

Μαθηματικά Γ' Λυκείου
Τράπεζα θεμάτων
Ολοκληρωτικός Λογισμός

24769

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$, $x > -1$ και έστω F αρχική της f με $F(1) = \ln 2$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > -1$ ισχύει $f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ και να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η F είναι κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$.

(Μονάδες 6)

γ) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της F στο $x_0 = 1$.

(Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $\frac{2F(x)-1}{x} \geq \ln 4 - 1$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Για μια συνεχή συνάρτηση $f: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν:

- $(f(x) + x)^2 = x^2(x+1)$, για κάθε $x \in [-1, +\infty)$,
- $f(1) > -1$ και $f\left(-\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$.

α) Αν $g(x) = f(x) + x$, $x \in [-1, +\infty)$ τότε

- i. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $g(x) = 0$.

(Μονάδες 05)

- ii. Να αποδείξετε ότι $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 0)$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

(Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x(\sqrt{x+1} - 1)$, $x \geq -1$.

(Μονάδες 07)

γ) Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή τότε να αποδείξετε ότι η $h(x) = f(x+1) - f(x)$, $x \in (-1, +\infty)$

είναι γνησίως αύξουσα και έπειτα ότι

$$\int_{2023}^{2024} (f(x+1) - f(x)) dx < \int_{2023}^{2024} (f(x+2) - f(x+1)) dx.$$

(Μονάδες 06)

31551

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x} & , \quad x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi] \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$

και $\phi(x) = x \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$, $x \in [-\pi, \pi]$.

α) Να αποδείξετε ότι η ϕ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\pi, \pi]$ και να βρείτε το πρόσημό της.

(Μονάδες 10)

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in (-\pi, \pi)$ για τις οποίες ισχύει $\int_0^{\kappa} \phi(x) dx = 0$.

(Μονάδες 5)

24771

ΘΕΜΑ 4

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(0)=1$ και $(x^2+1)f'(x) + \frac{2x}{x^2+1} = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ και να

βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β, Γ, Δ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ με τη βοήθεια της τετμημένης α , $\alpha > 0$ του σημείου $A(\alpha, 0)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\alpha)$ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από τον τύπο

$$E(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}, \alpha > 0$$

Κατόπιν, να βρείτε για ποια τιμή του α το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.

(Μονάδες 8)

δ) Αν F είναι μια αρχική της f με $F(1) = \ln 2$, να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(x) dx = \ln \sqrt{2}$

(Μονάδες 6)

24770

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1) + x - 1$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη.

(Μονάδες 8)

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο $x_0 = \ln 2$.

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $\ln(e^x - 1) \leq 2x - \ln 4$.

(Μονάδες 4)

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2 - e^{-x}}{e^{-x} - 1} dx$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, η οποία είναι κυρτή και ισχύει $f(1) = f'(1) = 2$.

α) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(1, f(1))$ και κατόπιν να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι :

i. $\int_0^1 f(x) dx > 1$.

(Μονάδες 6)

ii. $\int_0^1 x f'(x) dx < 1$.

(Μονάδες 6)

35245

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 04)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε (αν υπάρχει) τη θέση του σημείου καμπής της γραφικής της παράστασης.

(Μονάδες 08)

γ) Να αποδείξετε ότι:

i. $f'(x) \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 06)

ii. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει: $0 < f(\alpha + 1) - f(\alpha) < 1$.

(Μονάδες 07)

34565

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τους αριθμούς α, β με $1 < \alpha < \beta$ και την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , με συνεχή παράγωγο, ώστε $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Ας είναι λ ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$, με $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x) + \lambda\alpha - f(\alpha)}{x}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c \in (\alpha, \beta)$ ώστε $cf'(c) - f(c) - \lambda\alpha + f(\alpha) = 0$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν γνωρίζουμε ότι $f'(c) \neq \lambda$, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(c, f(c))$ και η ευθεία AB τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$.

(Μονάδες 7)

δ) Αν είναι $\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} = e^2$, να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{\sqrt{\alpha-1}}^{\sqrt{\beta-1}} \frac{x \cdot f'(x^2 + 1)}{f(x^2 + 1)} dx$$

ισούται με -1 .

(Μονάδες 7)

36816

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, συνεχή στο $x_0 = 0$,

για την οποία ισχύει

$$xf(x) = \eta\mu x \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

α) Να βρείτε το $f(0)$.

(Μονάδες 04)

β) Να βρείτε τον τύπο της f .

(Μονάδες 04)

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 09)

δ) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sqrt{2}}{6} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx \leq \frac{1}{4}$$

(Μονάδες 08)

33578

ΘΕΜΑ 4

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [0, \pi]$ ισχύει $e^x + \eta\mu x \geq 1$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $H(x) = x - \ln(e^x + \eta\mu x)$, $x \in [0, \pi]$, είναι μια αρχική (παράγουσα) της συνάρτησης $f(x) = \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x + \eta\mu x}$, $x \in [0, \pi]$.

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^\pi xf'(x)dx = \frac{\pi}{e^\pi}$.

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{1}{(e^x + \eta\mu x) \cdot x} dx < 1$.

(Μονάδες 7)

33593

ΘΕΜΑ 2

Αν f μια συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $\int_2^3 f(x)dx = 2$, $\int_1^3 f(x)dx = 4$ και

$\int_1^7 f(x)dx = 10$ να βρείτε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\int_3^2 f(x)dx$.

(Μονάδες 5)

β) $\int_3^7 f(x)dx$.

(Μονάδες 6)

γ) $\int_7^2 f(x)dx$.

(Μονάδες 6)

δ) $\int_1^3 (f(x) - x)dx$.

(Μονάδες 8)

29837

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1-x}$, με $x \neq 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της αντιστροφής.

(Μονάδες 9)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ f$.

(Μονάδες 6)

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι οι συναρτήσεις $f \circ f$ και f^{-1} είναι ίσες. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του μαθητή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

δ) Αν $\varphi(x) = (f \circ f)(x) = \frac{x-1}{x}$ με $x \in \mathbb{R} - \{0,1\}$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_2^3 \varphi(x) dx.$$

(Μονάδες 5)

26631

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - x$, $x > 0$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 9)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς ασύμπτωτες.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\ln\left(\frac{x^2+3}{2x^2+1}\right) = 2 - x^2$.

(Μονάδες 8)

28476

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)(x-1)}{\ln x} = 0 \text{ και}$$

$$f'(x) = \sqrt{x^2 + 1} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α)

i. Να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$$

(Μονάδες 03)

ii. Να αποδείξετε ότι $f(1) = 0$.

(Μονάδες 03)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα.

(Μονάδες 06)

γ) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 06)

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου E , που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , τον άξονα x' και των ευθειών $x = 0$ και $x = 1$.

(Μονάδες 07)

27321

ΘΕΜΑ 4

Σε μια χώρα, οι επιστήμονες μελέτησαν για μεγάλο χρονικό διάστημα την μεταβολή του πληθυσμού των ψαριών σε έναν ποταμό και δημιούργησαν ένα προσεγγιστικό μαθηματικό μοντέλο που συσχετίζει τον πληθυσμό x των ψαριών στο τέλος ενός συγκεκριμένου έτους με τον αναμενόμενο πληθυσμό y των ψαριών στο τέλος της αμέσως επόμενης χρονιάς.

Το μοντέλο εκφράζεται από τη σχέση $y = f(x) = \alpha x e^{-\beta x}$, $x \in (0, +\infty)$ όπου α, β θετικές σταθερές, με $\beta \in (0, 1)$ και $\alpha \in (1, +\infty)$.

(α) Να βρείτε την τιμή του τρέχοντος πληθυσμού x που μεγιστοποιεί τον πληθυσμό y των ψαριών το επόμενο έτος σύμφωνα με αυτό το μοντέλο. Ποια είναι αυτή η μέγιστη τιμή του πληθυσμού y ;

(Μονάδες 9)

(β) Να εξηγήσετε γιατί ένας απεριόριστα μεγάλος πληθυσμός ψαριών δεν θα είναι βιώσιμος την αμέσως επόμενη χρονιά.

(Μονάδες 7)

(γ) Θεωρούμε συνάρτηση F η οποία είναι μια παράγουσα (αρχική) της συνάρτησης f . Να αποδείξετε ότι $F(\beta) - F(2\beta) = \frac{\alpha}{\beta^2} \cdot \frac{2\beta^2 + 1 - (1 + \beta^2)e^{\beta^2}}{e^{2\beta^2}}$.

(Μονάδες 9)

29549

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο τέτοια, ώστε:

$$f'(0) = f(0) = 0 \text{ και } \int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \eta \mu x dx = 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^\pi f''(x) \eta \mu x dx = - \int_0^\pi f'(x) \sigma \upsilon \nu x dx.$

(Μονάδες 07)

β) $f(\pi) = 0.$

(Μονάδες 08)

γ) Στο διάστημα $(0, \pi)$ υπάρχει μια τουλάχιστον πιθανή θέση σημείου καμπής.

(Μονάδες 10)

27668

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-3)(x-\lambda)(x-1)$, $x \in \mathbb{R}$ με $1 < \lambda < 3$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε η συνάρτηση f έχει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

(Μονάδες 08)

γ) Αν επιπλέον ισχύει $f(x) = -f(4-x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^3 f(x) dx$.

(Μονάδες 05)

27322

ΘΕΜΑ 4

Ο νόμος του Νεύτωνα που αφορά την μείωση της θερμοκρασίας T (σε βαθμούς Κελσίου) ενός σώματος συναρτήσει του χρόνου t (σε ώρες), ορίζεται από την εξίσωση

$$T(t) = E + (T_0 - E)e^{-kt} \text{ όπου:}$$

- E είναι η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος χώρου στον οποίο βρίσκεται το σώμα με $E < T_0$.
- $T_0 = T(0)$ είναι η αρχική θερμοκρασία του σώματος τη στιγμή που τοποθετείται στο περιβάλλοντα χώρο.
- k είναι μια θετική σταθερά.

α) Να υπολογίσετε το $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t)$ και να ερμηνεύστε το αποτέλεσμα.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $T'(t) = k[E - T(t)]$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 (E - T(t)) \cdot \ln(T(t)) dt$ ισούται με $\frac{2e^3 - 3e^4}{k}$ αν είναι $T(0) = e^4$ και $T(1) = e^3$.

(Μονάδες 10)

26184

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, x > 0$.

α) Να βρείτε, με απόδειξη, την κατακόρυφη ασύμπτωτη και την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ολικό μέγιστο για $x = e^2$.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^{e^2} f(x) dx$.

(Μονάδες 9)

25766

ΘΕΜΑ 4

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο της παραγώγου μιας συνάρτησης f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια και επιπλέον ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad f(0) = 1 \quad \text{και} \quad f(2) = 5$$

τότε:

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = |x^2 - 4| + 5$.

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 xf(x)dx = 0$.

(Μονάδες 5)

24758

ΘΕΜΑ 4

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, και η συνάρτηση

$g(x) = (x^2 - 1)f(x)$ για την οποία ισχύει $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ και για $x=-1$ και στη συνέχεια ότι $f(1) = f(-1) = 0$.

(Μονάδες 6)

β) $f'(1) \geq 0$ και $f'(-1) \leq 0$.

(Μονάδες 8)

γ) η f δεν είναι κοίλη.

(Μονάδες 5)

δ) $\int_{-1}^1 (x^3 - 3x)f'(x)dx \leq 0$.

(Μονάδες 6)

23957

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\ln^2 x}$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 2 \frac{\ln x}{x} f(x)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο ίσο με 1.

(Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^e \frac{2 \cdot \ln x \cdot f(x) + x e^x}{x(f(x) + e^x)} dx$.

(Μονάδες 10)

36849

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \leq 0 \\ 1 - \sin x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0. (Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , του άξονα $x'x$ και των ευθειών $x = -2$ και $x = \pi$. (Μονάδες 18)

36838

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g .

Αν $\int_1^3 f(x)dx = 6$, $\int_1^8 f(x)dx = 29$, $\int_3^5 f(x)dx = 8$ και $\int_1^5 g(x)dx = -6$, τότε:

α) Να βρείτε τα ολοκληρώματα:

i. $\int_3^8 f(x)dx$

ii. $\int_5^8 2f(x)dx$

iii. $\int_1^5 (f(x) + g(x))dx$

(Μονάδες 18)

β) Αν για τη συνάρτηση g ισχύει ότι $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [1,5]$, τότε να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 5$. (Μονάδες 07)

36837

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα η τεθλασμένη γραμμή $\Theta\Lambda$ αποτελεί γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f ορισμένης στο $\mathbb{R}$, που διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $\Gamma(-1,0)$.

α) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i. $\int_{-2}^{-1} f(x)dx$

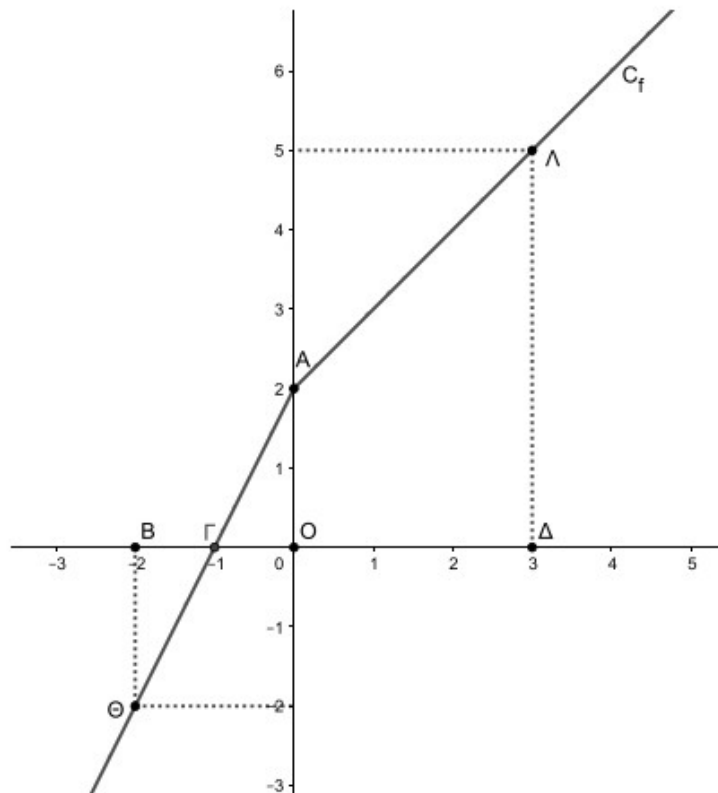
ii. $\int_{-1}^0 f(x)dx$

iii. $\int_0^3 f(x)dx$

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = -2$ και $x = 3$.

(Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Για τα εμβαδά των περιοχών $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ του παρακάτω σχήματος ισχύει $E(\Omega_1) = E(\Omega_2) = E(\Omega_3) = \frac{4}{3}$.

α) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

i. $\int_0^1 f(x) dx$.

(Μονάδες 6)

ii. $\int_0^3 f(x) dx$.

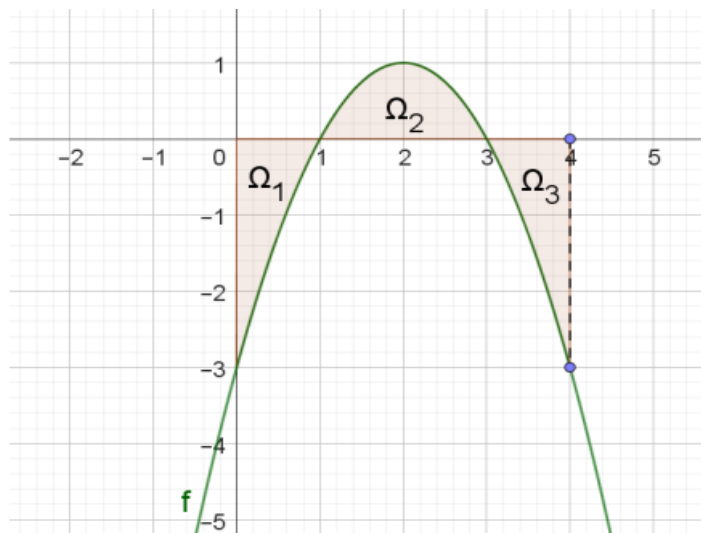
(Μονάδες 6)

iii. $\int_0^4 f(x) dx$.

(Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\int_0^{2023} f(x) dx - \int_4^{2023} f(x) dx$.

(Μονάδες 7)



35244

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση με $f(x) = \varepsilon\varphi x - 1, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu x = (1+x)\sigma\upsilon\nu x$ έχει μια ακριβώς λύση στο ανοικτό διάστημα $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για όλες τις πραγματικές τιμές του $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(Μονάδες 08)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f τις ευθείες $x = 0, x = \frac{\pi}{3}$ και τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 09)

Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$, $x \geq 0$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(Μονάδες 07)

β) Να βρείτε την αντίστροφη της f .

(Μονάδες 07)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι καμπύλες C_1, C_2 . Με δεδομένα ότι

- η μία από τις δύο καμπύλες αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της f και η άλλη στην γραφική παράσταση της f^{-1} ,
- $\int_{-\frac{1}{2}}^0 f^{-1}(x)dx = \alpha$

Να βρείτε:

i. Ποια καμπύλη παριστάνει την γραφική παράσταση της f και ποια την γραφική παράσταση της f^{-1} ,

(Μονάδες 04)

ii. Το πρόσημο του α καθώς και το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 f(x)dx$ συναρτήσει του α .

(Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με $\alpha > 0$ και $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, για την οποία επιπλέον γνωρίζουμε ότι:

- Η συνάρτηση $f'(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.
- $\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)f'(x)dx = -\ln 2$.
- $\beta f^2(\beta) = \alpha f^2(\alpha)$.
- $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = xf^2(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$ στο οποίο η εφαπτομένη ευθεία είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f^2(x)$, τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και τον άξονα $x'x$, είναι $\ln 4$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$.

(Μονάδες 6)

δ) Έστω ότι η συνάρτηση G είναι μια αρχική της f στο $[\alpha, \beta]$.

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (a, \beta]$ ισχύει $\frac{G(x)-G(a)}{x-a} < f(a)$.

(Μονάδες 7)

33634

ΘΕΜΑ 4

Έστω $I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^2 x dx$ και $J = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma \upsilon \nu^2 x dx$.

α) Να αποδείξετε ότι $I + J = \frac{\pi^2}{4}$.

(Μονάδες 6)

β) Με χρήση της αντικατάστασης $u = \frac{\pi}{2} - x$ να αποδείξετε ότι $I = J$ και κατόπιν ότι

$$I = J = \frac{\pi^2}{8}.$$

(Μονάδες 7)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = \frac{\pi}{2} \eta \mu^2 x$

στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Η ευθεία OA τέμνει τη C_f στα σημεία $O(0,0)$, $A\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $K(x_0, f(x_0))$

και ορίζει με τη C_f τα χωρία Ω_1, Ω_2 . Να αποδείξετε ότι :

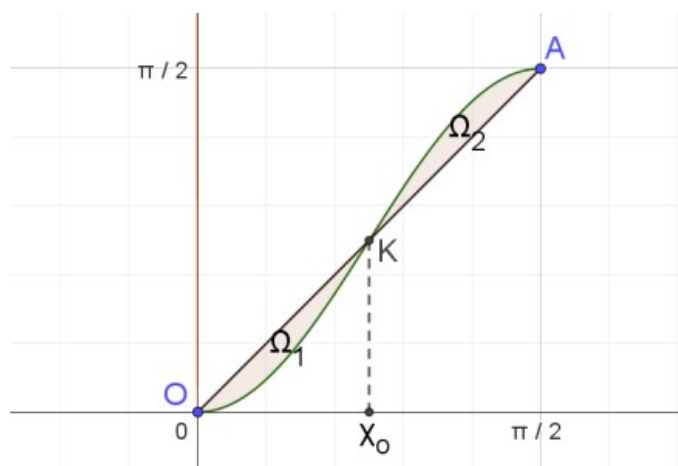
i. το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της C_f , του άξονα yy' και της ευθείας $y = \frac{\pi}{2}$

είναι το J .

(Μονάδες 6)

ii. τα εμβαδά των χωρίων Ω_1, Ω_2 είναι ίσα.

(Μονάδες 6)



35302

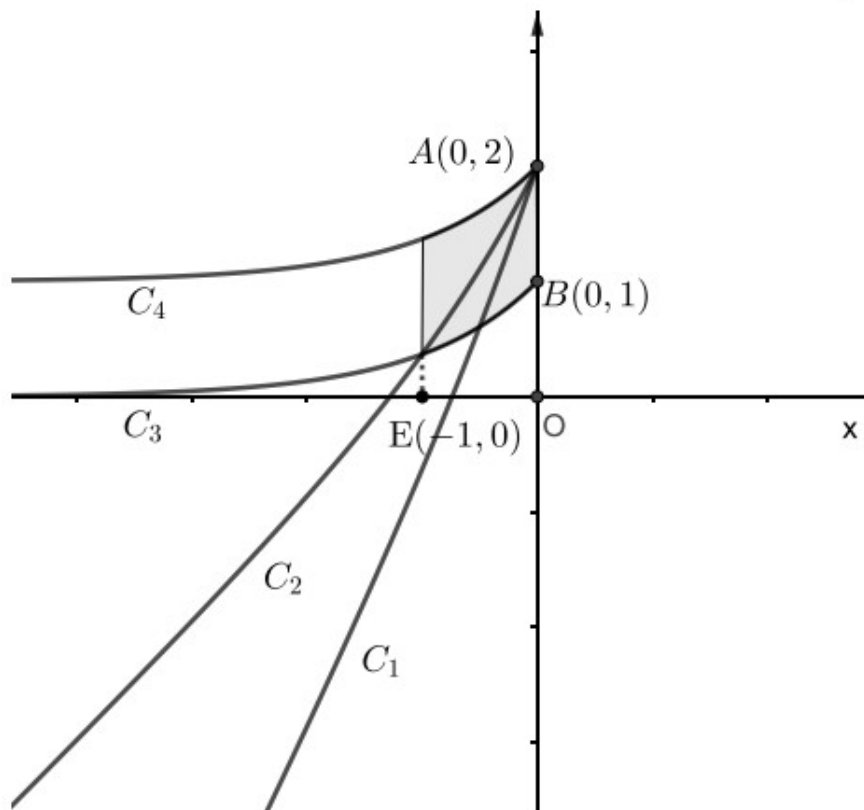
ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g και h με $f(x) = e^x$, $g(x) = e^x + 1$ και $h(x) = e^x + x + 1$, $x \in (-\infty, 0]$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 09)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται 4 γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, οι C_1, C_2, C_3 και C_4 . Να αντιστοιχίσετε σε κάθε μία από τις συναρτήσεις f, g και h τη γραφική της παράσταση, επιλέγοντας μεταξύ των C_1, C_2, C_3 και C_4 την κατάλληλη και να δικαιολογήσετε πλήρως την επιλογή σας. (Μονάδες 09)

γ) Να αποδείξετε ότι, η καμπύλη C_2 χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες C_3 και C_4 και τις κατακόρυφες ευθείες $x = -1$ και $x = 0$ σε δύο ισεμβαδικά χωρία. (Μονάδες 07)



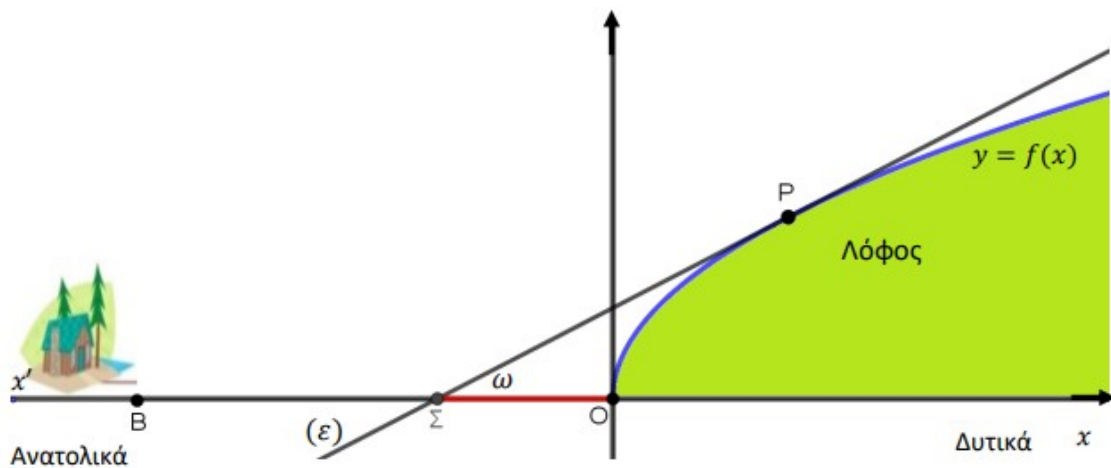
ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο απεικονίζεται μια αγροικία στην θέση B του αρνητικού ημιάξονα Ox' . Δυτικά της αγροικίας, κατά μήκος του θετικού ημιάξονα Ox , υπάρχει ένας λόφος, το ύψος του οποίου δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ για $x \geq 0$. Όλες οι συντεταγμένες μετρούνται σε μέτρα.

Καθώς ο ήλιος αρχίζει να δύει, ο λόφος ρίχνει στην πεδιάδα την σκιά του OS , η οποία και μεγαλώνει με την πάροδο του χρόνου t , όπως φαίνεται στο σχήμα.

Θεωρούμε $t = 0$ τη στιγμή που ο ήλιος ρίχνει κάθετα τις ακτίνες του στο σημείο O του λόφου, ενώ στη συνέχεια κινούμενος προς τα δυτικά, αρχίζει να δημιουργείται η σκιά.

Ας είναι $\hat{\omega} = P\hat{\Sigma}O$.



α) Αν το σημείο P έχει συντεταγμένες $P(x_P, y_P)$, να αποδείξετε ότι η τετμημένη του σημείου Σ είναι $x_\Sigma = -x_P$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι κάθε χρονική στιγμή $t > 0$ ισχύει $\varepsilon\varphi(\omega(t)) = \frac{1}{2}(x_P(t))^{-\frac{1}{2}}$.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε πόσο γρήγορα μεγαλώνει η σκιά (OS) τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία οι ακτίνες του ήλιου σχηματίζουν γωνία $\omega = \frac{\pi}{6}$ με τον οριζόντιο άξονα, ενώ αυτή τη χρονική στιγμή t_0 η γωνία ω μειώνεται με ρυθμό $\frac{1}{16} \text{ rad}$ ανά λεπτό.

(Μονάδες 10)

Δίνεται ότι $\frac{1}{\sin^2 \omega} = 1 + \varepsilon\varphi^2 \omega$.

33598

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς και γνησίως αύξουσας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[0,1]$, η οποία διέρχεται από τα σημεία $(0,0)$ και $(1,1)$. Το χωρίο Ω περικλείεται από τον άξονα xy την ευθεία $y=1$ και τη γραφική παράσταση της f .

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

(Μονάδες 5)

β) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το παρακάτω σχήμα και σχεδιάσετε σε αυτό τη γραφική παράσταση της f^{-1} .

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx < \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 5)

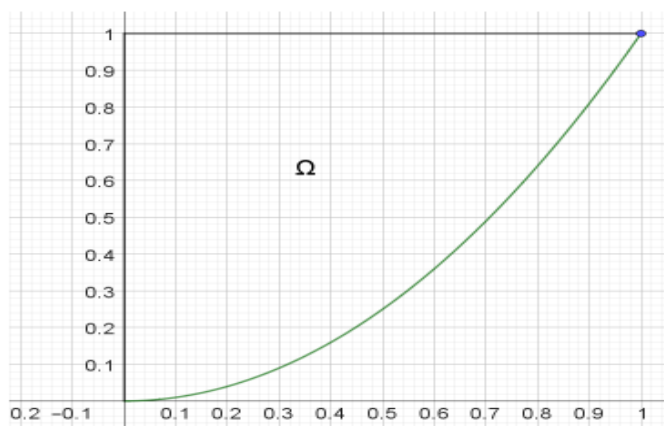
δ) Αν θεωρήσουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής αξιοποιώντας το παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι

i. $\int_0^1 f^{-1}(x)dx = 1 - \int_0^1 f(x)dx$.

(Μονάδες 5)

ii. $E(\Omega) = \int_0^1 f^{-1}(x)dx$, όπου $E(\Omega)$ το εμβαδόν του χωρίου Ω .

(Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 1, & x < 0 \\ -x^3 + 3x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο ακριβώς ρίζες τις x_1, x_2 με $x_1 < 0$ και $x_2 > 3$.

(Μονάδες 12)

β)

i. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμία από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$ με x_1, x_2 οι ρίζες της f του ερωτήματος α).

(Μονάδες 04)

ii. Να βρείτε όλα τα $\xi \in (x_1, x_2)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$.

(Μονάδες 04)

γ) Αν ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη 2, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία ε και την ευθεία $x=0$.

(Μονάδες 05)

29646

ΘΕΜΑ 4

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1, x \geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Η f παρουσιάζει στο $x_1 = 0$ τοπικό ελάχιστο, στο $x_2 = 2$ μέγιστο και το σημείο $\Gamma(1, f(1))$ είναι σημείο καμπής της C_f .

(Μονάδες 09)

- ii. Τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά και το σημείο Γ είναι το μέσο του τμήματος AB .

(Μονάδες 03)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB ορίζει με τη γραφική παράσταση της f δύο ισεμβαδικά χωρία.

(Μονάδες 08)

γ) Έστω ε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της B , η οποία τέμνει τον άξονα $\gamma\gamma$ στο Δ . Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Delta$ ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f , της ευθείας ε και του άξονα $\gamma\gamma$.

(Μονάδες 05)

31792

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 1, & -1 \leq x < 1 \\ 1 + \frac{(\ln x)^2}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής, αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f .

(Μονάδες 7)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^{-x}$. Να υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$, $g(x)$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $x = e$.

(Μονάδες 9)

25147

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = f(x) \cdot \eta\mu x$, $x \in [0, 2\pi]$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το

$A\left(\frac{\pi}{2}, e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$, στο διάστημα ορισμού τους $[0, 2\pi]$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δέχονται κοινή εφαπτομένη στο σημείο τομής τους.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τον άξονα $y' y$ και τις γραφικές παραστάσεις των C_f, C_g .

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[-3,2]$, η οποία δεν είναι παραγωγίσιμη στο -1 . Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου της f , η C_f , που στο διάστημα $(-1,2]$ είναι ευθύγραμμο τμήμα.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της. (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε:

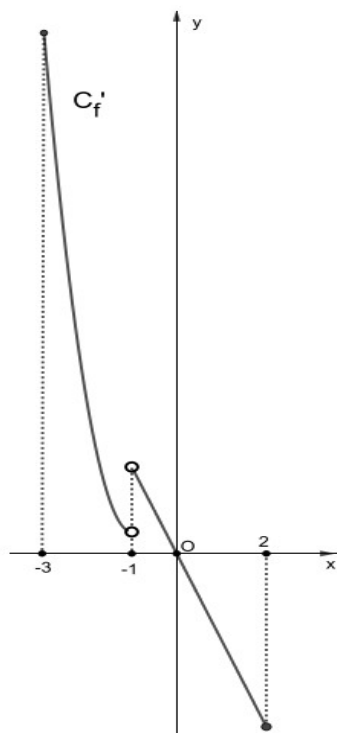
i. Τα κρίσιμα σημεία της f , αν υπάρχουν, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 06)

ii. Τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και το είδος τους.

(Μονάδες 05)

γ) Αν η f' είναι συνεχής στο $[0,2]$ και ισχύει ότι $\int_0^2 f'(x)dx = -4$, να υπολογίσετε την τιμή $f'(2)$. (Μονάδες 06)



28476

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)(x-1)}{\ln x} = 0 \text{ και}$$

$$f'(x) = \sqrt{x^2 + 1} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α)

i. Να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$$

(Μονάδες 03)

ii. Να αποδείξετε ότι $f(1) = 0$.

(Μονάδες 03)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα.

(Μονάδες 06)

γ) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 06)

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου E , που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , τον άξονα x' και των ευθειών $x = 0$ και $x = 1$.

(Μονάδες 07)

31534

ΘΕΜΑ 4

Η παραβολή του διπλανού σχήματος διέρχεται από την αρχή των αξόνων, η κορυφή της είναι το σημείο $K(2, 2)$ και είναι η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x, x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

β) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα y στο σημείο $A(0, 1)$, να αποδείξετε ότι

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 + 1$$

(Μονάδες 6)

Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση

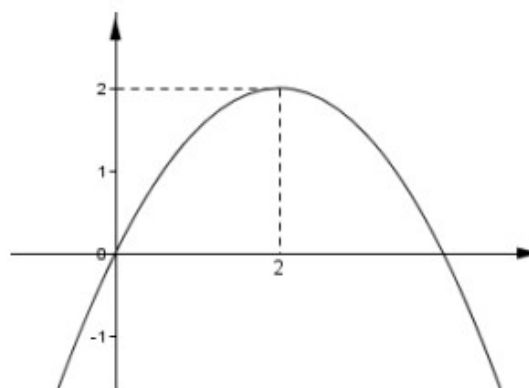
$$g(x) = x^2 + x + 1 - \eta \mu x, x \in \mathbb{R}$$

γ) i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράστασης της g είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της f για κάθε $x > 0$.

(Μονάδες 6)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = 0$ και $x = \pi$.

(Μονάδες 5)



31149

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x^2}$ με $x \in (0, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση $\ln(1 + f(x)) - \ln(f(x)) > f^2(x) \cdot f(\ln 2)$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f ,

τις ευθείες με εξισώσεις $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$ είναι $\ln\left(\frac{27}{4e}\right)$.

(Μονάδες 9)

31148

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2+1}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = e^{-x}$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

β) Θεωρούμε τα σημεία $B(x, f(x))$ και $\Gamma(x, g(x))$ με $x > 0$. Η παράλληλη ευθεία από το B προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Δ , ενώ η παράλληλη ευθεία από το Γ προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Z .

(i) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $B\Gamma Z\Delta$ είναι $E(x) = \frac{x^3}{e^x}$, $x > 0$.

(Μονάδες 6)

(ii) Να βρείτε για ποια τιμή του x , το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = \frac{f(x)-g(x)}{x}$, τον άξονα $x'x$ καθώς και τις ευθείες με εξισώσεις $x = \ln 2$ και $x = 1$, είναι $\ln\sqrt{2e} - \frac{2}{e}$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 7)

31533

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4 - \frac{4}{x^2}$, $x \neq 0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της f .

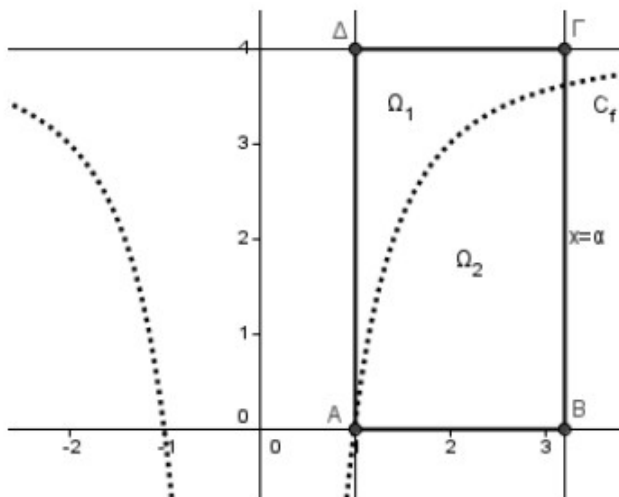
(Μονάδες 9)

β) Αν οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ είναι κάθετες, να αποδείξετε ότι $x_1 x_2 = -4$.

(Μονάδες 6)

γ) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f (διακεκομμένη γραμμή) και το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ που ορίζεται από τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=\alpha$, $\alpha > 1$ και $y=4$.

Η C_f χωρίζει το ορθογώνιο σε δυο χωρία Ω_1, Ω_2 .



i. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του α , τα εμβαδά $E(\Omega_1)$, $E(\Omega_2)$ των χωρίων.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του α ισχύει $E(\Omega_1) = E(\Omega_2)$.

(Μονάδες 5)

31530

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 5x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη x_0 που περιέχεται στο διάστημα $(0, 1)$.

(Μονάδες 5)

ii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός x_0 είναι πιο κοντά στο 0 ή στο 1.

(Μονάδες 4)

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0 + \theta)x^3 + 2x - 5}{f(x_0 - \theta)x - 5}$, αν x_0 είναι ο αριθμός του ερωτήματος (α)

και θ ένας θετικός αριθμός.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση C_f της f , την εφαπτομένη της στο σημείο $A(1, 4)$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

(Μονάδες 7)

26183

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi x}{4}\right), & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - \frac{4\ln x}{x}, & x > 1 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 1, αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 1.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο κρίσιμα σημεία στο διάστημα $[0, +\infty)$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$, είναι $E = \frac{\ln 4}{\pi}$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 10)

25746

ΘΕΜΑ 4

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύει ότι $f'(x) > f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$. Έστω επίσης η συνάρτηση $g(x) = e^{-x} f(x)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x < 0$.

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(|\eta\mu x| + 1) = f(|x| + 1)$.

(Μονάδες 7)

δ) Αν E το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$, να αποδείξετε ότι $E < f(1)$.

(Μονάδες 6)

27031

ΘΕΜΑ 4

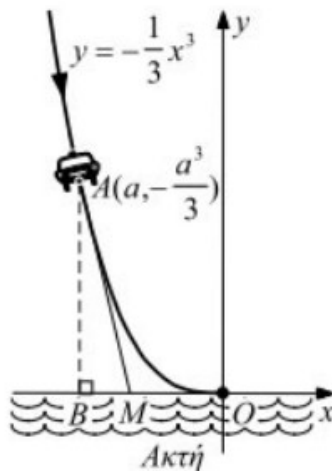
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{3}x^3$, με $x \in (-\infty, 0]$ και τυχαίο σημείο $A\left(\alpha, -\frac{\alpha^3}{3}\right)$ με $\alpha < 0$ της γραφικής της παράστασης.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο A .

(Μονάδες 06)

β)

- i. Ένα περιπολικό A κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = -\frac{1}{3}x^3$, $x \leq 0$ πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (όπως φαίνεται στο σχήμα).



Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο

$$\alpha'(t) = -\alpha(t),$$

να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου M της ακτής, στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη -3 .

(Μονάδες 08)

- ii. Να ερμηνεύσετε το πρόσημο του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του σημείου M .

(Μονάδες 02)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω , που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη -3 .

(Μονάδες 09)

25765

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\ln x + x$, $x > 0$

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) > x$.

(Μονάδες 8)

γ) Έστω $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $g(x) = e^{f(|x|)}$ για κάθε $x \neq 0$.

i. Να αποδείξετε ότι $g(x) = x^2 e^{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_g , τον x και τις κατακόρυφες ευθείες $x = -1$, $x = 1$.

(Μονάδες 6)

25747

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ και ισχύουν $f(1) = 1$ και $f(x) \cdot f'(x) = -x + 1$, για κάθε $x \in (0, 2)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f^2(x) = -x^2 + 2x$ για κάθε $x \in [0, 2]$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}$ για κάθε $x \in [0, 2]$.

(Μονάδες 6)

γ) Αφού αιτιολογήσετε ότι η γραφική παράσταση της f είναι ημικύκλιο με κέντρο $K(1, 0)$ και ακτίνα 1, να τη σχεδιάσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

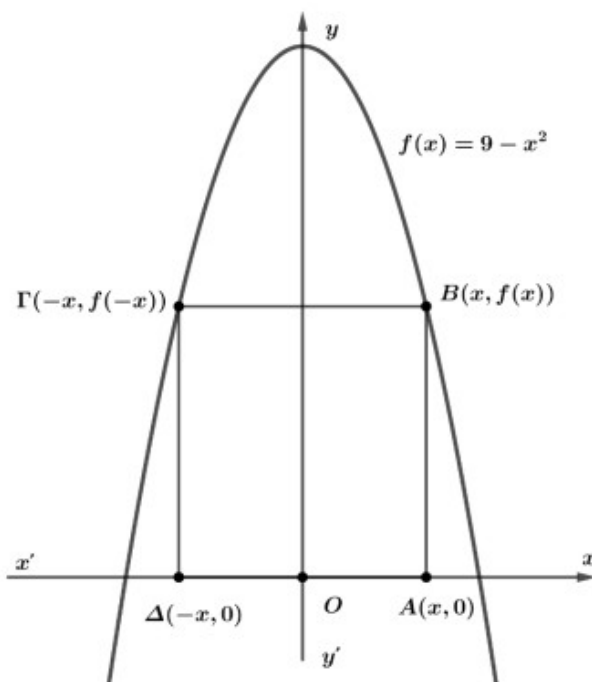
(Μονάδες 7)

δ) Να υπολογίσετε το $\int_0^2 f(x) dx$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 9 - x^2$. Μεταξύ του γραφήματος της συνάρτησης και του οριζόντιου άξονα $x'x$ είναι εγγεγραμμένο το ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Οι κορυφές Α(x,0) και Δ(-x,0) είναι σημεία του άξονα $x'x$, ενώ οι κορυφές Β(x, f(x)) και Γ(-x, f(-x)) είναι σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

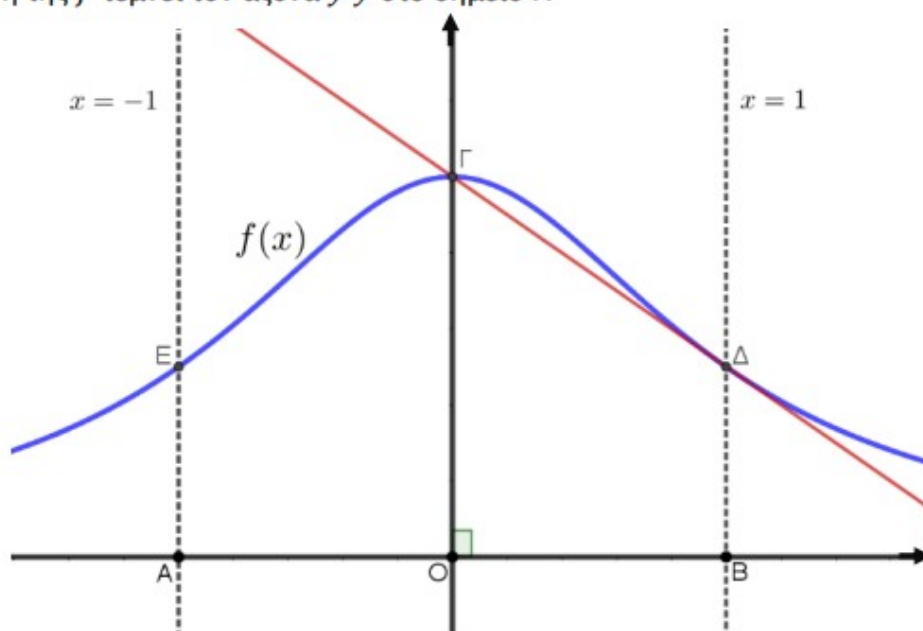


- α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ ως συνάρτηση του $x \in [0,3]$ δίνεται από την συνάρτηση $E(x) = 18x - 2x^3$. (Μονάδες 6)
- β) Να μελετηθεί η συνάρτηση $E(x)$ ως προς την μονοτονία. (Μονάδες 6)
- γ) Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ώστε αυτό να έχει το μέγιστο εμβαδό, και να αποδείξετε ότι αυτό ισούται με $12\sqrt{3}$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 6)
- δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , του άξονα $x'x$ και είναι εξωτερικό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ όταν το εμβαδό του παίρνει την μέγιστη τιμή του. (Μονάδες 7)

23955

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ και οι ευθείες με εξισώσεις $x = -1$ και $x = 1$ οι οποίες τέμνουν τον μεν άξονα $x'x$ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, την δε γραφική παράσταση της f στα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Γ.



α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο Δ, είναι η ευθεία ΓΔ.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $[0,1]$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από την ευθεία ΓΔ, με εξαίρεση τα κοινά τους σημεία Γ και Δ.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 f(x) dx > \frac{3}{2}$.

(Μονάδες 10)

25757

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} (1-x)\eta\mu^2\left(\frac{1}{1-x}\right), & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ 0 & , \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

(Μονάδες 09)

β) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in [0,1]$, ισχύει $0 \leq f(x) \leq 1-x$.

(Μονάδες 07)

γ) Να αποδειχθεί ότι για το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=1$ ισχύει $E < \frac{1}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, που είναι τέτοια, ώστε:

- η γραφική παράσταση της f , να εφάπτεται της $\varepsilon: y = \frac{1}{4}$, στο $x_0 = 0$.
- είναι κυρτή και
- $f(1) = 1$.

α) Να αποδειχθεί ότι:

i. $f(0) = \frac{1}{4}$ και $f'(0) = 0$.

(Μονάδες 06)

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4f(x) - 1}{\eta\mu x \cdot f(x)} = 0$.

(Μονάδες 07)

β) Επιπλέον δίνεται ότι η πρώτη παράγωγος της f είναι συνεχής.

i. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$.

(Μονάδες 06)

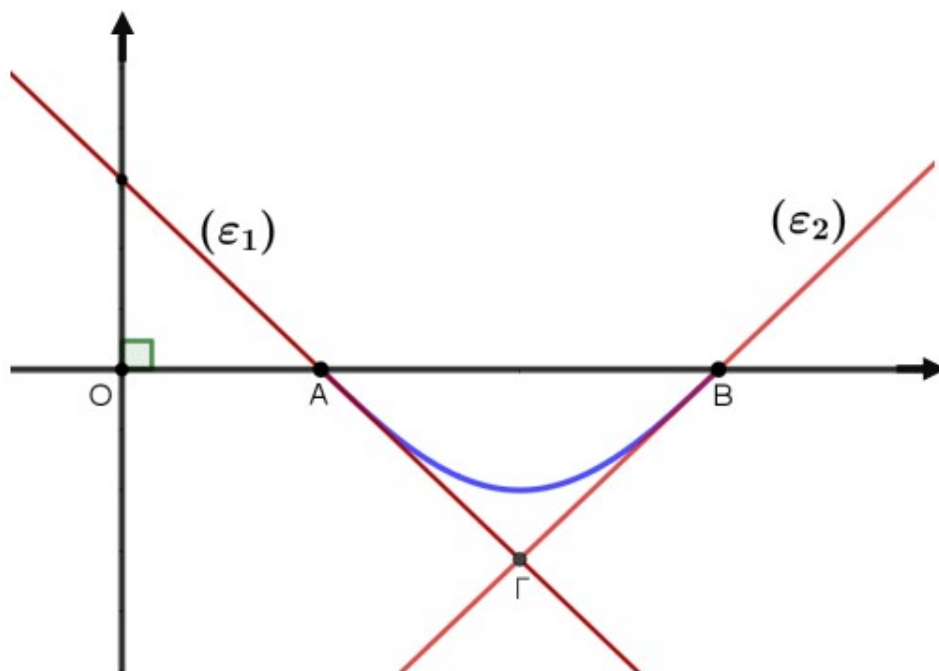
- ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f' , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$.

(Μονάδες 06)

25235

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sin x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Στα σημεία $A\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ και $B\left(\frac{3\pi}{2}, f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ έχουν σχεδιασθεί οι εφαπτόμενες (ε_1) , (ε_2) αντίστοιχα της γραφικής παράστασης της f , οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ .



α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των εφαπτόμενων ευθειών (ε_1) , (ε_2) είναι

$$(\varepsilon_1) y = -x + \frac{\pi}{2} \text{ και } (\varepsilon_2): y = x - \frac{3\pi}{2} \text{ αντίστοιχα.}$$

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) .

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{f(x) + x - \frac{\pi}{2}}$.

(Μονάδες 8)

24704

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^x, x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει ακριβώς σε ένα σημείο A τον άξονα $x'x$, με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$, είναι $E = e + (x_0 - 1)(1 - \ln x_0)$.

(Μονάδες 10)

24275

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = -x + 1 + \frac{1}{e^x}, x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδειχθεί ότι η ευθεία $y = -x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

(Μονάδες 07)

β) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα ρ , η οποία είναι μεγαλύτερη του 1.

(Μονάδες 09)

γ) Να αποδειχθεί ότι το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1, x = \rho$ ισούται με

$$E(\Omega) = -\frac{(\rho-1)^2}{2} - (\rho-1) + e^{-1} \text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$

(Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = x^3 + 3x^2 - \lambda x + 1$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η $P(x)$ παρουσιάζει σημείο καμπής για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου καμπής K .

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να προσδιορίσετε το είδος τους.

(Μονάδες 6)

γ) Έστω ότι $K(-1, \lambda + 3)$ και ότι η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στις θέσεις x_1, x_2 , με $x_1 < -1 < x_2$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_p στο σημείο K και κατόπιν να αιτιολογήσετε ότι βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο.

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E_1 που περικλείεται μεταξύ των (ε) , C_p και των ευθειών $x = x_1, x = -1$ είναι ίσο με το εμβαδόν E_2 που περικλείεται μεταξύ των (ε) , C_p και των ευθειών $x = x_2, x = -1$.

(Μονάδες 8)