

Τράπεζα Θεμάτων
Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

22040

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (-4, 3)$.

α) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο 1.

(Μονάδες 13)

21682

ΘΕΜΑ 2

Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δυο διανύσματα για τα οποία ισχύει $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (11, 2)$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (-5, -10)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = (3, -4)$ και να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 14)

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ και $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$.

(Μονάδες 11)

20773

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -2)$ και $\vec{\beta} = (2, 3)$

α) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

(Μονάδες 08)

β) Αν $\vec{u} = (4, -1)$ να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε το διάνυσμα $\vec{u}$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{v} = (1, \kappa)$.

(Μονάδες 09)

γ) Για $\kappa = 4$ να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v}$ του προηγούμενου ερωτήματος.

(Μονάδες 08)

20732

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 1)$ και $\vec{\beta} = (-8, -4)$.

α) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα και ότι $|\vec{\beta}| = 4|\vec{\alpha}|$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} < 0$.

(Μονάδες 7)

15252

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{AB} = (2, 1)$ και $\vec{AG} = (3, -1)$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{BG} = (1, -2)$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με υποτείνουσα την ΑΓ.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

(Μονάδες 8)

22064

ΘΕΜΑ 4

α) Αν $\vec{AB}$, $\vec{AG}$, $\vec{AD}$ είναι τρία διανύσματα, τότε οι ποσότητες $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$ και $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$: i) είναι αριθμοί ή διανύσματα; ii) μπορούν να συγκριθούν;

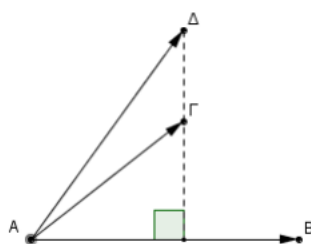
(Μονάδες 5)

β) Για τα διανύσματα του παρακάτω σχήματος να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

i) $\vec{AB} \cdot \vec{AG} > \vec{AB} \cdot \vec{AD}$

ii) $\vec{AB} \cdot \vec{AG} < \vec{AB} \cdot \vec{AD}$

iii) $\vec{AB} \cdot \vec{AG} = \vec{AB} \cdot \vec{AD}$



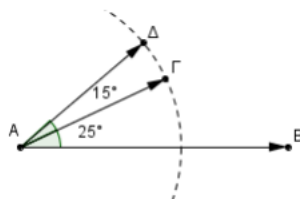
(Μονάδες 10)

γ) Για τα διανύσματα του παρακάτω σχήματος (η διακεκομμένη γραμμή είναι τμήμα κύκλου με κέντρο A) να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

i) $\vec{AB} \cdot \vec{AG} > \vec{AB} \cdot \vec{AD}$

ii) $\vec{AB} \cdot \vec{AG} < \vec{AB} \cdot \vec{AD}$

iii) $\vec{AB} \cdot \vec{AG} = \vec{AB} \cdot \vec{AD}$



(Μονάδες 10)

Σε όλα τα ερωτήματα, να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

22063

ΘΕΜΑ 4

α) Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Να αποδείξετε ότι:

i) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$.

(Μονάδες 5)

ii) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = \left| |\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| \right| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \updownarrow \vec{\beta}$.

(Μονάδες 5)

β) Θεωρούμε τρία διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν ότι:

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}, \quad |\vec{\alpha}| = 1, \quad |\vec{\beta}| = 2, \quad |\vec{\gamma}| = 1.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\gamma}$.

(Μονάδες 5)

ii) $\vec{\alpha} \updownarrow \vec{\beta}$.

(Μονάδες 5)

iii) $\vec{\alpha} = \vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} = -2\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

α) Να αποδειχθεί ότι για όλα τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ ισχύει:

$$|\vec{a} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{a} - \vec{\beta}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2 \quad (1)$$

(Μονάδες 06)

β) Δίνεται το παραλληλόγραμμο $OAGB$ με $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$.

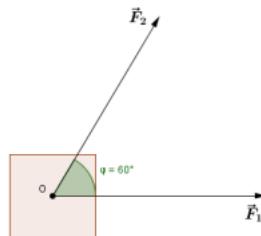
i. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{a} + \vec{\beta}$ και $\vec{a} - \vec{\beta}$.

(Μονάδες 05)

ii. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας (1).

(Μονάδες 04)

γ) Ένα σώμα σύρεται πάνω σε λείο επίπεδο από δύο ανθρώπους, οι οποίοι εξασκούν πάνω σε αυτό δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα 10 N (Newton) και η γωνία που σχηματίζουν είναι 60° . Να σχεδιάσετε την συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$ και να βρείτε το μέτρο της.



(Μονάδες 10)

15852

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3,2)$, $\vec{\beta} = (-2,1)$.

Να υπολογίσετε:

α) το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$.

(Μονάδες 7)

β) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 6)

γ) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$.

(Μονάδες 12)

15320

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ με $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ και $\vec{OB} = \vec{\beta}$, όπου $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα.

α) Να δείξετε ότι:

i. $|\vec{OG}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2$.

(Μονάδες 9)

ii. $|\vec{AB}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2$.

(Μονάδες 9)

β) Αν $|\vec{OG}| = |\vec{AB}|$, να δείξετε ότι το ΟΑΓΒ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 7)

22554

ΘΕΜΑ 2

Στο καρτεσιανό επίπεδο Οxy, με μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $\hat{x}, \hat{y}$ τα $\vec{i}, \vec{j}$ αντίστοιχα, τα σημεία Α και Β έχουν διανύσματα θέσεως $\vec{OA} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ και $\vec{OB} = 6\vec{i} - \vec{j}$.

Έστω Μ ένα σημείο τέτοιο ώστε $\vec{OM} = \frac{1}{5}(2\vec{OA} - \vec{OB})$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\vec{AB} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$,

(Μονάδες 8)

ii. $\vec{OM} = \vec{j}$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{OM}$.

(Μονάδες 9)

22170

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, 3)$, $\vec{\beta} = (-2, -\frac{1}{2})$ και $\vec{v} = (x^2, x - 1)$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$. (Μονάδες 07)
- β) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{u} = (3, 4)$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα. (Μονάδες 09)
- γ) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά; (Μονάδες 09)

14586

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ και $\Gamma(5, -2)$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AB}$, $\vec{AT}$ και να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή. (Μονάδες 9)
- β) Αν M είναι το μέσο του $B\Gamma$, να βρείτε τα μέτρα των $\vec{AM}$ και $\vec{BT}$. (Μονάδες 8)
- γ) Να γραφεί το $\vec{BT}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{AT}$ και $\vec{AM}$. (Μονάδες 8)

20888

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}| = 4$, $|\vec{\beta}| = 5$, $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{2\pi}{3}$

και $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε:

- α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$. (Μονάδες 10)
- β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$. (Μονάδες 15)

20685

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (1,1)$, $\vec{w} = (-10,2)$ και τα σημεία $A(-1,2)$, $B(\beta, 0)$, $\Gamma(0, \gamma)$. Τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{AB}$ είναι κάθετα και το διάνυσμα $\vec{w}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\vec{AG}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AB}$ και να αποδείξετε ότι $\beta = 1$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AG}$ και να αποδείξετε ότι $\gamma = \frac{9}{5}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$.

(Μονάδες 7)

15186

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$, $B(6,3)$, $\Delta(1, -2)$ και $\Gamma(9,2)$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το μέσο M του τμήματος AB έχει συντεταγμένες $(4,2)$ και το μέσο N του τμήματος $\Gamma\Delta$ έχει συντεταγμένες $(5,0)$.

(Μονάδες 8)

β) $\vec{MN} = (1, -2)$ και $\vec{\Delta\Gamma} = (8,4)$.

(Μονάδες 8)

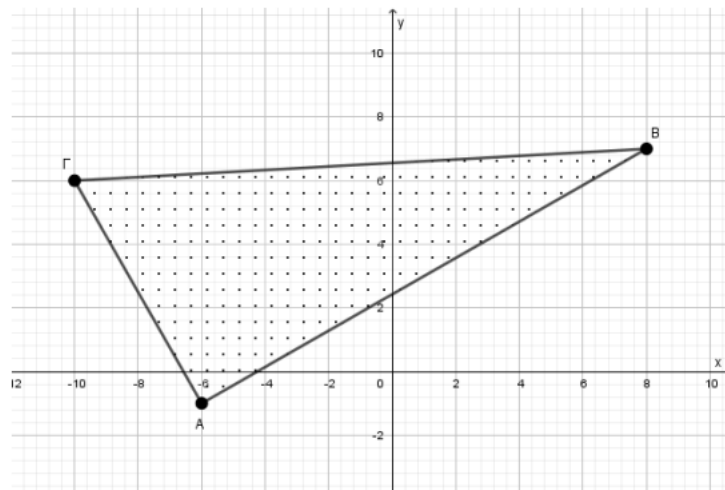
γ) $\vec{MN} \perp \vec{\Delta\Gamma}$.

(Μονάδες 9)

15996

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(-6, -1)$, $B(8, 7)$, $\Gamma(-10, 6)$, τα οποία ορίζουν τρίγωνο $AB\Gamma$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ και του αθροίσματος τους $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma}$.

(Μονάδες 10)

β) Ένας μαθητής βλέποντας το τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχυρίστηκε ότι είναι ορθογώνιο. Να ελέγξετε την αλήθεια του ισχυρισμού.

(Μονάδες 15)

18547

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A(0-1)$, $B(\lambda, 1)$ και $\Gamma(\lambda-2, \lambda-3)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε :

- i. Τα σημεία A, B και Γ να είναι κορυφές τριγώνου. (Μονάδες 8)
- ii. Το τρίγωνο ABΓ να είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$. (Μονάδες 7)

β) Για $\lambda = -2$, να βρείτε:

- i. Το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 4)
- ii. Το εμβαδό του τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 6)

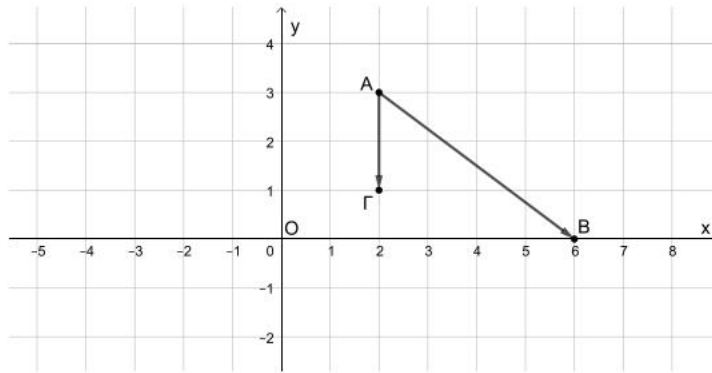
17075

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AI}$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = (4, -3)$ και $\overrightarrow{AI} = (0, -2)$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AI}$. (Μονάδες 13)



16428

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με: $|\vec{\alpha}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\vec{\beta}| = \frac{1}{2}$ και $|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\frac{3}{8}$. (Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

16427

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(-2, 3)$, $B(0, 8)$, $\Gamma(5, 3)$ και $\Delta(10, 5)$. Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$. (Μονάδες 12)

β) τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 13)

16426

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -1)$ και $\vec{\beta} = (-3, 2)$.

α) Να υπολογίσετε το γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (x, y)$ όταν $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha}$ και $|\vec{\gamma}| = \sqrt{5}$. (Μονάδες 15)

14953

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τρίγωνο ABΓ με $A(-2, 5), B(7, 8), \Gamma(1, -4)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{AF}$.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{AF}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε, σε μοίρες, τη γωνία $\widehat{B\Gamma A}$.

(Μονάδες 5)

15317

ΘΕΜΑ 2

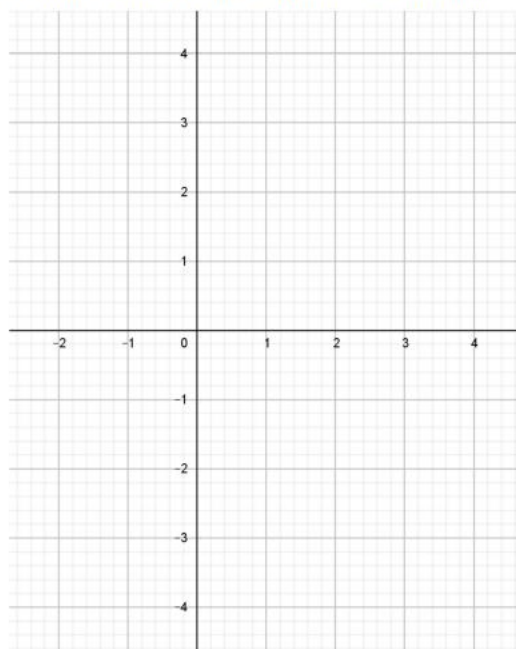
Δίνονται τα διανύσματα $\vec{v} = (3, 0)$ και $\vec{w} = (-3, 4)$.

α) Να δείξετε ότι τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα.

(Μονάδες 12)

β)

i. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$.



(Μονάδες 10)

ii. Να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας θ που σχηματίζουν τα διανύσματα.

(Μονάδες 3)

16144

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο, πλευρά 4 και $\hat{A} = 60^\circ$. Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα :

α) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

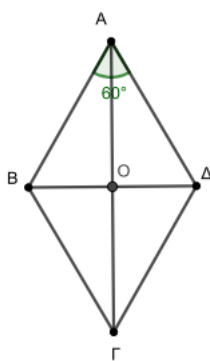
β) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BG}$

γ) $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AO}$

δ) $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OB}$

ε) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{GD}$

(Μονάδες 25)



16141

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοπλευρο τρίγωνο ABΓ πλευράς 10 και το μέσο M της πλευράς BΓ.

α) Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών:

i. $(\widehat{AB, AG})$

ii. $(\widehat{AM, BG})$

iii. $(\widehat{AM, GA})$

iv. $(\widehat{BM, GM})$

v. $(\widehat{GM, GB})$

(Μονάδες 10)

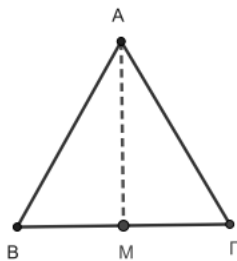
β) Να υπολογιστούν τα εσωτερικά γινόμενα:

i. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BG}$

ii. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{GA}$

iii. $\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{GB}$

(Μονάδες 15)



15825

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=2, |\vec{\beta}|=4, (\vec{\alpha}, \vec{\beta})=\frac{\pi}{3}$ και το $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}=4$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}=0$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma})$.

(Μονάδες 7)

15379

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,3)$, $\vec{\beta} = (3,-1)$.

Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και την γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 13)

β) το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

(Μονάδες 12)

15463

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{AB} = (2,1)$ και $\vec{AI} = (3,-1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{BI} = (1,-2)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{AB} \perp \vec{BI}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι $|\vec{AB}| = |\vec{BI}|$.

(Μονάδες 8)

15073

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,2)$ και $\vec{\beta} = (2,3)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$.

(Μονάδες 9)

15038

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τέτοια ώστε $|\vec{\alpha}| = 3, |\vec{\beta}| = 4$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τα $\vec{\alpha}^2$ και $\vec{\beta}^2$.

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = 15$.

(Μονάδες 10)