Θέματα Τράπεζας Θεμάτων

Γεωμετρία Α΄Λυκείου

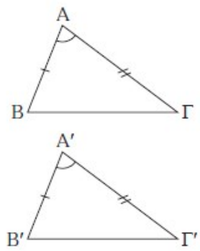
Ισότητα τριγώνων

Θεωρία

Θεωρήματα

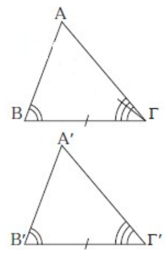
Θεώρημα I (1ο Κριτήριο – ΠΓΠ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.



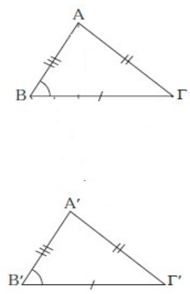
Θεώρημα (2ο Κριτήριο – ΓΠΓ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.



Θεώρημα (3ο Κριτήριο – ΠΠΠ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.



Πορίσματα

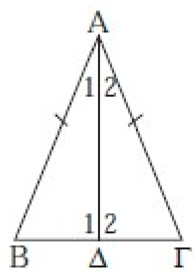
ΠΟΡΙΣΜΑ I

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.

ΠΟΡΙΣΜΑ I

Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.



ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ

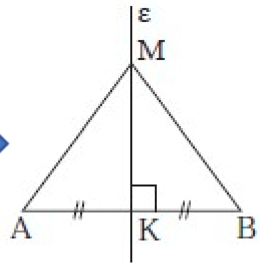
Οι γωνίες ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ

Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙΙ

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

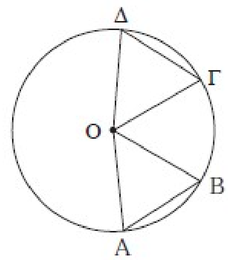


ΠΟΡΙΣΜΑ IV

Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙΙ

Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μικρότερων του ημικυκλίου, είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.



ΠΟΡΙΣΜΑ IV

Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου μεγαλύτερων του ημικυκλίου είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

Ασκήσεις

Θέμα 2 - 1627

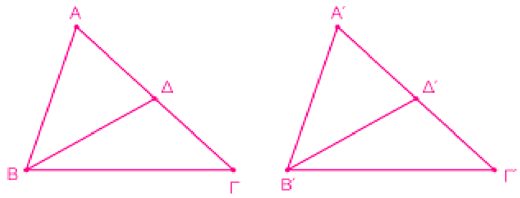
Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και η διχοτόμος της $O\delta$. Θεωρούμε σημείο M της $O\delta$ και σημεία A και B στις ημιευθείες Ox και Oy αντίστοιχα, τέτοια ώστε $OA = OB$. Να αποδείξετε ότι:

α. $MA = MB$

β. Η ημιευθεία $O\delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{M}B$.

Θέμα 2 - 13518

Δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ του σχήματος με $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $AB = A'B'$. Αν οι διάμεσοι $B\Delta$ και $B'\Delta'$ είναι ίσες, να αποδείξετε ότι:



α. $\hat{A} = \hat{A}'$

β. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

Θέμα 2 - 1598

Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $AE = A\Gamma$.

α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι ίσα.

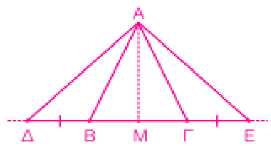
β. Αν AM είναι η διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ και η προέκταση της AM τέμνει την $E\Delta$ στο Z, να δείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και ABM είναι ίσα.

ii. $Z\Delta = \dfrac{E\Delta}{2}$

Θέμα 2 - 1592

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$. Στην προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ και προς τα δύο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και E αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:



α. $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$

β. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.

γ. Η διάμεσος AM του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι και διάμεσος του τριγώνου $A\Delta E$.

Θέμα 2 - 12635

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M είναι το μέσο της βάσης του $B\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB, $A\Gamma$ προς τα B,Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE ώστε $B\Delta = \Gamma E$.

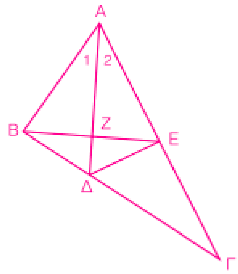
α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $MB\Delta$ και $M\Gamma E$ είναι ίσα.

β. Να αποδείξετε ότι η γωνία $M\Delta E$ είναι ίση με τη γωνία $ME\Delta$.

Θέμα 2 - 1621

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$ και στις ίσες πλευρές AB, $A\Gamma$ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $A\Delta = \dfrac{1}{3}AB$ και $AE = \dfrac{1}{3}A\Gamma$. Αν M είναι μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔEM είναι ισοσκελές.

Θέμα 2 - 12705



Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο, ώστε $ΑΓ = 2ΑΒ$. Η διχοτόμος του ΑΔ τέμνει την διάμεσο ΒΕ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

α. $ΑΒ = ΑΕ = \frac{ΑΓ}{2}$.

β. $ΔΒ = ΔΕ$.

γ. $ΑΖ \perp ΒΕ$.

Θέμα 2 - 1601

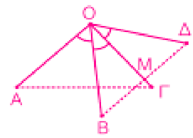
Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και σημείο Μ εσωτερικό του τριγώνου, τέτοιο ώστε $ΜΒ = ΜΓ$.

Να αποδείξετε ότι:

α. Τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΑΜΓ είναι ίσα.

β. Η ευθεία ΑΜ διχοτομεί τη γωνία $Β\widehat{Μ}Γ$.

Θέμα 2 - 1632

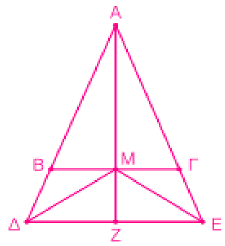


Αν $Α\hat{Ο}Β = Β\hat{Ο}Γ = Γ\hat{Ο}Δ$ και $ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ$, να αποδείξετε ότι:

α. $ΑΓ = ΒΔ$

β. το Μ είναι μέσο της ΒΔ, όπου Μ το σημείο τομής των τμημάτων ΟΓ και ΒΔ.

Θέμα 2 - 12636



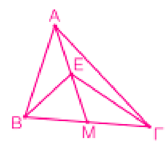
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και Μ είναι το μέσο της βάσης ΒΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ, ΑΓ παίρνουμε τα τμήματα ΒΔ, ΓΕ αντίστοιχα ώστε ΒΔ = ΓΕ.

α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα.

β. Να αποδείξετε ότι η γωνία ΜΔΕ είναι ίση με τη γωνία ΜΕΔ.

γ. Αν η ΑΜ τέμνει την ΔΕ στο σημείο Ζ να αποδείξετε ότι η ΑΖ είναι κάθετη στην ΔΕ.

Θέμα 2 - 1660

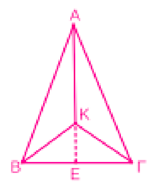


Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της διαμέσου του ΑΜ.
Αν $ΒΓ = 2ΒΕ$ να αποδείξετε ότι:

α. $Α\hat{Ε}Β = Ε\widehat{Μ}Γ$

β. $ΑΒ = ΕΓ$

Θέμα 2 - 1591



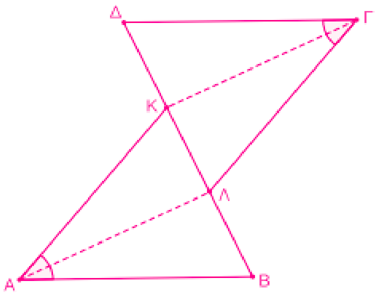
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και Κ εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο ώστε $ΚΒ = ΚΓ$.

α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ είναι ίσα.

β. Να αποδείξετε ότι η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $Β\widehat{Α}Γ$.

γ. Η προέκταση της ΑΚ τέμνει την ΒΓ στο Ε. Να δείξετε ότι η ΚΕ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΚΓ.

Θέμα 2 - 13826



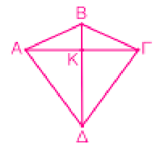
Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ του σχήματος έχουν $AB = \Gamma\Delta = AK = \Gamma\Lambda$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.

α. **Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ είναι ίσα και ότι έχουν $BK = \Delta\Lambda$.**

β. **Έστω ότι Λ και Κ είναι τα μέσα των ΒΚ και ΔΛ αντίστοιχα:**

- **i.** **Να εξετάσετε αν τα τμήματα ΒΛ, ΛΚ και ΚΔ είναι ίσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**
- **ii.** **Να αποδείξετε ότι οι ΑΛ και ΓΚ είναι κάθετες στην ευθεία ΚΛ.**

Θέμα 2 - 1624

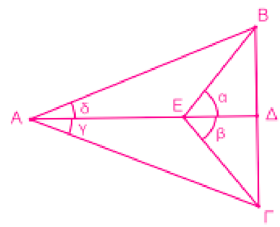


Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $BA = B\Gamma$ και $\Delta A = \Delta\Gamma$. Οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ του τετράπλευρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα. Να αποδείξετε ότι:

α. **Η ΒΔ είναι διχοτόμος των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.**

β. **Η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ.**

Θέμα 2 - 1587



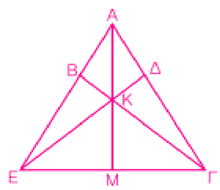
Αν για το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = A\Gamma$) του σχήματος ισχύουν $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ και $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$, να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

α. **Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα.**

β. **Το τρίγωνο ΓΕΒ είναι ισοσκελές.**

γ. **Η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ.**

Θέμα 4 - 1846



Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$.
Στην προέκταση της ΑΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε $AE = A\Gamma$. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε $A\Delta = AB$. Αν τα τμήματα ΔΕ και ΒΓ τέμνονται στο Κ και η προέκταση της ΑΚ τέμνει την ΕΓ στο Μ, να αποδείξετε ότι:

α. $B\Gamma = \Delta E$

β. $BK = K\Delta$

γ. **Η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας Α.**

δ. **Η ΑΜ είναι μεσοκάθετος της ΕΓ.**

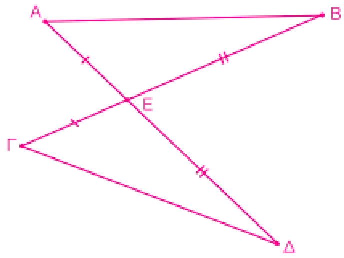
Θέμα 4 - 13499

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma(\hat{A} = 90°)$ με $AB < A\Gamma$ και ΑΗ το ύψος προς την υποτείνουσα. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε τέτοια ώστε $\Delta B = AB$ και $\Gamma E = \Gamma A$. Αν ΔΖ και ΕΘ είναι οι αποστάσεις των Δ και Ε από τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α. $\Gamma\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}H$ και $E\hat{A}B = H\hat{A}E$

β. $\Delta E = \Delta Z + E\Theta$.

Θέμα 4 - 13839



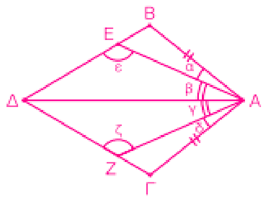
Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Ε έτσι ώστε ΑΕ = ΓΕ και ΒΕ = ΕΔ.

α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ είναι ίσα.

β. Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις ΕΗ και ΕΘ του σημείου Ε από τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ, αντίστοιχα, είναι ίσες.

γ. Αν οι προεκτάσεις των ΑΒ και ΓΔ προς τα Α και Γ αντίστοιχα τέμνονται στο Ζ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές.

Θέμα 4 - 1582

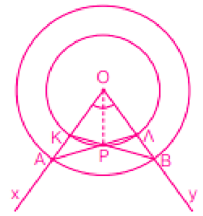


Αν στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{\alpha} = \hat{\delta}$, $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$ και ΑΒ = ΑΓ , να αποδείξετε ότι:

α. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα.

β. Οι γωνίες ε και ζ είναι ίσες.

Θέμα 4 - 1725



Δίνεται οξεία γωνία $x\widehat{O}y$ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (O, ρ_1) και (O, ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$, που τέμνουν την Οx στα σημεία Κ, Α και την Oy στα Λ, Β αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:

α. ΑΛ = ΒΚ

β. Το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ισοσκελές, όπου Ρ το σημείο τομής των ΑΛ και ΒΚ.

γ. Η ΟΡ διχοτομεί την $x\widehat{O}y$.