

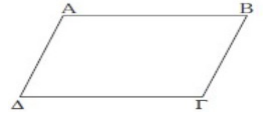
Γεωμετρία Α' Λυκείου
Τράπεζα θεμάτων
Παραλληλόγραμμα
Θεωρία

Παραλληλόγραμμα

- Ιδιότητες παραλληλογράμων

Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

- (i) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
- (ii) Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
- (iii) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.



- Κριτήρια για παραλληλόγραμμα

- (i) Οι απέναντι πλευρές ανά δυο είναι ίσες.
- (ii) Δυο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.
- (iii) Οι απέναντι γωνίες ανά δυο είναι ίσες.
- (iv) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται

Ορθογώνιο

- Ιδιότητες ορθογωνίου

Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μία γωνία ορθή.

Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες.



- Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο

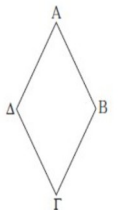
- (i) Είναι παραλληλόγραμμο και έχει μία ορθή γωνία.
- (ii) Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του είναι ίσες.
- (iii) Έχει τρεις γωνίες ορθές.
- (iv) Όλες οι γωνίες του είναι ίσες.

Ρόμβος

- Ιδιότητες του ρόμβου

Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

- (i) Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.
- (ii) Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του.



- Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ρόμβος

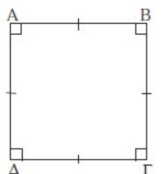
- (i) Έχει όλες τις πλευρές του ίσες.
- (ii) Είναι παραλληλόγραμμο και δυο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- (iii) Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.
- (iv) Είναι παραλληλόγραμμο και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.

Τετράγωνο

- Ιδιότητες τετραγώνου

Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

- (i) Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.
- (ii) Όλες οι πλευρές του είναι ίσες.
- (iii) Όλες οι γωνίες του είναι ορθές.
- (iv) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες, τέμνονται κάθετα, διχοτομούνται και διχοτομούν τις γωνίες του.



- Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο τετράγωνο

- (i) Μία γωνία του είναι ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- (ii) Μία γωνία του είναι ορθή και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.
- (iii) Μία γωνία του είναι ορθή και οι διαγώνιοί του κάθετες.
- (iv) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- (v) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και η μία διχοτομεί μία γωνία του.
- (vi) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και κάθετες.

Ασκήσεις

Παραλληλόγραμμα

37015

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < AG$ και Μ το μέσο της ΒΓ. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα ΜΔ=ΜΑ. Από το Α φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ η οποία τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμα,

(Μονάδες 12)

β) $BM = \frac{AE}{2}$.

(Μονάδες 13)

37008

ΘΕΜΑ 2

Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ν και Κ των ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $AN = ΚΓ$.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΓΚ είναι ίσα,

(Μονάδες 12)

β) το τετράπλευρο ΝΒΚΔ είναι παραλληλόγραμμα.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

36225

Έστω παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ (προς το Α) και την πλευρά ΔΓ (προς το Γ) κατά τμήματα $AE = AB$ και $ΓΖ = ΔΓ$.

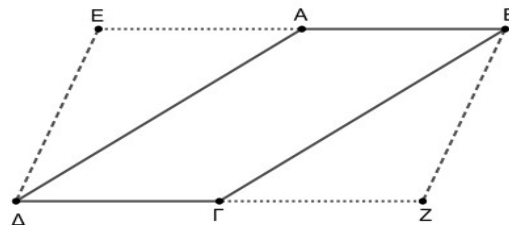
Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα,

(Μονάδες 13)

β) το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμα.

(Μονάδες 12)



36348

ΘΕΜΑ 2

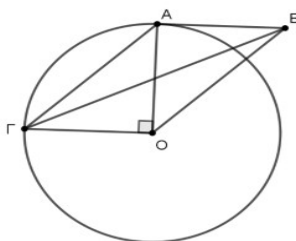
Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε κάθετες ακτίνες ΟΑ, ΟΓ και εφαπτόμενο στον κύκλο τμήμα ΑΒ τέτοιο ώστε $AB = ΟΓ$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΑΟ και ΒΓ διχοτομούνται.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΟΓ.

(Μονάδες 15)



36327

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα παραλληλόγραμμα $AB\Delta\Gamma$ και $B\Delta EZ$.

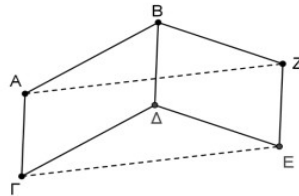
Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο $A\Gamma EZ$ είναι παραλληλόγραμμο,

(Μονάδες 13)

β) $\hat{ABZ} = \hat{\Gamma\Delta E}$.

(Μονάδες 12)



ΘΕΜΑ 2

36166

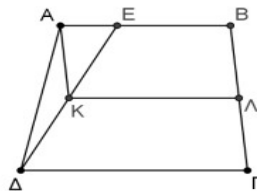
Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB=3$, $\Gamma\Delta=4$. Θεωρούμε σημείο E στην AB ώστε $AE=1$. Στο τραπέζιο $EB\Gamma\Delta$ θεωρούμε τα K και Λ , μέσα των ED και $B\Gamma$ αντίστοιχα

α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο $K\Lambda$ του τραπεζίου $EB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 12)



36164

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο ισχύει $B\Gamma=2AB$ και έστω M το μέσο της $B\Gamma$. Αν η $A\Delta$ είναι διάμεσος του τριγώνου ABM και E σημείο στην προέκτασή της ώστε $A\Delta=\Delta E$.

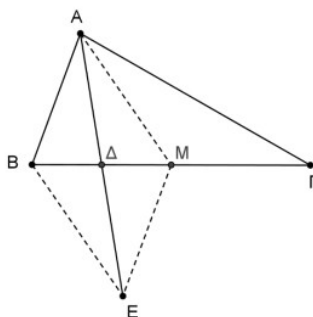
Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο $ABEM$ είναι παραλληλόγραμμο,

(Μονάδες 12)

β) $ME=MG$.

(Μονάδες 13)



36115

ΘΕΜΑ 2

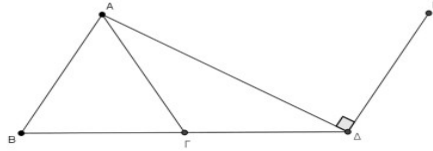
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το μέρος του Γ) θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta=B\Gamma$. Φέρουμε τμήμα DE κάθετο στην AD στο σημείο της Δ , τέτοιο ώστε $DE=B\Gamma$ (τα A και E είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την $B\Delta$).

α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Delta$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το $ABDE$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)



36105

ΘΕΜΑ 2

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$) με $AB > B\Gamma$ φέρουμε από τις κορυφές A και Γ καθέτους στη διαγώνιο $B\Delta$, οι οποίες την τέμνουν σε διαφορετικά σημεία E και Z αντίστοιχα.

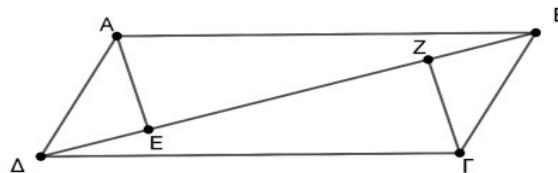
Να αποδείξετε ότι:

α) $AE=\Gamma Z$,

(Μονάδες 15)

β) το τετράπλευρο $A\Gamma EZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)



36096

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 και τα σημεία A, B στην ϵ_1 και Δ και Γ στην ϵ_2 ώστε τα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ να τέμνονται στο μέσο O του $B\Delta$.

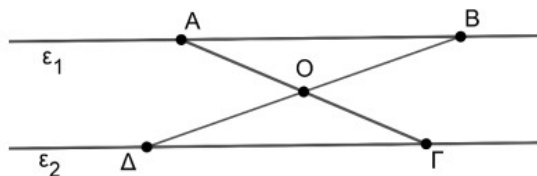
Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα AOB και ΓOD είναι ίσα και να αναφέρετε τα ίσα κύρια στοιχεία τους αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)



36090

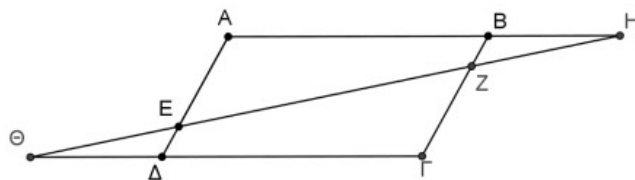
ΘΕΜΑ 2

Στις πλευρές AD και $BΓ$ παραλληλογράμμου $ABΓΔ$ θεωρούμε σημεία E και Z , τέτοια ώστε $AE = ΓZ$. Αν η ευθεία ZE τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών AB και $ΓΔ$ στα σημεία H και $Θ$, να αποδείξετε ότι:

α) $H\hat{B}Z = E\hat{\Delta}\Theta$, (Μονάδες 8)

β) $B\hat{Z}H = \Delta\hat{E}\Theta$, (Μονάδες 8)

γ) $BH = \Theta\Delta$. (Μονάδες 9)



36089

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$. Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\hat{\Delta}$ και $\hat{B}$ τέμνουν τις πλευρές AB και $ΓΔ$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $ΑΕΔ$ και $ΒΓΖ$ είναι ίσα, (Μονάδες 12)

β) το τετράπλευρο $ΔΕΒΖ$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

34783

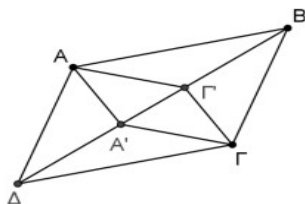
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ και τμήματα AA' , $ΓΓ'$ κάθετα στη διαγώνιο BD από τις κορυφές A , $Γ$ αντίστοιχα. Αν τα σημεία A' και $Γ'$ δεν ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι:

α) $AA' \parallel ΓΓ'$, (Μονάδες 8)

β) $AA' = ΓΓ'$, (Μονάδες 10)

γ) Το τετράπλευρο $AΓ'ΓA'$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)



34425

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του AM . Στην προέκταση της διαμέσου $M\Delta$ του τριγώνου $AM\Gamma$ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο E ώστε $M\Delta = DE$.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο $AM\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 12)

β) η BE διέρχεται από το μέσο της διαμέσου AM . (Μονάδες 13)

34423

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$ και E το μέσο της πλευράς του AB .

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο EAD είναι ισοσκελές, (Μονάδες 10)

β) η DE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. (Μονάδες 15)

34395

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο E του τμήματος AO και σημείο Z του τμήματος OG , ώστε $OE = OZ$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $DE = BZ$, (Μονάδες 12)

β) το $DEBZ$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

34394

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο με $AB = 2AD$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την AB στο E .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Είναι το σημείο E μέσο της πλευράς AB ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

34391

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά BA και ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο προς την πλευρά GA .

Να αποδείξετε ότι:

α) $DA=AE$,

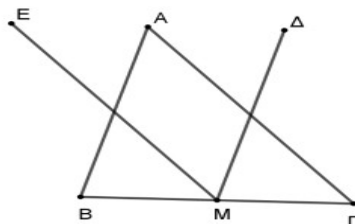
(Μονάδες 8)

β) τα σημεία Δ , A και E βρίσκονται στην ίδια ευθεία,

(Μονάδες 9)

γ) $DE=B\Gamma$.

(Μονάδες 8)



34389

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και η διαγώνίός του $B\Delta$. Από τις κορυφές A και Γ φέρουμε τις κάθετες AE και ΓZ στη $B\Delta$, που την τέμνουν στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $A\Delta E$ και ΓBZ είναι ίσα,

(Μονάδες 10)

β) το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 15)

34388

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους του BM και ΓN . Προεκτείνουμε την BM (προς το M) κατά τμήμα $M\Delta=BM$ και την ΓN (προς το N) κατά τμήμα $NE=\Gamma N$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta \parallel B\Gamma$ και $AE \parallel B\Gamma$.

(Μονάδες 13)

β) Είναι τα σημεία E , A και Δ συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

34386

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB=2B\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά $A\Delta$ (προς το μέρος του Δ) κατά τμήμα $\Delta E=A\Delta$ και φέρουμε την BE που τέμνει τη $\Delta\Gamma$ στο σημείο H .

Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο BAE είναι ισοσκελές, (Μονάδες 7)
 β) το $\Delta E\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 9)
 γ) η AH είναι διάμεσος του BAE τριγώνου. (Μονάδες 9)

13834

ΘΕΜΑ 2

Σε τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τη διάμεσό του AM . Προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ προς το μέρος του B κατά τμήμα $BZ=B\Gamma$ και προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $\Gamma H=B\Gamma$, επίσης προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά τμήμα $ME=AM$.

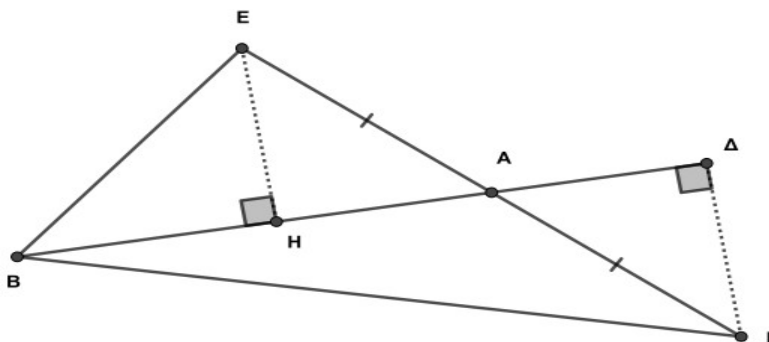
- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AMZ και EMH είναι ίσα. (Μονάδες 12)
 β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AHEZ$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

13833

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα το $\Gamma\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$, το EH είναι ύψος του τριγώνου ABE και η BA είναι διάμεσος του τριγώνου BEG .

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και AEH είναι ίσα. (Μονάδες 10)
 β) Να αποδείξετε ότι $AH=A\Delta$. (Μονάδες 5)
 γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Gamma\Delta EH$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)



13829

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε τα σημεία E και Z των τμημάτων AO και ΓO αντίστοιχα, τέτοια ώστε $AE = \Gamma Z$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AE\Delta$ και ΓZB είναι ίσα. (Μονάδες 12)
 β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

13825

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ γράφουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο προς την BA και ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο προς την ΓA (τα σημεία Δ και E βρίσκονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη $B\Gamma$ και το σημείο A). Να αποδείξετε ότι:

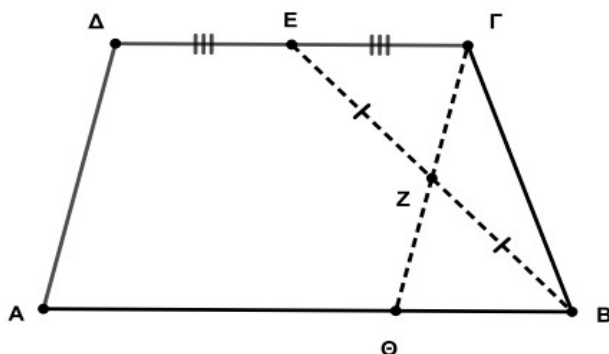
- α) Τα τετράπλευρα $A\Delta MB$ και $A\Gamma ME$ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 12)
 β) $\Delta A = AE$. (Μονάδες 13)

13824

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB και $\Gamma\Delta$. Αν E και Z τα μέσα των $\Gamma\Delta$ και BE αντίστοιχα και Θ το σημείο τομής της AB και της προέκτασης της ΓZ , να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα ΓEZ , ΘBZ είναι ίσα. (Μονάδες 13)
 β) $E\Gamma = \Theta B$. (Μονάδες 5)
 γ) Το τετράπλευρο $EB\Theta\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)



13816

ΘΕΜΑ 2

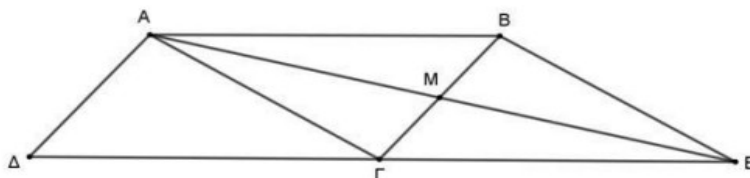
Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο, ώστε $AD < AB$ και M το μέσο της $B\Gamma$.

Προεκτείνουμε την AM προς το M κατά τμήμα $ME = AM$.

Να αποδείξετε ότι :

α) το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

β) τα σημεία Δ , Γ και E είναι συνευθειακά. (Μονάδες 15)



13755

ΘΕΜΑ 2

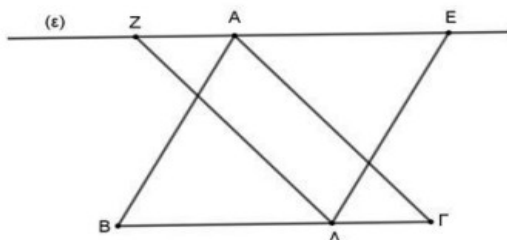
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από την κορυφή A φέρουμε ευθεία (ϵ) παράλληλη προς τη $B\Gamma$.

Από το τυχαίο σημείο Δ της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τις παράλληλες προς την AB και $A\Gamma$, οι οποίες τέμνουν την ευθεία (ϵ) στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι :

α) τα τετράπλευρα $ZA\Gamma\Delta$ και $AB\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 10)

β) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta E Z$ είναι ίσα. (Μονάδες 15)



11897

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσος του AM . Στην προέκταση της $A\Gamma$ προς το Γ παίρνουμε τμήμα $\Gamma\Delta = A\Gamma$. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την AM που τέμνει την προέκταση της $B\Gamma$ στο E . Να αποδείξετε ότι:

α) $M\Gamma = \Gamma E$. (Μονάδες 9)

β) Το τετράπλευρο $AM\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

γ) $\widehat{B} + \widehat{B\hat{A}M} = \widehat{\Gamma\hat{E}\Delta}$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών Α, Β, Γ, Δ και Ε και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωριό Ε ισαπέχει από τα χωριά Β, Γ και επίσης από τα χωριά Α και Δ.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. η απόσταση των χωριών Α και Β είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ.

(Μονάδες 5)

- ii. αν οι δρόμοι ΑΒ και ΓΔ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν.

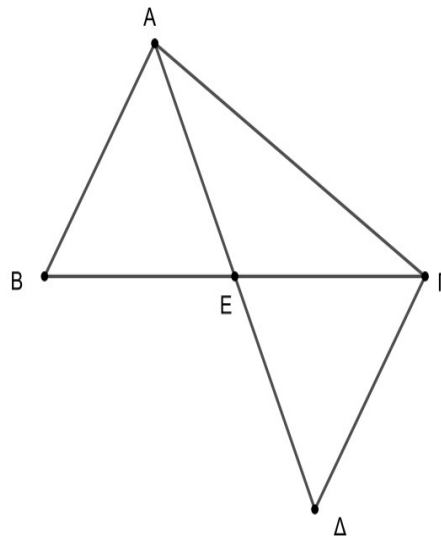
(Μονάδες 5)

- iii. τα χωριά Β και Γ ισαπέχουν από τον δρόμο ΑΔ.

(Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου ΑΓ που ισαπέχει από τα χωριά Α και Δ.

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$, AD η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ και M το μέσον της AB . Η κάθετη από το M στην AD τέμνει το $A\Gamma$ στο E . Η παράλληλη από το B στο $A\Gamma$ τέμνει την προέκταση της AD στο K και την προέκταση της EM στο Λ .

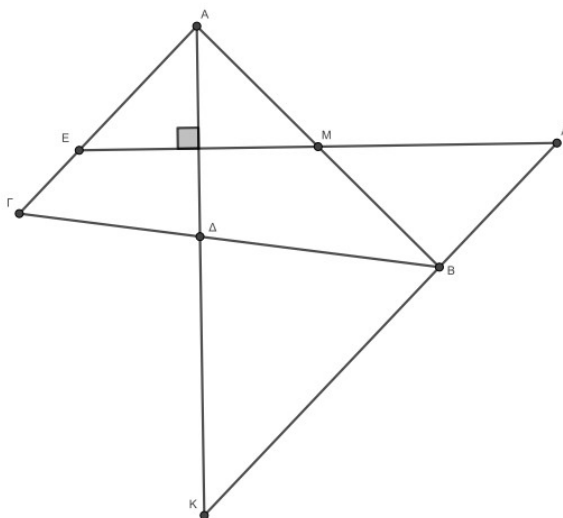
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα AEM , $MB\Lambda$ και ABK είναι ισοσκελή.

(Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο $A\Lambda BE$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ τέτοιο ώστε αν φέρουμε την κάθετη στην $ΑΓ$ στο κέντρο του $Ο$, αυτή τέμνει την προέκταση της $ΑΔ$ σε σημείο $Ε$ τέτοιο ώστε $ΔΕ=ΑΔ$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $ΑΕΓ$ είναι ισοσκελές.

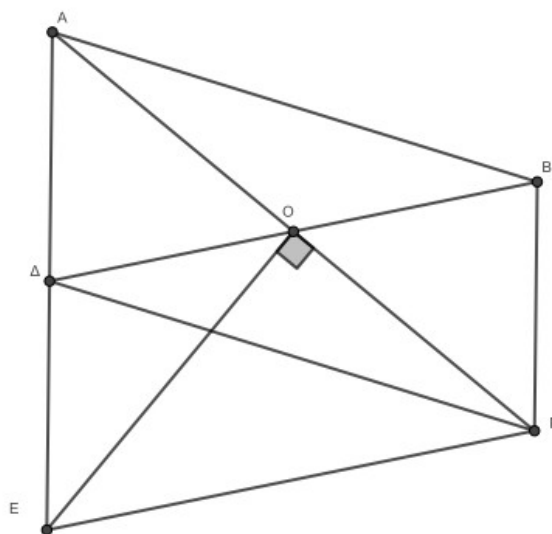
(Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο $ΒΓΕΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 9)

γ) Το τρίγωνο $ΒΟΓ$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 9)



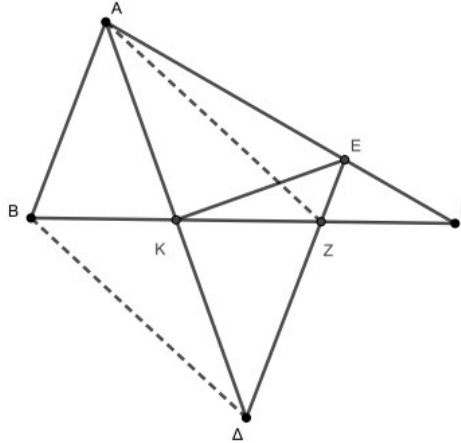
37131

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με AK διχοτόμο της γωνίας A . Στην προέκταση της AK θεωρούμε σημείο Δ ώστε $AK = K\Delta$. Η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει τις $A\Gamma$ και $B\Gamma$ στα E και Z αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο AED είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
- β) Η EK είναι μεσοκάθετος της AD . (Μονάδες 6)
- γ) Τα τρίγωνα AKB και $K\Delta Z$ είναι ίσα. (Μονάδες 7)
- δ) Το τετράπλευρο $AZ\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)



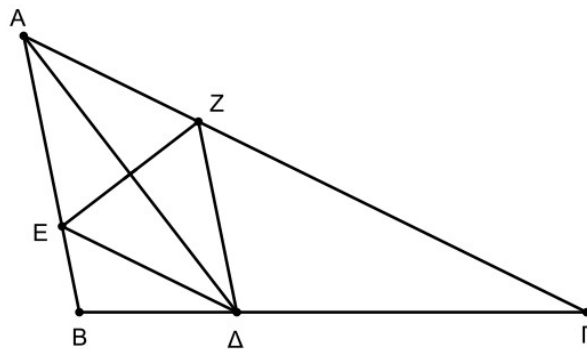
37117

ΘΕΜΑ 4

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και AD η διχοτόμος της γωνίας A , για την οποία ισχύει $AD = D\Gamma$. Η DE είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{D}B$ και η DZ παράλληλη στην AB .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τμήματα ED και $A\Gamma$ είναι παράλληλα. (Μονάδες 9)
- β) Το τρίγωνο EAD είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
- γ) Τα τμήματα AD και EZ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)

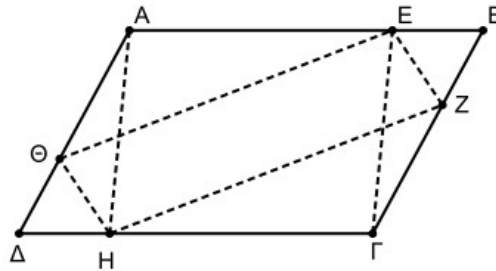


37108

ΘΕΜΑ 4

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε σημεία E, Z, H, Θ στις πλευρές $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα, με $AE = \Gamma H$ και $BZ = \Delta\Theta$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $AE\Gamma H$ είναι παραλληλόγραμμο. (6 μονάδες)
- β) Το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο. (10 μονάδες)
- γ) Τα τμήματα $A\Gamma, B\Delta, EH$ και $Z\Theta$ διέρχονται από το ίδιο σημείο. (9 μονάδες)

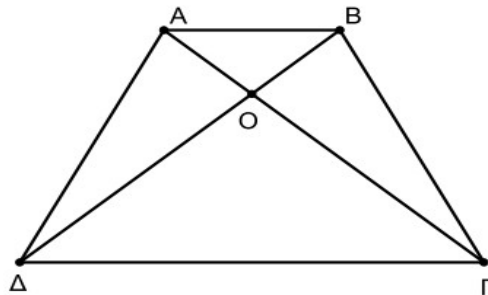


37103

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ ισχύουν: $A\Delta = B\Gamma$, $A\Gamma = B\Delta$ και $AB < \Gamma\Delta$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AOB και $\Delta O\Gamma$ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 9)
- β) Να αποδείξετε ότι $\widehat{\Delta AB} = \widehat{A\Gamma B}$. (Μονάδες 8)
- γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

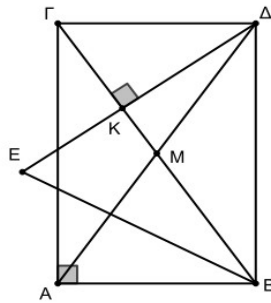


37102

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Φέρουμε τη διάμεσο του AM την οποία προεκτείνουμε (προς το μέρος του M) κατά τμήμα $M\Delta = AM$. Θεωρούμε ευθεία ΔK κάθετη στη $B\Gamma$, η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{B}$ στο E . Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο (Μονάδες 8)
 β) $\angle KEB = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$. (Μονάδες 8)
 γ) $\Delta E = B\Delta$ (Μονάδες 9)



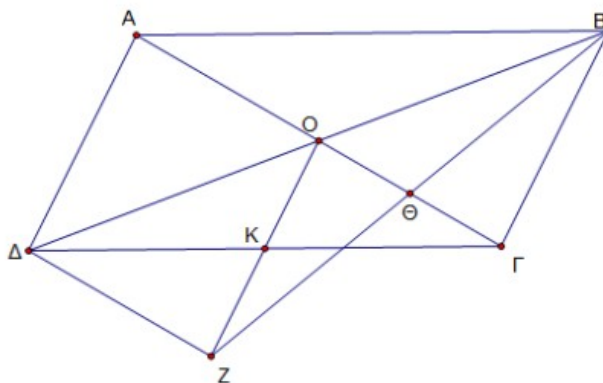
1877

ΘΕΜΑ 4

Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με O το σημείο τομής των διαγωνίων του και K το μέσο του $\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε το τμήμα OK κατά τμήμα $KZ = KO$. Η BZ τέμνει τη διαγώνιο $A\Gamma$ στο Θ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τμήματα OF και BZ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)
 β) $AO = \Delta Z$. (Μονάδες 9)
 γ) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{A}OB$ και $\overset{\Delta}{\Delta}Z\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

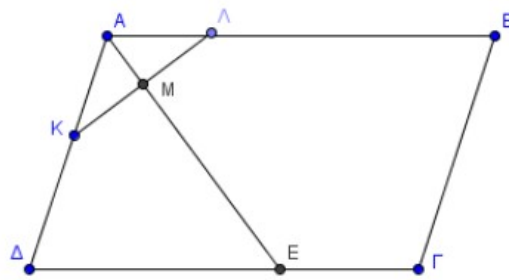


ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, με $AB > AD$. Θεωρούμε σημεία K, Λ , των AD και AB αντίστοιχα ώστε $AK = AL$. Έστω M το μέσο του $K\Lambda$ και η προέκταση του AM (προς το M) τέμνει τη $\Delta\Gamma$ στο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

- α) $AD = DE$. (Μονάδες 8)
 β) $B\Gamma + \Gamma E = AB$. (Μονάδες 10)
 γ) $\hat{B} = 2 \cdot \hat{A} \hat{\Lambda} K$. (Μονάδες 7)



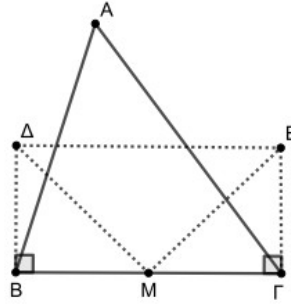
Ορθογώνιο

36339

ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα που ακολουθεί, το M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$, και τα τμήματα BD και EG είναι κάθετα στη $B\Gamma$ στα σημεία B, Γ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $MD = ME$.
Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τμήματα BD και GE είναι ίσα, (Μονάδες 13)
β) το τετράπλευρο $BDE\Gamma$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)



36353

ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας r φέρουμε δυο διαμέτρους του AB και $\Gamma\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) οι χορδές $A\Gamma$ και $B\Delta$ του κύκλου είναι ίσες, (Μονάδες 13)
β) το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία A, Γ, B και Δ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 12)

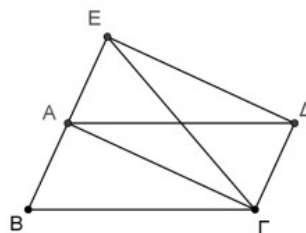
36175

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και το $A\Gamma\Delta E$ είναι ορθογώνιο.

Να αποδείξετε ότι:

- α) το σημείο A είναι μέσο του BE , (Μονάδες 8)
β) το τρίγωνο $BE\Gamma$ είναι ισοσκελές, (Μονάδες 9)
γ) $\hat{B\Gamma A} = \hat{A\Delta E}$. (Μονάδες 8)



34781

ΘΕΜΑ 2

Σε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε τα μέσα M και N των πλευρών του AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $M\Delta = M\Gamma$,

(Μονάδες 12)

β) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία M και N είναι μεσοκάθετος του τμήματος $\Gamma\Delta$.

37167

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > AD$ και οι διχοτόμοι των γωνιών του AP , BE , $\Gamma\Delta$ και BT (όπου P , E στην $\Delta\Gamma$ και Σ , T στην AB) τέμνονται στα σημεία K , Λ , M και N όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΔEBT είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 7)

β) το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ορθογώνιο.

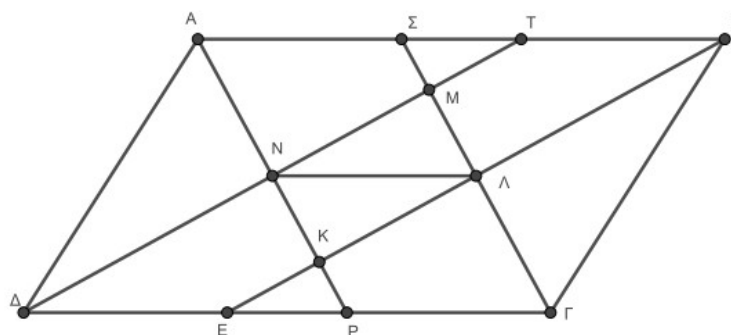
(Μονάδες 8)

γ) $\Lambda N \parallel AB$

(Μονάδες 5)

δ) $\Lambda N = AB - AD$

(Μονάδες 5)



37083

ΘΕΜΑ 4

Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται μια κρεμάστρα τοίχου η οποία αποτελείται από έξι ίσα ευθύγραμμα κομμάτια ξύλου ($A\Delta$, $B\Gamma$, ΓZ , ΔH , ZK , $H\Lambda$) που είναι στερεωμένα με έντεκα καρφιά (A , B , Γ , Δ , Θ , E , M , H , K , Λ , Z). Αν το σημείο Θ , είναι μέσο των τμημάτων $A\Delta$ και $B\Gamma$ ενώ το σημείο E είναι μέσο των τμημάτων ΓZ και ΔH , να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $\Gamma H Z \Delta$ είναι ορθογώνιο.

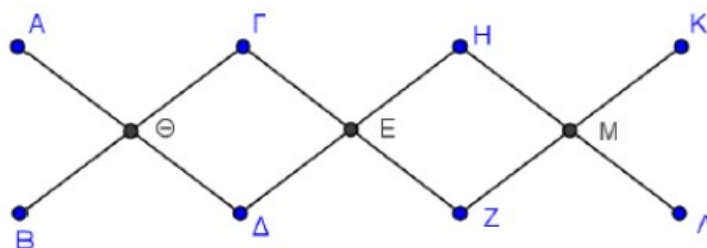
(Μονάδες 10)

β) Τα σημεία B , Δ , Z είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο $A\Gamma Z \Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 6)



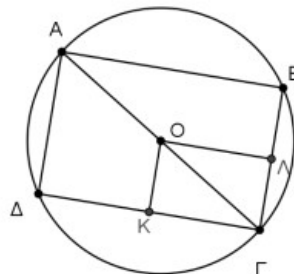
34326

ΘΕΜΑ 4

Έστω κύκλος κέντρου O και $ΑΓ$ μια διάμετρος του. Θεωρούμε δυο ίσες χορδές $ΑΔ$, $ΒΓ$ και χορδές $ΔΓ$, $ΑΒ$ τέτοιες ώστε να είναι κάθετες στις $ΑΔ$, $ΒΓ$ αντίστοιχα. Έστω K και $Λ$ τα μέσα των χορδών $ΔΓ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) οι χορδές $ΑΒ$ και $ΔΓ$ είναι παράλληλες, (Μονάδες 7)
- β) το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 7)
- γ) η $ΒΔ$ είναι διάμετρος του κύκλου, (Μονάδες 6)
- δ) το τετράπλευρο $ΟΚΓΛ$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 5)

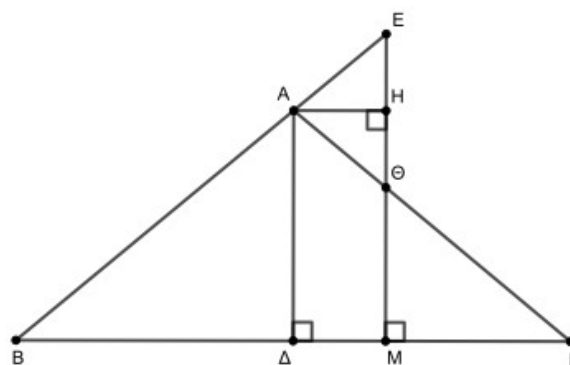


14887

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$), και τυχαίο σημείο M της πλευράς $ΒΓ$. Από το σημείο M φέρουμε ευθεία κάθετη στην πλευρά $ΒΓ$ που τέμνει τις ευθείες $ΑΒ$ και $ΑΓ$ στα σημεία E και $Θ$ αντίστοιχα. Αν $ΑΔ$ και $ΑΗ$ τα ύψη των τριγώνων $ΑΒΓ$ και $ΑΘΕ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α) $\widehat{ΔΑΗ} = 90^\circ$. (Μονάδες 8)
- β) Το τρίγωνο $ΑΘΕ$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
- γ) $MΘ + ME = 2ΑΔ$. (Μονάδες 9)



1879

ΘΕΜΑ 4

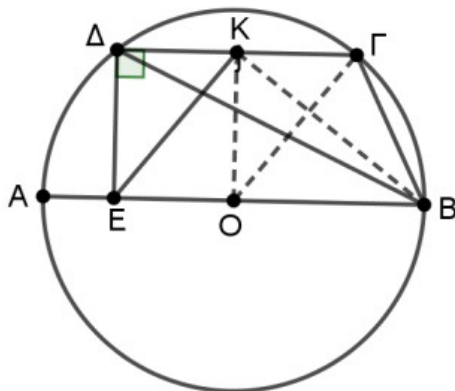
Έστω κύκλος με κέντρο O και διάμετρο AB . Φέρνουμε χορδή $\Gamma\Delta \parallel AB$ με K το μέσο της. Από το Δ φέρνουμε το τμήμα ΔE κάθετο στη $\Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $KGOE$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) $\angle \Delta EK = \frac{\angle \Delta OG}{2}$. (Μονάδες 12)

γ) $KE < KB$. (Μονάδες 5)



1816

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και σημείο Δ στην προέκταση της $B\Gamma$. Από το Δ φέρουμε ΔK κάθετη στην AB και ΔE κάθετη στην προέκταση της $A\Gamma$. Από το σημείο Γ φέρουμε ΓH κάθετη στην AB και ΓZ κάθετη στην $K\Delta$.

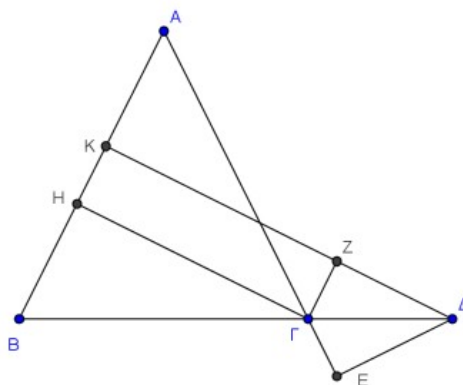
Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία $Z\Gamma\Delta$ είναι ίση με τη γωνία B . (Μονάδες 4)

β) Η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Z\Gamma E$. (Μονάδες 4)

γ) Το τρίγωνο ΔZE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

δ) $\Delta K - \Delta E = H\Gamma$ (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

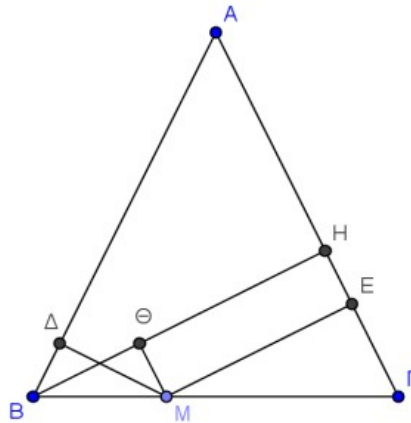
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, τυχαίο σημείο M της βάσης του $B\Gamma$ και το ύψος του BH . Από το M φέρουμε κάθετες $M\Delta$, ME και $M\Theta$ στις AB , $A\Gamma$ και BH αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $MEH\Theta$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

β) $B\Theta = \Delta M$ (Μονάδες 9)

γ) Το άθροισμα $M\Delta + ME = BH$. (Μονάδες 7)



Ρόμβος

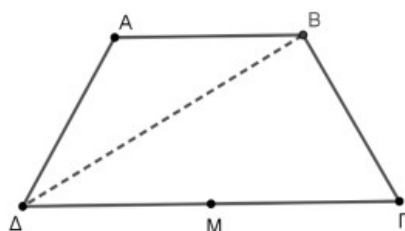
37011

ΘΕΜΑ 2

Στο τραπέζιο του παρακάτω σχήματος έχουμε $AB=AD=\frac{\Gamma\Delta}{2}$, $\hat{A}=60^\circ$ και M το μέσο της πλευράς ΓΔ.

Να αποδείξετε ότι:

- α) η διαγώνιος ΔΒ του τραpezίου είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, (Μονάδες 9)
 β) η ΒΜ χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο. (Μονάδες 16)



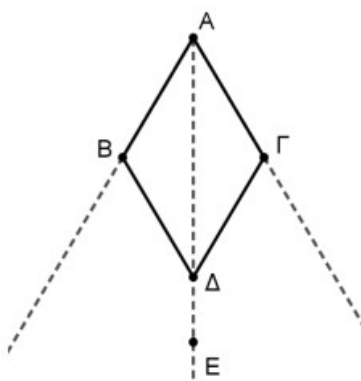
36351

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ρόμβος ΑΒΔΓ. Στην προέκταση της διαγωνίου του ΑΔ (προς το Δ) παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το σημείο Ε ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ (προς το μέρος των Β και Γ αντίστοιχα). (Μονάδες 10)
 β) Το σημείο Ε ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ. (Μονάδες 15)



36349

ΘΕΜΑ 2

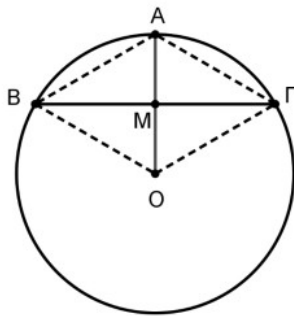
Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε ακτίνα OA και χορδή $B\Gamma$ κάθετη στο μέσο της M .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AFOB$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $AFOB$.

(Μονάδες 15)



36107

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$. Φέρουμε από τη κορυφή A ευθεία $(ε)$ παράλληλη στη $B\Gamma$. Η κάθετη στο μέσο M της πλευράς AB τέμνει την $(ε)$ στο Δ και την $B\Gamma$ στο E .

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta A = \Delta B$ και $E A = E B$.

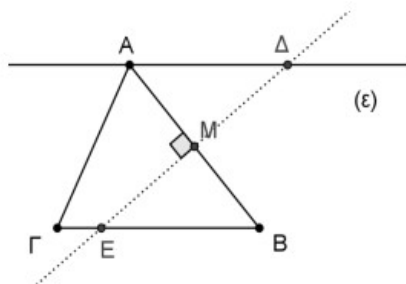
(Μονάδες 6)

β) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $ΑΜΔ$ και $ΕΜΒ$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta B E$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 9)



34513

ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο κέντρου O , έστω OA μία ακτίνα του. Φέρουμε τη μεσοκάθετη της OA που τέμνει τον κύκλο στα σημεία B και Γ .

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο OBA είναι ισόπλευρο,

(Μονάδες 13)

β) το τετράπλευρο $OBA\Gamma$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 12)

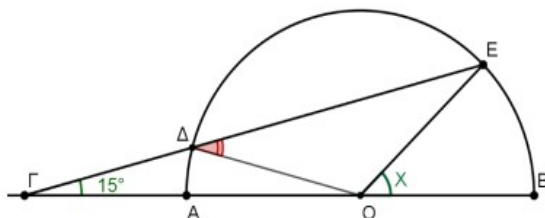
34505

ΘΕΜΑ 2

Σε ημικύκλιο διαμέτρου AB προεκτείνουμε την AB προς το μέρος του A και παίρνουμε ένα σημείο Γ . Θεωρούμε E ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω Δ το σημείο τομής του τμήματος ΓE με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα $\Gamma \Delta$ είναι ίσο με το OB και η γωνία $B\hat{\Gamma}E$ είναι 15° , τότε

α) να αποδείξετε ότι $O\hat{\Delta}E = 30^\circ$. (Μονάδες 13)

β) να υπολογίσετε τη γωνία $E\hat{O}B = x$. (Μονάδες 12)



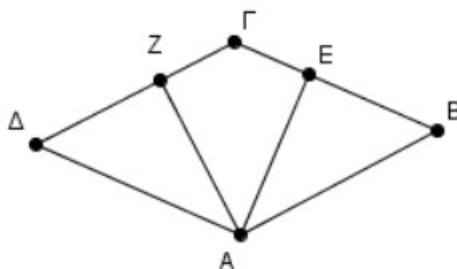
34504

ΘΕΜΑ 2

Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο. Έστω ότι τα τμήματα AZ και AE είναι κάθετα στις πλευρές $\Delta\Gamma$ και ΓB αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Αν το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, τότε $AZ=AE$. (Μονάδες 12)
- β) Αν για το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ισχύει $AZ=AE$, τότε αυτό είναι ρόμβος. (Μονάδες 13)



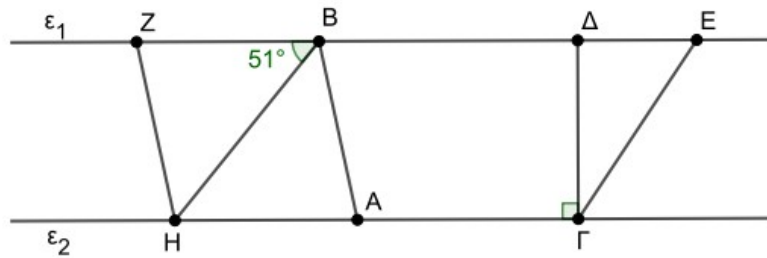
34498

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Προεκτείνουμε το $A\Delta$ (προς το Δ) κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$. Έστω K σημείο της $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $B\Delta = \Delta K$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο ABK είναι ισοσκελές, (Μονάδες 12)
- β) το τετράπλευρο $ABEK$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 13)



Στο παραπάνω σχήμα το τετράπλευρο ABZH είναι ρόμβος.

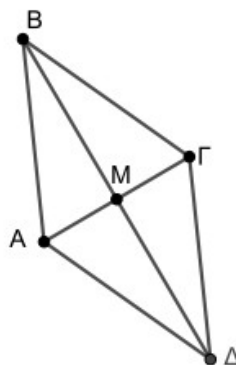
Επίσης δίνεται ότι $\angle ZBH = 51^\circ$ και ότι η $A\Gamma\Delta$ είναι ορθή.

- α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}BH$. (Μονάδες 9)
- β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}HB$. (Μονάδες 6)
- γ) Αν η γωνία $\hat{E}$ του τριγώνου $\Gamma\Delta E$ είναι ίση με 56° , να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $\Gamma\Delta E$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα το M είναι μέσο των τμημάτων AΓ και BΔ. Επίσης $\widehat{AMB} = \widehat{ΓMB}$.

- α) Να αποδείξετε ότι:
- Οι AΓ και BΔ είναι κάθετες. (Μονάδες 10)
 - Το ABΓΔ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)
- β) Το ABΓΔ είναι η κάτοψη ενός κήπου. Για να περιφράξουμε τον κήπο χρειαζόμαστε 30 μέτρα φράχτη. Αν αφήσουμε την πλευρά AB του κήπου χωρίς φράχτη πόσα μέτρα φράχτη θα χρειαστούμε για τις υπόλοιπες πλευρές; (Μονάδες 7)



13767

ΘΕΜΑ 2

Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία A , B και Γ έτσι ώστε $AB = B\Gamma$. Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma E$ προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\hat{B}E$.

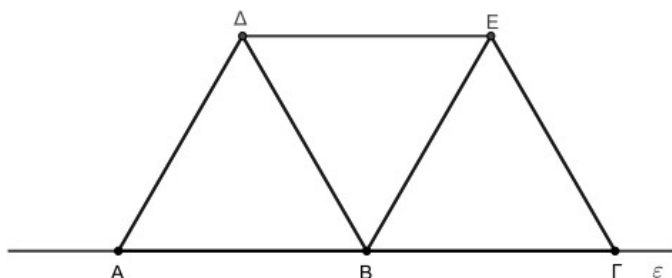
(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta E B$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 8)



37141

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Φέρνουμε τμήμα $B\Delta$ κάθετο στην AB με $B\Delta = A\Gamma$ και τμήμα ΓE κάθετο στην $A\Gamma$ με $\Gamma E = AB$. Θεωρούμε τα μέσα Z και Θ των $A\Delta$ και AE καθώς και τη διχοτόμο $A\delta$ της γωνίας $\Delta\hat{A}E$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = AE$.

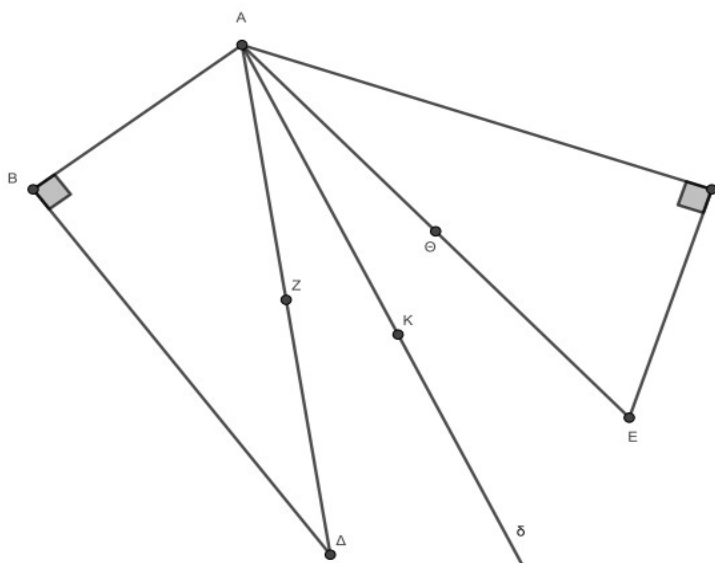
(Μονάδες 9)

β) Αν K τυχαίο σημείο της διχοτόμου $A\delta$, να αποδείξετε ότι ισαπέχει από τα μέσα Z και Θ .

(Μονάδες 9)

γ) Αν το K είναι σημείο της διχοτόμου $A\delta$ τέτοιο ώστε $KZ = AZ$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AZK\Theta$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Έστω ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Delta\Gamma$) με $\widehat{B} = 2 \cdot \widehat{\Gamma}$ και $AB = B\Gamma = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{B}$, η οποία τέμνει το $\Delta\Gamma$ στο K και η κάθετη από το K προς το $B\Gamma$ το τέμνει στο M .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 10)

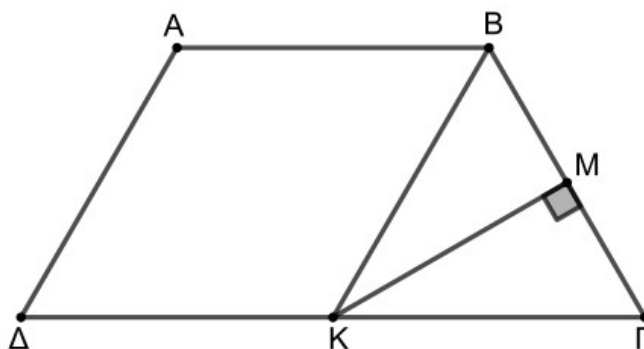
β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο $ABK\Delta$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 8)

ii. Το σημείο M είναι το μέσο του $B\Gamma$.

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος κέντρου O και δυο μη αντιδιαμετρικά σημεία του A και B . Φέρουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία A και B οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ . Φέρουμε επίσης και τα ύψη $A\Delta$ και BE του τριγώνου $AB\Gamma$ τα οποία τέμνονται στο σημείο H .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο BHA είναι ισοσκελές.

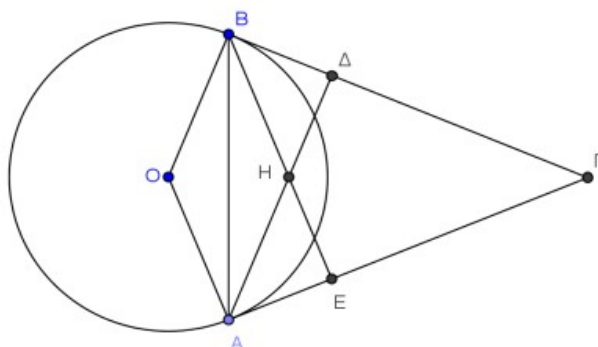
(Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο $OBHA$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 9)

γ) Τα σημεία O, H, Γ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 8)



37109

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και σημεία K, Λ της διαγωνίου του $B\Delta$, τέτοια ώστε να ισχύει $BK = K\Lambda = \Lambda\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AK\Gamma\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι, αν το αρχικό παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, τότε και το $AK\Gamma\Lambda$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

γ) Ποια πρέπει να είναι η σχέση των διαγωνίων του αρχικού παραλληλογράμμου $AN\Gamma\Delta$, ώστε το $AK\Gamma\Lambda$ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

1823

ΘΕΜΑ 4

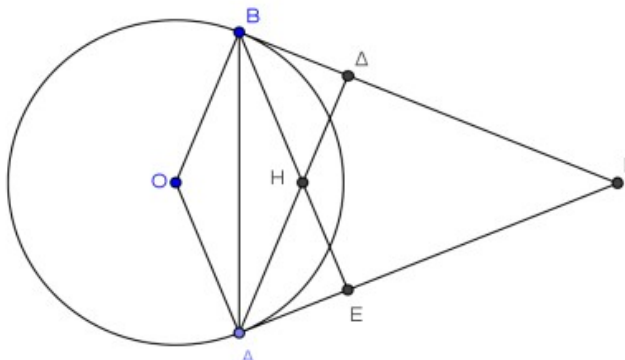
Δίνεται κύκλος κέντρου O και δυο μη αντιδιαμετρικά σημεία του A και B . Φέρουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία A και B οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ . Φέρουμε επίσης και τα ύψη AD και BE του τριγώνου $AB\Gamma$ τα οποία τέμνονται στο σημείο H .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο BHA είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο $OBHA$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)

γ) Τα σημεία O, H, Γ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)

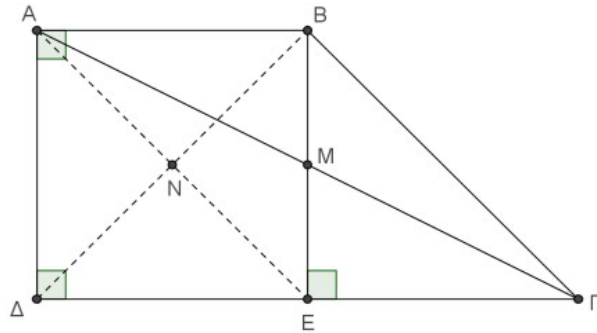


ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Φέρνουμε $BE \perp \Delta\Gamma$ που τέμνει τη διαγώνιο $A\Gamma$ στο M . Φέρνουμε την AE που τέμνει τη διαγώνιο $B\Delta$ στο N .

Να αποδείξετε ότι:

- α) $\hat{\Gamma} = 45^\circ$. (Μονάδες 7)
 β) Το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)
 γ) $AE \perp B\Delta$. (Μονάδες 9)



Τετράγωνο

36174

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο $AB\Delta E$.

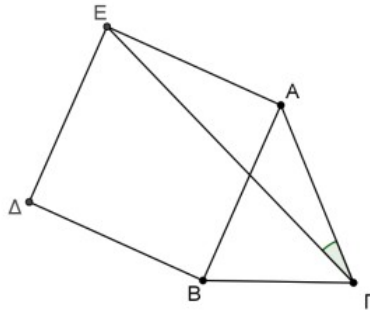
Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισοσκελές,

(Μονάδες 10)

β) $2 \cdot \hat{E}\Gamma A = 90^\circ - \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$.

(Μονάδες 15)



36173

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο $B\Gamma\Delta E$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες :

i. $\hat{A}\hat{B}\hat{E}$

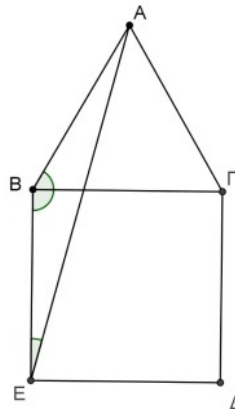
(Μονάδες 8)

ii. $\hat{B}\hat{E}\hat{A}$

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)



14883

ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο κέντρου O φέρουμε τις διαμέτρους του $ΑΓ$ και $ΒΔ$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)

β) Τί είδους γωνία σχηματίζουν οι διάμετροι $ΑΓ$ και $ΒΔ$ αν το $ΑΒΓΔ$ είναι τετράγωνο;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

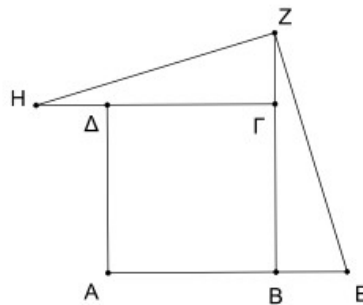
13536

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τετράγωνο $ΑΒΓΔ$. Στις προεκτάσεις των πλευρών $ΑΒ$ προς το $Β$, $ΒΓ$ προς το $Γ$ και $ΓΔ$ προς το $Δ$ θεωρούμε σημεία $Ε$, $Ζ$ και $Η$ αντίστοιχα, ώστε $ΒΕ = ΓΖ = ΔΗ$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΖΕ = ΖΗ$. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι $\widehat{ΕΖΗ} = 90^\circ$. (Μονάδες 10)



34336

ΘΕΜΑ 4

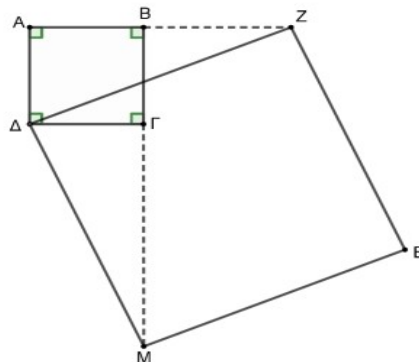
Δίνεται το τετράγωνο $ΑΒΓΔ$. Προεκτείνουμε την πλευρά $ΑΒ$ προς το $Β$ κατά τμήμα $ΒΖ$ και την πλευρά $ΒΓ$ προς το $Γ$ κατά τμήμα $ΓΜ = ΑΖ$. Θεωρούμε σημείο $Ε$ τέτοιο, ώστε το τετράπλευρο $ΔΜΕΖ$ να είναι παραλληλόγραμμο.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $ΑΔΖ$ και $ΓΔΜ$ είναι ίσα και οι γωνίες $\widehat{ΑΔΖ}$ και $\widehat{ΓΔΜ}$ είναι ίσες, (Μονάδες 9)

β) το τετράπλευρο $ΔΜΕΖ$ είναι τετράγωνο, (Μονάδες 9)

γ) οι γωνίες $\widehat{ΒΖΕ}$ και $\widehat{ΕΜΒ}$ είναι παραπληρωματικές. (Μονάδες 7)

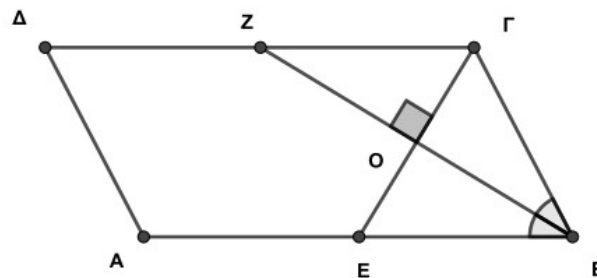


13850

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος και η BZ διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$. Φέρουμε $ΓΟ$ κάθετη στη BZ και την προεκτείνουμε έτσι ώστε να τέμνει την AB στο σημείο E .

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
 β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΟΖ\Gamma$ και $ΟΒΕ$ είναι ίσα. (Μονάδες 7)
 γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EB\Gamma Z$ είναι ρόμβος (Μονάδες 6)
 δ) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας $\hat{B}$ ώστε το τετράπλευρο $EB\Gamma Z$ να είναι τετράγωνο; (Μονάδες 4)



13841

ΘΕΜΑ 4

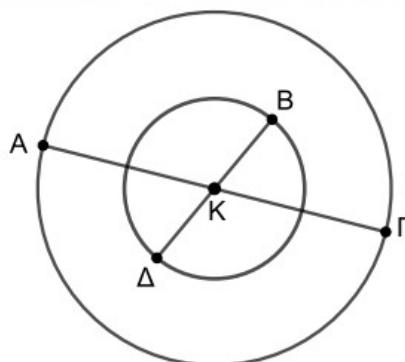
Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, BD η διχοτόμος της γωνίας B και M το μέσο της. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$, η οποία τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E . Αν η EM τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο Z τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι $BE=ED$. (Μονάδες 7)
 β) Να αποδείξετε ότι $BE \parallel Z\Delta$. (Μονάδες 8)
 γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEBZ είναι ρόμβος. (Μονάδες 5)
 δ) Ποιο θα έπρεπε να είναι το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ώστε το τετράπλευρο ΔEBZ να είναι τετράγωνο; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

13848

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα οι κύκλοι έχουν κέντρο K και οι $ΑΓ$ και $ΒΔ$ είναι διάμετροί τους.



α) Αν ισχύει $ΑΓ > ΒΔ$:

i. να σχεδιάσετε το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ και να αποδείξετε ότι είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 8)

ii. να διατυπώσετε μια επιπλέον υπόθεση για τις $ΑΓ$ και $ΒΔ$, ώστε το $ΑΒΓΔ$ να είναι ρόμβος.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

β) Αν οι δύο κύκλοι ταυτίζονται, τότε να εξετάσετε αν ο ακόλουθος ισχυρισμός είναι αληθής:

«Το $ΑΒΓΔ$ είναι τετράγωνο».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

13744

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο $ΑΒΓΔ$. Στις προεκτάσεις των πλευρών του $ΑΒ$ και $ΒΓ$ προς το $Β$ και προς το $Γ$ αντίστοιχα, παίρνουμε τα σημεία $Ε$ και $Ζ$ τέτοια ώστε $ΒΕ = ΓΖ$. Αν $Ρ$ είναι το σημείο τομής των $ΑΖ$ και $ΔΕ$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Οι γωνίες $\widehat{ΑΕΔ}$ και $\widehat{ΒΖΑ}$ είναι ίσες.
- ii. Τα τμήματα $ΑΖ$ και $ΔΕ$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 18)

β) Αν γνωρίζετε ότι το σημείο τομής $Ρ$ των $ΑΖ$ και $ΔΕ$ είναι τέτοιο ώστε $ΡΒ = ΑΒ$, να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου $Ε$ στην προέκταση του τμήματος $ΑΒ$. (Μονάδες 07)

1825

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Ε στην πλευρά ΔΓ. Φέρουμε τη διχοτόμο ΑΖ της γωνίας ΕΑΒ και τη ΔΗ κάθετη από το Δ προς την ΑΖ, η οποία τέμνει την ΑΕ στο Μ και την ΑΒ στο Ν.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΔΝ και ΑΒΖ είναι ίσα.

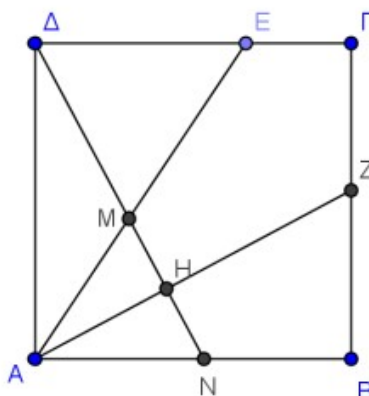
(Μονάδες 8)

β) $AM=AN$ και $DE=EM$.

(Μονάδες 10)

γ) $AE=DE+BZ$

(Μονάδες 7)



1814

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και εντός αυτού ισόπλευρο τρίγωνο ΜΒΓ. Αν η προέκταση της ΑΜ τέμνει την ΒΔ στο σημείο Ε, να αποδείξετε ότι:

α) $\angle A\hat{A}E = 15^\circ$.

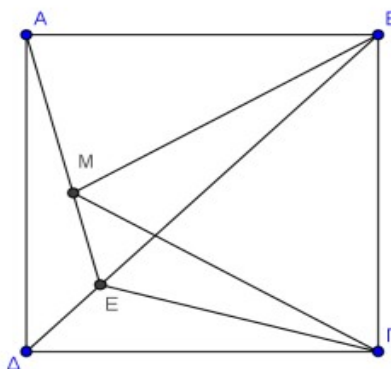
(Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα ΔΑΕ και ΔΕΓ είναι ίσα.

(Μονάδες 8)

γ) Η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΓΜ.

(Μονάδες 9)



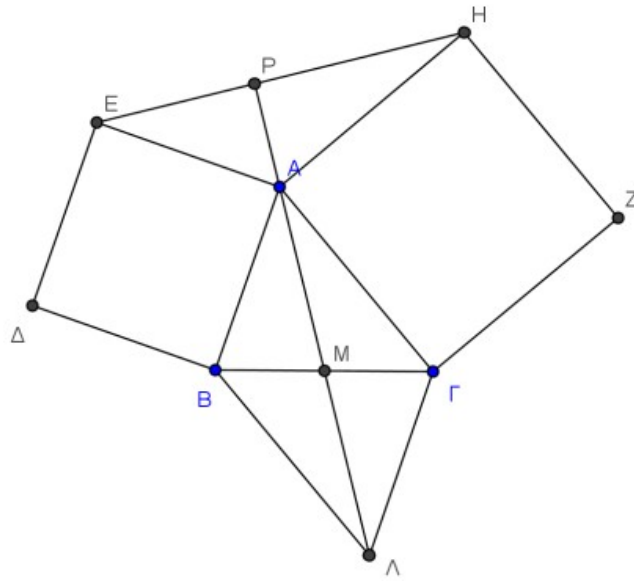
ΘΕΜΑ 4

Εκτός τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε τετράγωνα $AB\Delta E$ και $A\Gamma ZH$. Αν M το μέσο του $B\Gamma$ και Λ σημείο στην προέκταση της AM τέτοιο ώστε $AM = M\Lambda$, να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma\Lambda = AE$. (Μονάδες 10)

β) Οι γωνίες $A\Gamma\Lambda$ και EAH είναι ίσες. (Μονάδες 10)

γ) Η προέκταση της MA (προς το A) τέμνει κάθετα την EH . (Μονάδες 5)



1788

ΘΕΜΑ 4

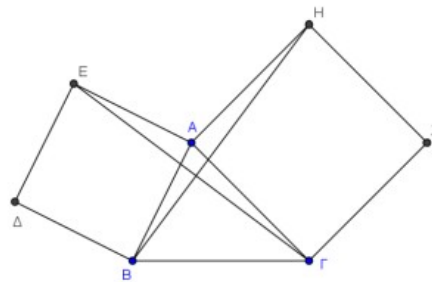
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και στο εξωτερικό του σχηματίζονται τα τετράγωνα $AB\Delta E$ και $A\Gamma ZH$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{E} \hat{A} H = \hat{A} \hat{B} \Gamma + \hat{A} \hat{\Gamma} B$ (Μονάδες 8)

β) $E\Gamma = BH$ (Μονάδες 9)

γ) Η $E\Gamma$ είναι κάθετη στη BH . (Μονάδες 8)



1750

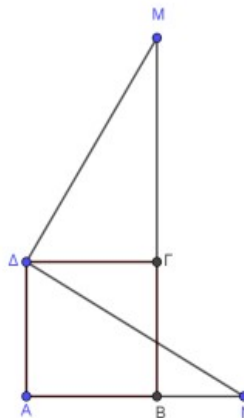
ΘΕΜΑ 4

Στο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνουμε την πλευρά AB κατά τμήμα BN και την πλευρά $B\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma M = AN$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta N = \Delta M$ (Μονάδες 12)

β) $\Delta N \perp \Delta M$ (Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και έξω από αυτό, κατασκευάζουμε τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα ABE , $B\Gamma Z$, $\Gamma\Delta H$, $\Delta A\Theta$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 15)

β) Αν το αρχικό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο, τότε το $EZH\Theta$ τι είδους παραλληλόγραμμο είναι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

