

Άλγεβρα-Τράπεζα Θεμάτων

Εξισώσεις και Ανισώσεις που ανάγονται σε Πολυωνμικές

18713

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - \alpha x^2 + 2x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν $P(1) = 2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x-2)$ ισούται με 15,

α) Να δείξετε ότι $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $\pi(x) = x^2 + 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

(Μονάδες 5)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\sin^3 x + \sin x = 1 - \frac{1}{2} \eta \mu^2 x$, $x \in (0, 2\pi)$.

(Μονάδες 7)

20759

ΘΕΜΑ 4

Το εμβαδόν του τριγώνου OAM που βλέπετε στο παρακάτω σχήμα είναι $(OAM) = \frac{4}{6}$ τετραγωνικές μονάδες. Η ευθεία ε είναι εφαπτόμενη στον κύκλο στο σημείο A.

α) Να αποδείξετε ότι για τη γωνία $\omega = \widehat{AOM}$ ισχύει $\epsilon \phi \omega = \frac{4}{3}$, $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$.

(Μονάδες 08)

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta \mu \omega$, $\sigma \upsilon \nu \omega$, $\sigma \phi \omega$ της γωνίας

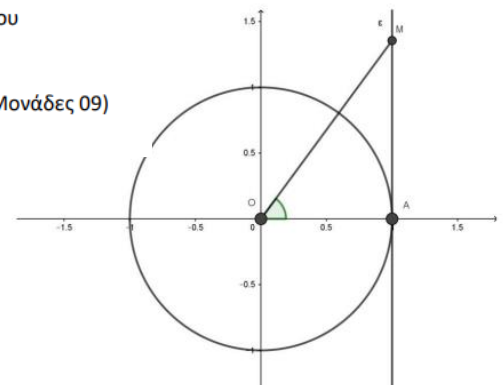
$\omega = \widehat{AOM}$ αν ισχύει $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$.

(Μονάδες 08)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$f(x) = \eta \mu^2 x - 5 \eta \mu \omega \cdot \eta \mu x + 5 \sigma \upsilon \nu \omega$ και του άξονα x' , όπου $\omega = \widehat{AOM}$ η γωνία του προηγούμενου ερωτήματος και $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 09)



20731

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 6x^2 - 7$.

α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $x-1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$.

(Μονάδες 5)

β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $P(x)$ σε πολυώνυμα πρώτου ή δευτέρου βαθμού.

(Μονάδες 8)

γ)

i. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 5)

ii. Αν οι αριθμοί -1 και 1 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $P(x)=0$, να λύσετε την εξίσωση

$$(2\eta\mu x - 1)^4 + 6(2\eta\mu x - 1)^2 - 7 = 0, \text{ για } x \in \mathbb{R}.$$

(Μονάδες 7)

20647

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - \beta x + 3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν είναι γνωστό ότι έχει ρίζα τον αριθμό 2 , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον ένας συντελεστής του δεν είναι ακέραιος.

(Μονάδες 7)

Αν επιπλέον $P(1) = 0$, τότε:

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -3$ και $\beta = \frac{21}{2}$.

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$.

(Μονάδες 6)

δ) Να λύσετε την εξίσωση $P(\sin x) = 0$.

(Μονάδες 6)

18696

ΘΕΜΑ 4

Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \text{ και } g(x) = 4x - 4 \text{ με } x \in \mathbb{R}.$$

α) Από τη γραφική παράσταση της f , να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.

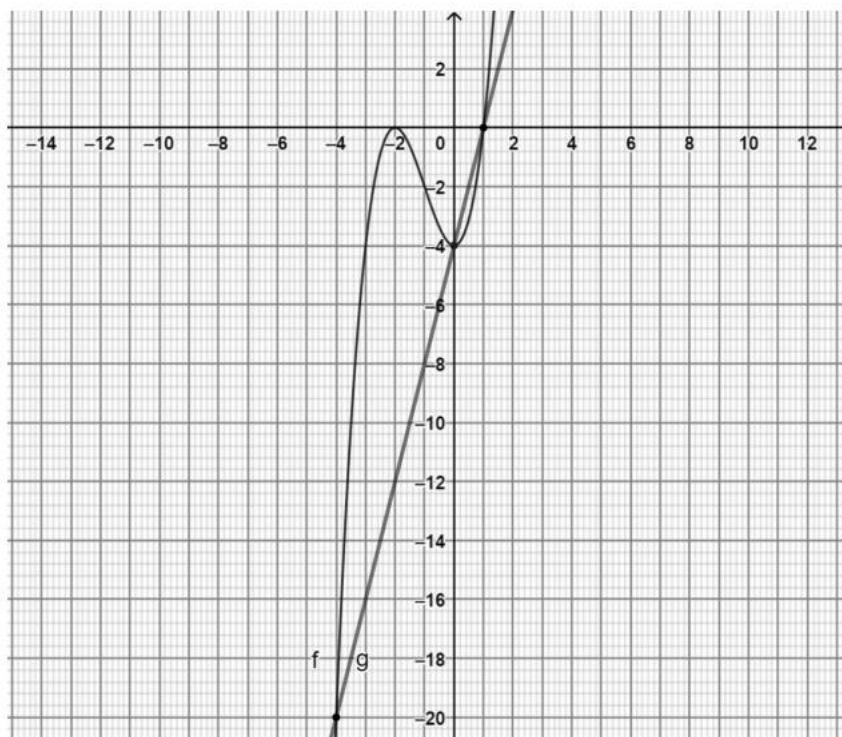
(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε γραφικά και αλγεβρικά την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε αλγεβρικά τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης g είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

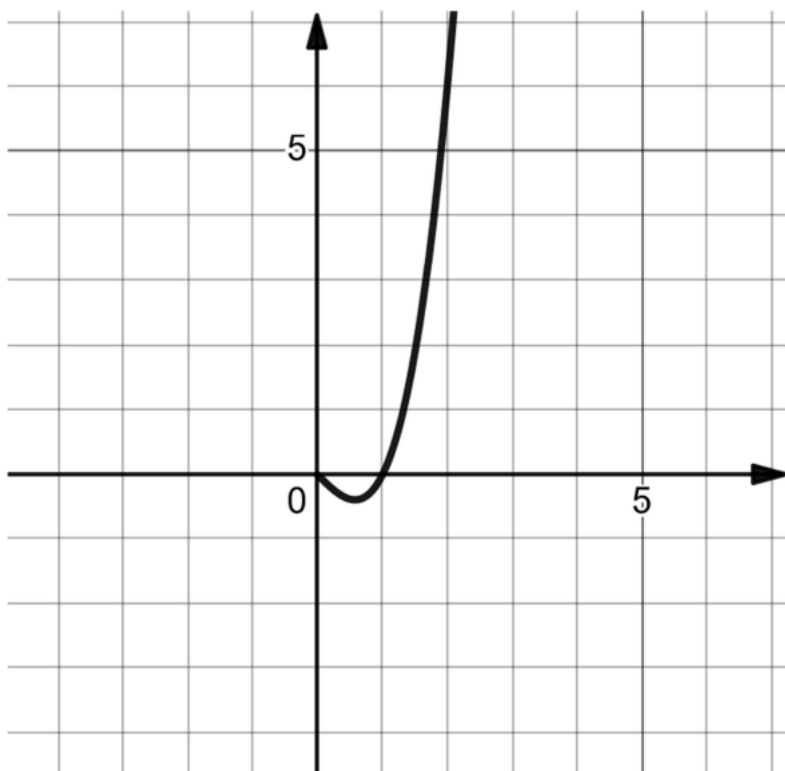
Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & \text{όταν } x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & \text{όταν } x < 0 \end{cases}$ και $h(x) = x^3 - x, x \in \mathbb{R}$.

α)

- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι περιττή.

(Μονάδες 03)

- ii. Να συμπληρώσετε το παρακάτω σχήμα ώστε να παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h .



(Μονάδες 04)

- iii. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε το παραπάνω σχήμα, να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 08)

β) Αν $x \geq 0$ να αποδείξετε ότι: η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από την ευθεία $\varepsilon: y = x$ αν και μόνο αν η γραφική παράσταση της h βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)