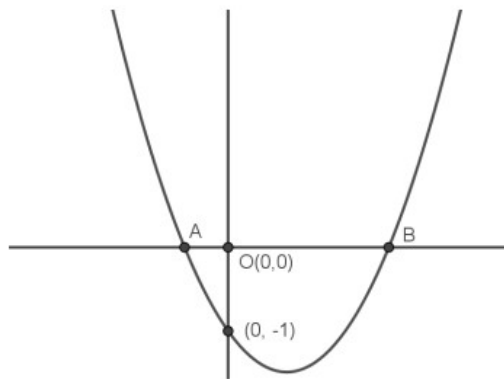
(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία A και B με συντεταγμένες $A(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0)$ και $B(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0)$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η απόσταση των A και B είναι μεγαλύτερη ή ίση του 2 για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)



13313

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^7 - x}{x^3 - x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

(Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 6)

δ) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = 3$ έχει λύση στο σύνολο A .

(Μονάδες 7)

13120

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (\lambda - 1)x - 4\lambda^2, \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

β) Για $\lambda \neq 0$ να βρείτε το πρόσημο των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το συμμετρικό του σημείου $A(4,4)$ ως προς τον άξονα $x'x$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 7)

δ) Για $\lambda = -1$ να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 5)

12941

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{9-x^2}{3-|x|}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η συνάρτηση f .

(Μονάδες 6)

α) Για τις τιμές του x που ορίζεται η συνάρτηση f να δείξετε ότι $f(x) = 3 + |x|$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τους άξονες.

(Μονάδες 6)

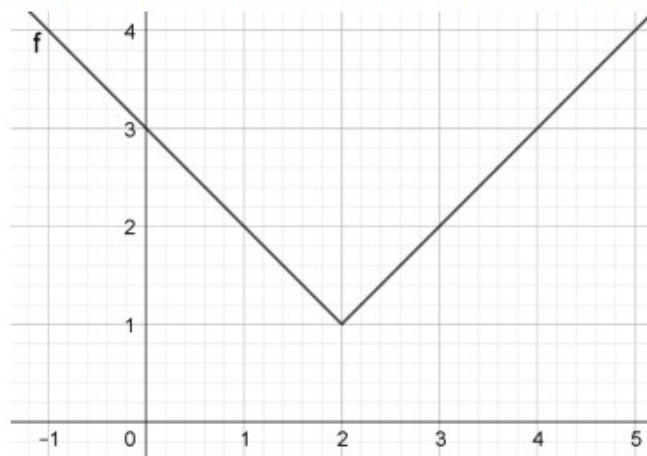
δ) Αν $g(x) = 3 - x^2$ να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

(Μονάδες 8)

12914

ΘΕΜΑ 4

Έστω η ευθεία $\varepsilon: y = c$, με παράμετρο $c \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f(x) = |x - 2| + 1$, η γραφική παράσταση της οποίας δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



α)

- i. Με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του $c \in \mathbb{R}$ η ευθεία ε και η γραφική παράσταση της f έχουν κοινά σημεία;

(Μονάδες 4)

- ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος α)i).

(Μονάδες 5)

β) Έστω ότι η ευθεία ε έχει με τη γραφική παράσταση της f δυο κοινά σημεία A, B . Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των κοινών σημείων είναι $A(3 - c, c)$ και $B(c + 1, c)$.

(Μονάδες 8)

γ)

- i. Αν A, B τα σημεία του ερωτήματος β), με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του c το μήκος του τμήματος AB είναι $(AB) \leq 2$;

(Μονάδες 4)

- ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος γ)i).

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 - x - 1$ και $g(x) = 3 - x$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ, Z.

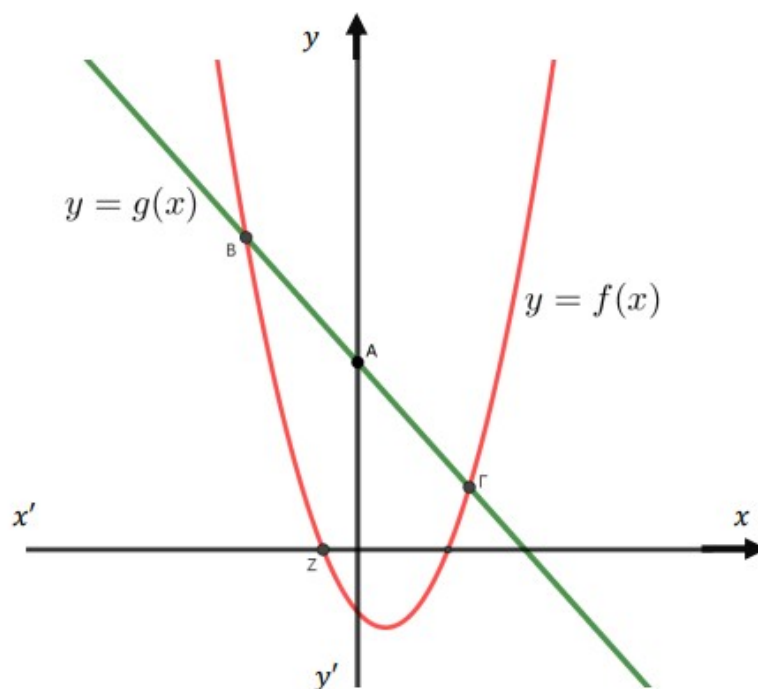
(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$ που βρίσκονται πάνω από την γραφική παράσταση της $y = g(x)$

(Μονάδες 6)

γ) Αποδείξτε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό α , η απόσταση των αριθμών $f(\alpha)$ και $-g(\alpha)$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι τουλάχιστον 1.

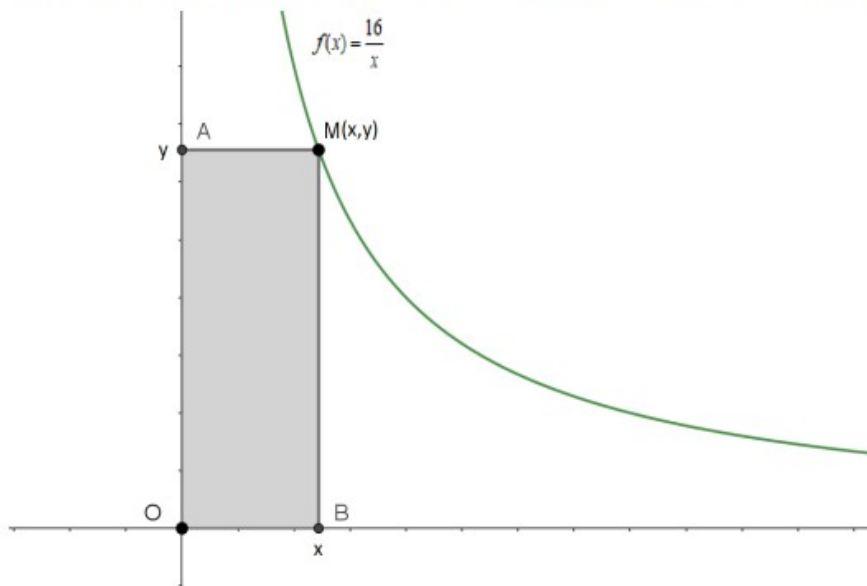
(Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{16}{x}$, $x > 0$.

Ένα σημείο $M(x,y)$ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και έστω A και B οι προβολές του M στους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να δείξετε ότι όλα τα ορθογώνια $OAMB$ που προκύπτουν για τις διάφορες θέσεις του σημείου M έχουν εμβαδόν 16 τετραγωνικές μονάδες, ενώ η περιμέτρός τους δίνεται, σε μονάδες μήκους, από τη συνάρτηση $\Pi(x) = 2x + \frac{32}{x}$, $x > 0$ όπου x η τετμημένη του M .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M ώστε το ορθογώνιο $OAMB$ να έχει περίμετρο 20 μονάδες μήκους.

(Μονάδες 7)

γ) Αν M' είναι το σημείο της γραφικής παράστασης της f ώστε το ορθογώνιο $OAM'B$ να είναι τετράγωνο τότε:

i. Να δείξετε ότι το M' έχει τετμημένη 4.

(Μονάδες 4)

ii. Να δείξετε ότι το τετράγωνο $OAM'B$ έχει τη μικρότερη περίμετρο από όλα τα ορθογώνια $OAMB$, δηλαδή ότι $\Pi(x) \geq \Pi(4)$ για κάθε $x > 0$.

(Μονάδες 6)

13030

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$ και $g(x) = |x + 3|$.

Να βρείτε:

α) τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 10)

β) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g .

(Μονάδες 7)

γ) τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g .

(Μονάδες 8)

12944

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + \frac{1}{x}$ και $g(x) = x - \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = f(2) + g(2) - f\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)$$

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $(f(x))^2 - (g(x))^2 = 4$ για οποιοδήποτε αριθμό x με $x \neq 0$

(Μονάδες 8)

γ) Θεωρούμε την ευθεία $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να αποδείξετε ότι $|\alpha| \geq 2$.

(Μονάδες 10)

12788

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^2$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(\sqrt{3}) + f(-\sqrt{3}) = 8$

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της f , με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς, τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 4$

(Μονάδες 9)

γ) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha \neq \beta$ ώστε να ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 2$

(Μονάδες 9)

Η Συνάρτηση $f(x)=ax + \beta$

14731

ΘΕΜΑ 1

A. Σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε Σωστό (Σ), αν η πρόταση που διατυπώνεται είναι σωστή και Λάθος (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α) Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \geq 0$ ισχύει ότι $\sqrt{\alpha+\beta}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$.
- β) Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει ότι $|\alpha+\beta| \leq |-\alpha|+|\beta|$.
- γ) Κάθε ευθεία η οποία έχει θετική κλίση, σχηματίζει με τον άξονα x' χοξεία γωνία.
- δ) Η εξίσωση $x^3=-8$ είναι αδύνατη στους πραγματικούς αριθμούς.
- ε) Αν είναι $\alpha\beta>1$, τότε θα ισχύει αναγκαστικά $\alpha>1$ και $\beta>1$.

(Μονάδες 15)

B. Δίνεται η εξίσωση $ax^2+\beta x+\gamma=0, \alpha \neq 0$. Αν έχει δύο πραγματικές ρίζες x_1, x_2 , τότε να αποδείξετε ότι το άθροισμά τους είναι ίσο με $x_1+x_2=\frac{-\beta}{\alpha}$.

(Μονάδες 10)

14829

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμία από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

- i. Αν $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ τότε $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$
- ii. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, ισχύει $|- \alpha| = \alpha$.
- iii. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$.
- iv. Αν το τριώνυμο $ax^2 + \beta x + \gamma$ διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$.
- v. Αν οι ευθείες $\varepsilon_1: y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $\varepsilon_2: y = \alpha_2 x + \beta_2$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, τότε $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 \neq \beta_2$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι τρεις αριθμοί α, β και γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$.

(Μονάδες 15)

21239

ΘΕΜΑ 2

Η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -2)$ και διέρχεται από το σημείο $B(-2, -4)$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς α, β .

(Μονάδες 12)

β) Για $\alpha = 1$ και $\beta = -2$, να βρείτε για ποιες τιμές του x η ευθεία βρίσκεται κάτω από τον $x'x$ άξονα.

(Μονάδες 13)

37183

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(0) = 5 \text{ και } f(1) = 3.$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = 5$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία, στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 7)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 8)

35201

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 6)$, $B(-1, 4)$, να βρείτε τις τιμές των α, β .

(Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha = 1$ και $\beta = 5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 12)

14641

ΘΕΜΑ 2

Η παρακάτω ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε .

(Μονάδες 7)

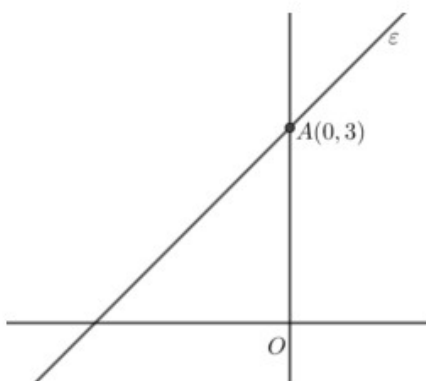
β) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας ε .

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$.

(Δίνεται ότι $\varepsilon\varphi 45^\circ = 1$)

(Μονάδες 9)



14575

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x$, για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 8)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 9)

13471

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τα σημεία $A(2, 1)$, $B(-1, -5)$, $\Gamma(27, 50)$ και την ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x - 3$. Αν το σημείο

A είναι πάνω στην ευθεία, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.

(Μονάδες 11)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο B είναι πάνω στην ευθεία. Κατόπιν να εξετάσετε αν και το σημείο Γ είναι πάνω στην ίδια ευθεία.

(Μονάδες 14)

13400

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = -x + 2$.

α) Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες.

(Μονάδες 9)

γ) Να σχεδιάσετε την ευθεία ε .

(Μονάδες 7)

13318

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = -x + \sqrt{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$, $f(\sqrt{2})$, $f(-\sqrt{2})$, $[f(-\sqrt{2})]^2$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 13)

13054

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = (3\alpha + 4)x - 4$ και $\varepsilon_2: y = (3 - 4\alpha)x + 4$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Αν $\alpha = 1$, να βρείτε:

i. Τις εξισώσεις των ευθειών.

(Μονάδες 6)

ii. Το είδος της γωνίας που σχηματίζει καθεμιά από τις ευθείες με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες.

(Μονάδες 13)

13178

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το σημείο $M(3, 4)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το M και από το $O(0, 0)$.

(Μονάδες 9)

β) Δίνεται το σημείο $N(-3, \lambda)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$, το οποίο ανήκει στην ευθεία OM .

i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

ii. Αν $N(-3, -4)$ να εξετάσετε αν τα σημεία M, N είναι συμμετρικά ως προς το O .

(Μονάδες 8)

13033

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): y = -\frac{1}{2}x + 4$.

α)

i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε) .

(Μονάδες 4)

ii. Είναι οξεία ή αμβλεία η γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον x' άξονα;

(Μονάδες 4)

β) Να εξετάσετε ποια από τα σημεία $A(6, 1)$, $B(-2, 3)$ και $\Gamma(8, 0)$ είναι σημεία της ευθείας (ε) .

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο $(k, 5)$ να είναι σημείο της ευθείας (ε) .

(Μονάδες 8)

12939

ΘΕΜΑ 2

Έστω η ευθεία $\varepsilon_1: y = \alpha x + \beta$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $A(0, -6)$ και τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(-3, 0)$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β .

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την ευθεία ε_2 που είναι παράλληλη με την ε_1 και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 6)

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 6)

12630

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία $y = \alpha x + \beta$, η οποία έχει κλίση -2 και διέρχεται από το σημείο $(1, 1)$.

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το σημείο τομής της παραπάνω ευθείας με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 8)

γ) Να χαράξετε σε σύστημα συντεταγμένων την παραπάνω ευθεία.

(Μονάδες 9)

12730

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία $y = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β , αν η γραφική παράσταση της f σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° και διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$. Δίνεται ότι $\varepsilon\varphi 45^\circ = 1$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και κ , αν η ευθεία $y = \lambda x + \kappa$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 3$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 2 .

(Μονάδες 12)

12684

ΘΕΜΑ 2

Η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x - 2$ και μια ευθεία (ε_2) διέρχεται από το σημείο A $(-4, 1)$

και είναι παράλληλη στην (ε_1) .

α) Να γράψετε την κλίση της ευθείας (ε_1) και το σημείο τομής της ευθείας αυτής με τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε_2) με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

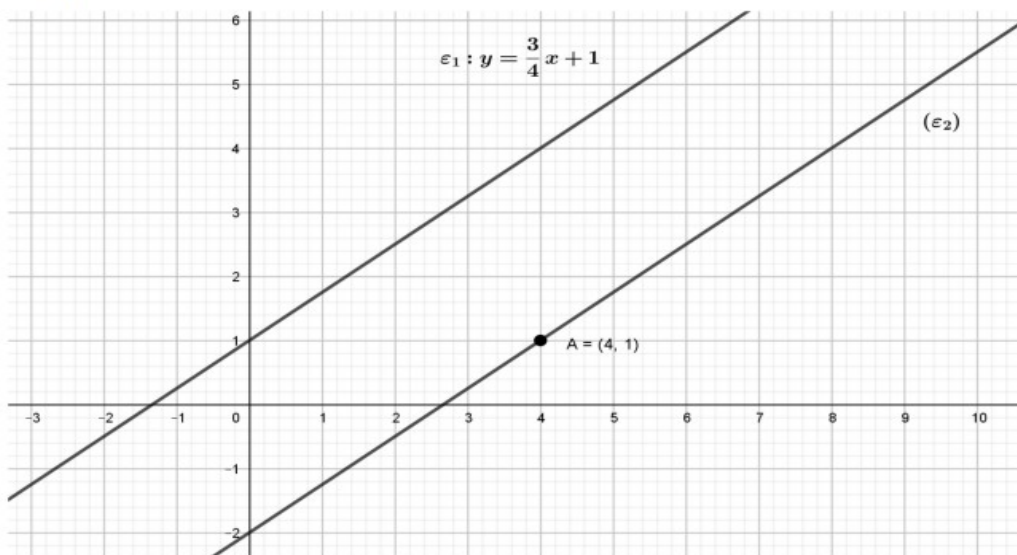
γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2) . Ποια είναι τα σημεία τομής της ευθείας αυτής με τους άξονες; (Μονάδες 9)

12631

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε χαράξει δυο ευθείες, την (ε_1) με εξίσωση

$y = \frac{3}{4}x + 1$ και την (ε_2) που διέρχεται από το σημείο A $(4, 1)$ και είναι παράλληλη στην (ε_1) .



α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε_2) .

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2) .

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας (ε_2) με τους άξονες.

(Μονάδες 9)

12856

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ευθεία $\epsilon: y=ax+5$. Αν η ευθεία $\delta: y=-3x-6$ είναι παράλληλη στην (ϵ) , τότε:

α)

i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας ϵ . (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ϵ με τον άξονα $x'x$; (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε σε ποια σημεία η ευθεία ϵ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 12)

14576

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{2x^2 - 6|x|}{2|x| - 6}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

(Μονάδες 10)

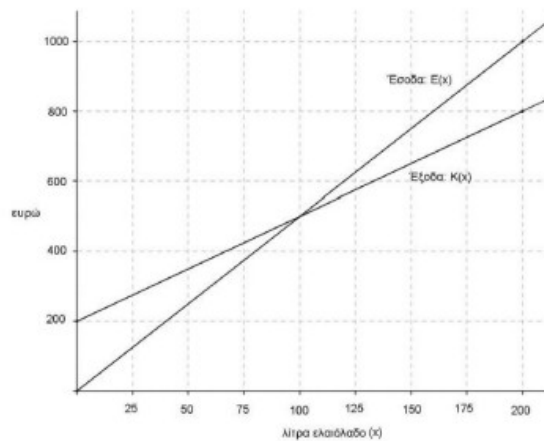
β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = |x|$, για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 10)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , για $x > 0$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4



Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο. Στο παραπάνω σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα $K(x)$ και τα έσοδα $E(x)$ από την πώληση x λίτρων λαδιού σε ένα μήνα.

α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε τη σημασία του.

(Μονάδες 6)

β) Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας;

(Μονάδες 5)

γ) Πόσα λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημιά;

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων $K(x)$ και $E(x)$ και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος γ)

(Μονάδες 8)

36683

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f , με

$$f(x) = \begin{cases} -x+2, & \text{αν } x < 0 \\ x+2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 3)

β)

i) Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y=3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους.

(Μονάδες 5)

ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ)

i) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α , η ευθεία $y=\alpha$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ii) Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (γι), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=\alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

(Μονάδες 8)

36682

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται η συνάρτηση $f(x)=x^2+x+1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.

(Μονάδες 10)

γ) Έστω $M(x,y)$ σημείο της C_f . Αν για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει: $|2x-1| < 3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.

(Μονάδες 10)

36659

ΘΕΜΑ 4

Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

α) Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες;

(Μονάδες 5)

β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

i. Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα

$$\text{για να κάψει 360 θερμίδες είναι: } f(x) = 30 - \frac{3}{4}x.$$

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος β (i), στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.

(Μονάδες 4)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Μονάδες 9)

36655

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

(Μονάδες 7)

γ) Αν A και B είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα A και B .

(Μονάδες 8)

36652

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4x + 2$ και $g(x) = x^2 - 9$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3, 0)$ και $(-3, 0)$.

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$ και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε ένα σημείο του ημιάξονα Ox .

(Μονάδες 7)

33895

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^2 - 2(\alpha + 3)x + 3\alpha}{2x - 3}$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2x - \alpha$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Σε μια πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία ταξί με το όνομα «RED» χρεώνει τον πελάτη 1 ευρώ με την είσοδο στο ταξί και 0,6 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει. Μια άλλη εταιρεία ταξί με το όνομα «YELLOW» χρεώνει τον πελάτη 2 ευρώ με την είσοδο στο ταξί και 0,4 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει. Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα.

α)

- i. Αν $f(x)$ είναι το ποσό (σε ευρώ) που χρεώνει η εταιρεία «RED» για μια διαδρομή x χιλιομέτρων, να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

$x \text{ (km)}$	0	2	8
$f(x)$ (ευρώ)			

(Μονάδες 3)

- ii. Αν $g(x)$ είναι το ποσό (σε ευρώ) που χρεώνει η εταιρεία «YELLOW» για μια διαδρομή x χιλιομέτρων, να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

$x \text{ (km)}$			
$g(x)$ (ευρώ)	2	3,2	4,8

(Μονάδες 3)

- β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 8)

- γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των f , g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας «RED» είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

- δ) Αν δυο πελάτες A και B μετακινηθούν με την εταιρεία «RED» και ο πελάτης A διανύσει 3 χιλιόμετρα περισσότερα από τον B , να βρείτε πόσα περισσότερα χρήματα θα πληρώσει ο A σε σχέση με τον B .

(Μονάδες 3)

33894

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} x - 3, & x > 2 \\ -x + 3, & x < 2 \end{cases}$.

(Μονάδες 7)

γ)

i. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 4)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα έχει σχεδιασθεί σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x) = \alpha x + \beta$, όπου α, β σταθεροί μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί και $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τα σημεία A και B της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$, των οποίων οι προβολές στους άξονες $x'x$, $y'y$ είναι τα σημεία H, Δ και K, E αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι τα ευθύγραμμο τμήματα HK και ΔE έχουν μήκη 6 και 9 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -\frac{3}{2}$

(Μονάδες 9)

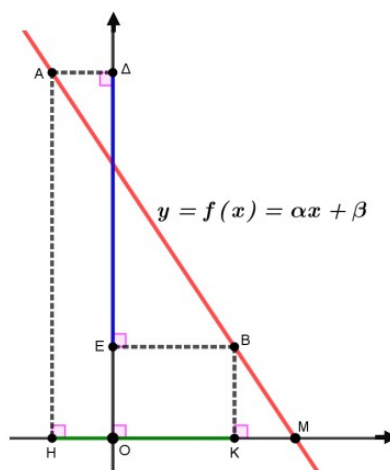
β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το σημείο M έχει τετμημένη 6, να αποδείξετε ότι $\beta = 9$.

(Μονάδες 7)

γ) Υποθέτουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα OK έχει μήκος 4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας

(δ) η οποία διέρχεται από το σημείο E και είναι παράλληλη προς την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$.

(Μονάδες 9)

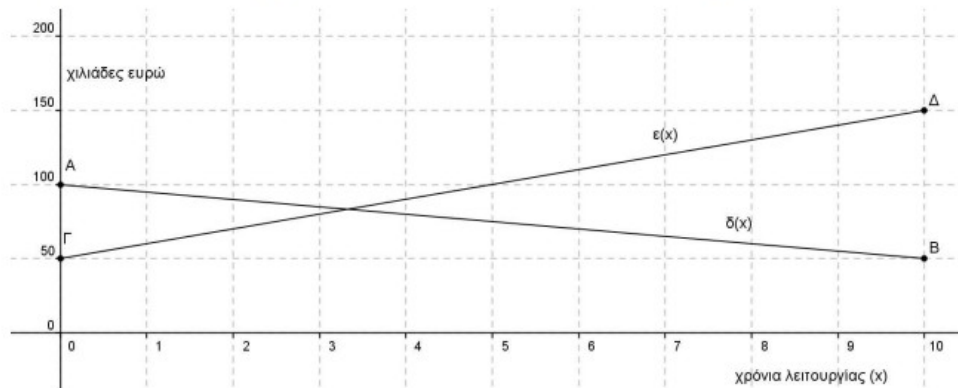


ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων η ευθεία AB με $A(0,100)$ και $B(10,50)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\delta(x)$ των ετήσιων δαπανών μιας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της.

Η ευθεία $\Gamma\Delta$ με $\Gamma(0,50)$ και $\Delta(10,150)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων $\varepsilon(x)$ της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της.

Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.



α) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τις δαπάνες τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας.

(Μονάδες 4)

β)

i. Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων $\delta(x)$, $\varepsilon(x)$ και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο α) ερώτημα ήταν σωστές.

(Μονάδες 15)

ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών AB και $\Gamma\Delta$ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Μονάδες 6)

14320

ΘΕΜΑ 4

Σε κάποιο τόπο, μια χειμερινή μέρα, ξεκινάμε να μετράμε τη θερμοκρασία από τις 6 το πρωί και μετά. Ο τύπος που δίνει τη θερμοκρασία, x ώρες μετά τις 6 το πρωί, είναι:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x \in [0, 6] \\ 16, & x \in (6, 9] \\ 25 - x, & x \in (9, 12] \end{cases}$$

και μετριέται σε βαθμούς Κελσίου.

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία στον τόπο αυτό, στις 6 το πρωί, στις 12 το μεσημέρι και στις 5 το απόγευμα.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε σε ποιο χρονικό διάστημα της ημέρας η θερμοκρασία:

- i. Διατηρείται σταθερή.
- ii. Είναι μεγαλύτερη από 14 βαθμούς Κελσίου.

(Μονάδες 4+7=11)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 8)

14184

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{(x+2)(x+1)^2}{1+(x+2)x}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 4)

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 8)

γ) Αν είναι $f(x) = x + 2$, $x \neq -1$, τότε:

- i. Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση της f τη γραφική παράσταση της $g(x) = x^2$.

(Μονάδες 7)

- ii. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες, η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g .

(Μονάδες 6)

13473

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{1 - 2x + x^2}$.

α) Να απλοποιήσετε την παράσταση A.

(Μονάδες 6)

Δίνεται επιπλέον $1 \leq x \leq 3$.

β) i. Να δείξετε ότι $A=2$.

(Μονάδες 4)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $|x - 3| - |x - 1| = 2$.

(Μονάδες 5)

γ) i. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=3-x$ και $g(x)=x-1$ για $1 \leq x \leq 3$.

(Μονάδες 6)

ii. Για ποιες τιμές του x είναι $|f(x) - g(x)|=2$.

(Μονάδες 4)

13367

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : y = (\omega^2 - 6\omega + 8)x + 2$, όπου $\omega \in \mathbb{R}$.

α) Για τις διάφορες τιμές του $\omega \in \mathbb{R}$ να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 9)

β) Αν ο αριθμός ω είναι ακέραιος και η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$ είναι αμβλεία τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες.

(Μονάδες 5)

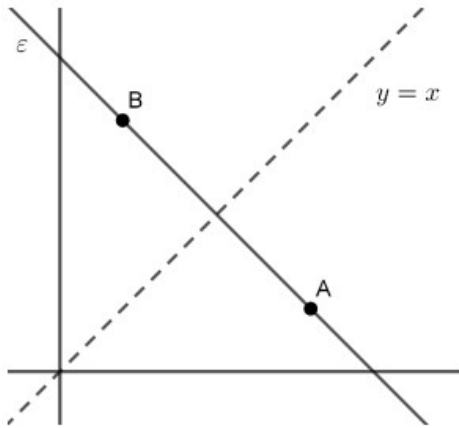
iii. Να σχεδιάσετε την ευθεία ε .

(Μονάδες 5)

13298

ΘΕΜΑ 4

Τα σημεία A και B είναι σημεία του 1^{ου} τεταρτημόριου και είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο $y = x$ της 1^{ης} και 3^{ης} γωνίας των αξόνων, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Αν $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$, να γράψετε τη σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες του σημείου A με τις συντεταγμένες το σημείου B .

(Μονάδες 3)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε που διέρχεται από τα A και B έχει κλίση $\alpha = -1$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν επιπλέον τα σημεία A και B έχουν συντεταγμένες $(4, \kappa^2 - 3\kappa + 1)$ και $(\kappa - 2, 4)$ αντίστοιχα, τότε:

i. Να δείξετε ότι $\kappa = 3$ και να προσδιορίσετε τα σημεία A και B .

(Μονάδες 8)

ii. Για $\kappa = 3$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε .

(Μονάδες 8)

12682

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - (x - 1)^2$ και $g(x) = |x - 1| + 2$, με $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $g(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 1 \\ -x + 3, & x < 1 \end{cases}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση C_g

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g .

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

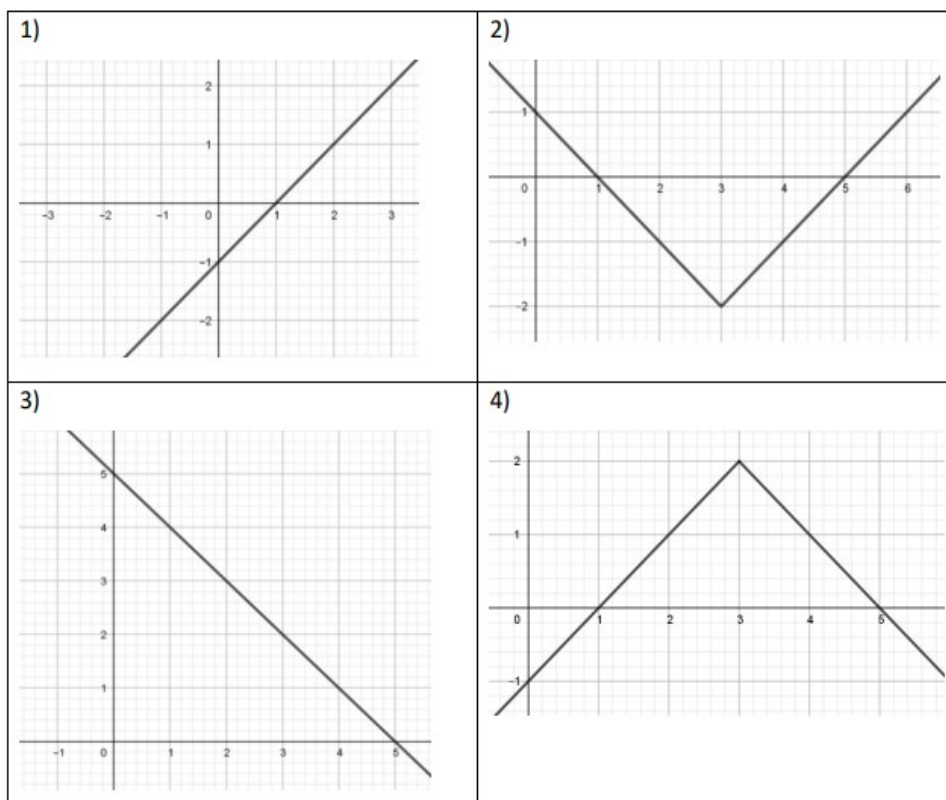
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x-3| + 4 - (|6-2x| + 2)$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2 - |x-3|$.

(Μονάδες 5)

β) Αφού δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{αν } x < 3 \\ 5-x, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}$, να επιλέξετε το σωστό και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Η γραφική παράσταση της f είναι:



(Μονάδες 9)

γ)

- i. Στο σχήμα με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f να σχεδιάσετε την ευθεία $y = -1$ και με τη βοήθειά της να λύσετε την ανίσωση $2 - |x-3| > -1$

(Μονάδες 5)

- ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x - 3$. Αν $A(\alpha, 0)$, $B(\beta, 0)$, $\Gamma(\gamma, \delta)$ σημεία της γραφικής παράστασης της f όπως φαίνεται στο σχήμα και η παράλληλη από το Γ στον x' έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ένα κοινό σημείο, τότε:

α) Να δείξετε ότι $\alpha = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ και $\beta = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι $f(\sqrt{2}) < 0$.

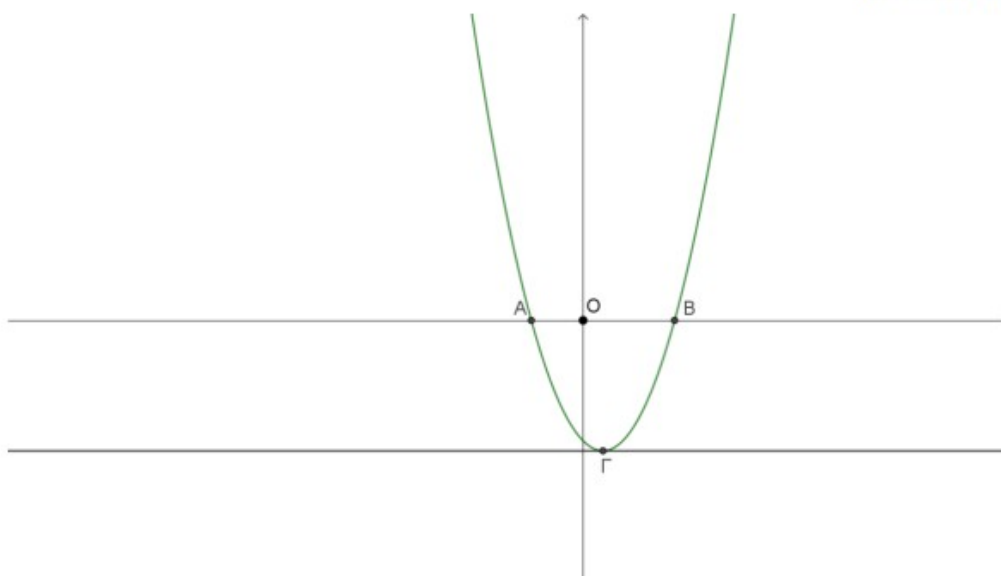
(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι $\frac{1-\sqrt{13}}{2} < \sqrt{2} < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τις τιμές των γ και δ .

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

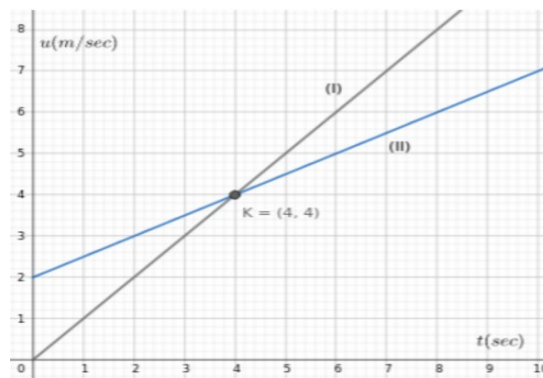
Ένα όχημα, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει ταχύτητα, η οποία δίνεται από τη σχέση $u = u_0 + a \cdot t$, όπου u η ταχύτητα του οχήματος τη χρονική στιγμή t και a η σταθερή επιτάχυνσή του στη διάρκεια της κίνησης, ενώ u_0 η αρχική ταχύτητα της κίνησής του.

α) Αν η παραπάνω σχέση αποτελεί συνάρτηση της ταχύτητας του οχήματος ως προς το χρόνο, να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη, ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή και ποιο το ευρύτερο δυνατό πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής.

(Μονάδες 6)

β) Ένα όχημα Α, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, ξεκινά από θέση ηρεμίας και τη χρονική στιγμή 4 sec έχει ταχύτητα 4 m/sec, ενώ ένα άλλο όχημα Β, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει αρχική ταχύτητα 2 m/sec. Οι παρακάτω ευθείες (I), (II) στο διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου περιγράφουν τις ταχύτητες των δύο οχημάτων.

i) Ποια από τις δύο ευθείες (I), (II) περιγράφει την ταχύτητα του οχήματος Α και ποια την ταχύτητα του οχήματος Β;



(Μονάδες 6)

ii) Να προσδιορίσετε ποιο από τα οχήματα Α, Β κινείται ταχύτερα για κάθε χρονική στιγμή t sec, $t \in [3,5]$.

(Μονάδες 7)

iii) Αν ένα όχημα Γ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 2 m/sec και επιτάχυνση μεγαλύτερη από την επιτάχυνση του οχήματος Α, να σχεδιάσετε στο παραπάνω διάγραμμα μία ευθεία, η οποία θα μπορούσε να περιγράφει την κίνησή του.

(Μονάδες 6)

13055

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $y = 2x + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $f(2+x) = f(2-x)$.

(Μονάδες 6)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = f(3,52) - f(0,52) + f(3,48) - f(0,48)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση C_f της f έχει κοινά σημεία με την ευθεία, όταν $\beta = -5$.

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του β , ώστε η C_f να έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία.

(Μονάδες 7)

12921

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2|\kappa|x - 2$ και η ευθεία $\epsilon: y = 2x - \kappa^2$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι η ευθεία (ϵ) τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία για κάθε τιμή της παραμέτρου κ .

(Μονάδες 8)

γ) Για $\kappa = -3$ να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με την γραφική παράσταση της f .

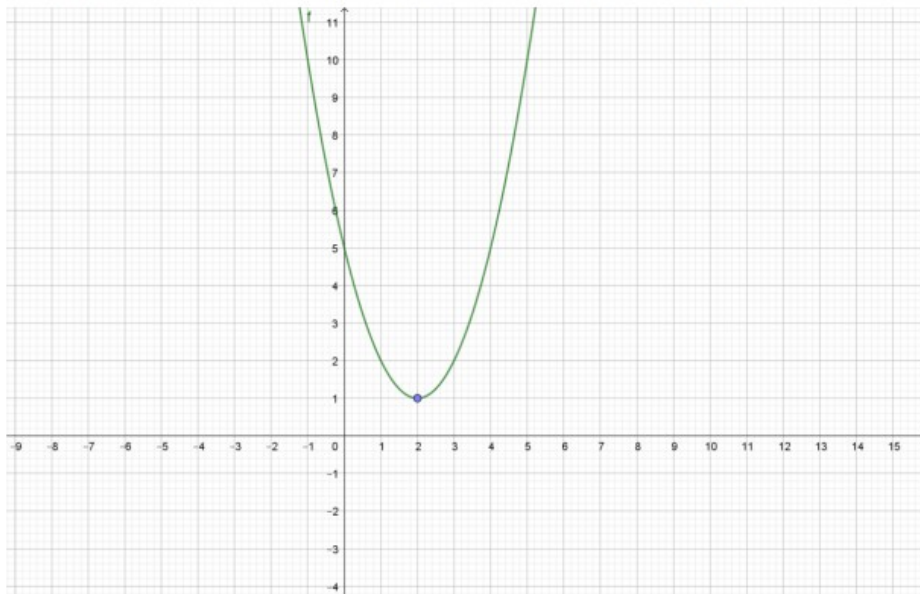
(Μονάδες 5)

δ) Αν A και B τα σημεία τομής του ερωτήματος γ), να βρείτε την απόσταση (AB).

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 4x + 5$.



1294

α) Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 7$ και στη συνέχεια να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας.

β)

i. Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο β)i.

(Μονάδες 7)

γ) Έστω ότι μια ευθεία $y = \lambda$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$. Να δείξετε ότι $x_1 + x_2 = 4$.

(Μονάδες 6)

β)

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $(1, 6)$ και έχει κλίση $\lambda = 2$.

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε.

(Μονάδες 4)

γ)

i. Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 2x + 4$.

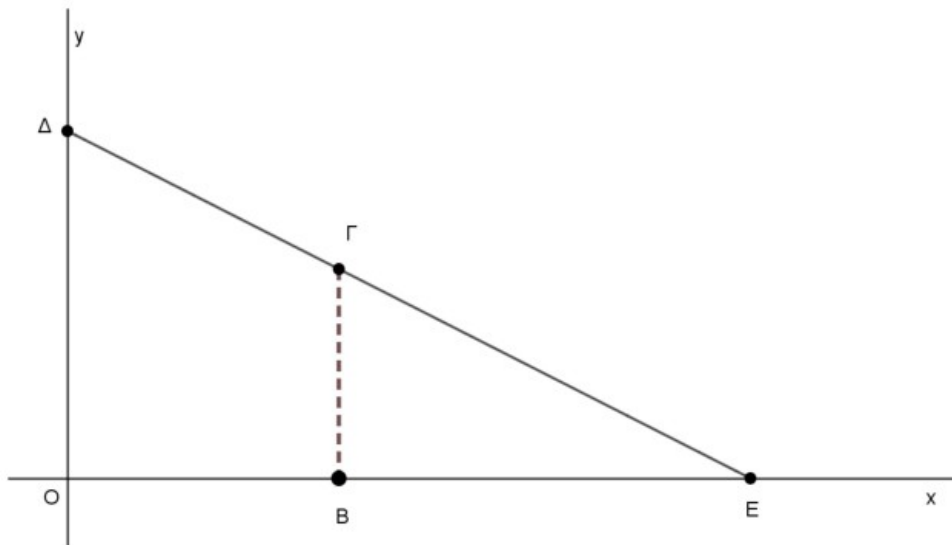
(Μονάδες 4)

ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση του προηγούμενου ερωτήματος.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων, Δ είναι ένα σημείο στον $y'y$ άξονα, E ένα σημείο του $x'x$ άξονα και O είναι η αρχή των αξόνων.



Η εξίσωση της ευθείας ΔE είναι: $y + \frac{1}{2}x = 4$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων E και Δ . (Μονάδες 6)

Ένα σημείο $\Gamma(t, y_\Gamma)$ κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΔE και B ένα σημείο του $x'x$ άξονα, τέτοιο ώστε $B\Gamma$ να είναι παράλληλη στον $y'y$ άξονα.

β) Να προσδιορίσετε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές η τετμημένη t του σημείου Γ και να δείξετε ότι $y_\Gamma = 4 - \frac{1}{2}t$. (Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $E(t) = 4t - \frac{1}{4}t^2$ εκφράζει το εμβαδόν του τραπεζίου $OB\Gamma\Delta$ και να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Μονάδες 7)

δ) Αν το εμβαδόν του τραπεζίου ισούται με 9,75 τετραγωνικές μονάδες, να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Γ . (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ ώστε $AB=2$, $AD=4$, $ΓΔ=6$, ενώ η ΑΔ είναι κάθετη στην ΑΒ και επίσης κάθετη στην ΓΔ. Το σημείο Ε μπορεί να πάρει οποιαδήποτε θέση επί του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ και ονομάζουμε x την απόσταση του Ε από την ΓΔ.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου ΑΕΔ δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = -2x + 12$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης;

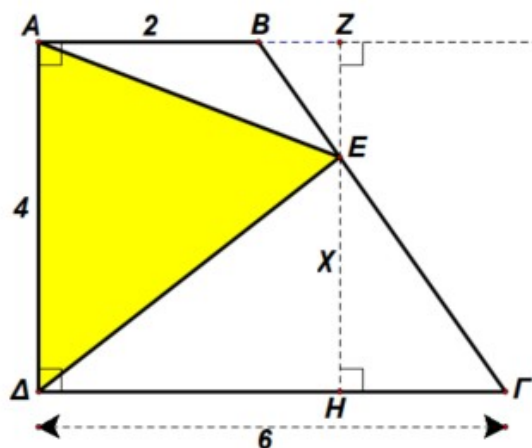
(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$.

(Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\Sigma = f\left(\frac{1}{16}\right) + f\left(\frac{2}{16}\right) + f\left(\frac{3}{16}\right) + f\left(\frac{4}{16}\right) \dots + f\left(\frac{64}{16}\right)$.

(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Ένα ελικόπτερο απογειώνεται από το ελικοδρόμιο και το ύψος του $Y_1(t)$, σε μέτρα, από την επιφάνεια της θάλασσας τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση:

$$Y_1(t) = 150 + 50t, \quad t \in [0, 5].$$

Τα επόμενα πέντε λεπτά κινείται σε σταθερό ύψος και στη συνέχεια κατεβαίνει αργά για δέκα λεπτά ακόμα, μέχρι να επιστρέψει στο ελικοδρόμιο. Το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας τα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση:

$$Y_2(t) = 650 - 25t.$$

α) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας βρίσκεται το ελικοδρόμιο;

(Μονάδες 6)

β) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας πετάει το ελικόπτερο από το 5^ο μέχρι το 10^ο λεπτό της κίνησής του;

(Μονάδες 5)

γ) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $Y_2(t)$, και να προσδιορίσετε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η απόσταση του ελικοπτερου από τη θάλασσα είναι 250 μέτρα.

(Μονάδες 6)

δ)

i. Στα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του, πόσα μέτρα ανεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει;

(Μονάδες 4)

ii. Στα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του πόσα μέτρα κατεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει;

(Μονάδες 4)