

Υπερβολή

21973

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- i. Αν ισχύει  $|\vec{\alpha}| = \lambda |\vec{\beta}|$  τότε υποχρεωτικά  $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$ .
- ii. Η εφαπτομένη του κύκλου  $C: x^2 + y^2 = \rho^2$  σε ένα σημείο του  $A(x_1, y_1)$ , έχει εξίσωση  $xx_1 + yy_1 = \rho^2$ .
- iii. Η διευθετούσα της παραβολής  $y^2 = 2px$ , έχει εξίσωση  $x = -\frac{p}{2}$ .
- iv. Η εκκεντρότητα μιας έλλειψης είναι μικρότερη της μονάδας.
- v. Η εξίσωση:  $x^2 + y^2 = a^2$  είναι εξίσωση ισοσκελούς υπερβολής.

(Μονάδες 10)

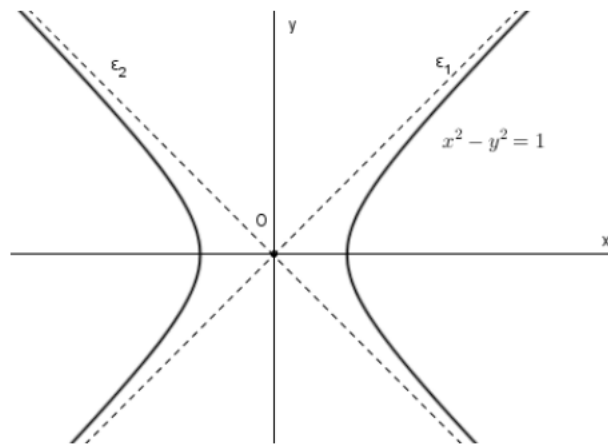
β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $A(x_0, y_0)$  και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  είναι  $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ .

(Μονάδες 15)

22051

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η υπερβολή  $x^2 - y^2 = 1$ . Να αποδείξετε για τις ασύμπτωτες ευθείες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  της υπερβολής ότι:



α) Συμπίπτουν με την διχοτόμο του 1<sup>ου</sup> και 3<sup>ου</sup> τεταρτημορίου και την διχοτόμο του 2<sup>ου</sup> και 4<sup>ου</sup> τεταρτημορίου, αντίστοιχα.

(Μονάδες 13)

β) Είναι ευθείες κάθετες μεταξύ τους.

(Μονάδες 12)

21651

ΘΕΜΑ 2

Η υπερβολή  $C$  έχει εστίες τα σημεία  $E(5,0), E'(-5,0)$  και διέρχεται από το σημείο  $A(4,0)$ .

α) Να αποδείξετε ότι έχει εκκεντρότητα  $\frac{5}{4}$ .

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την εξίσωση της  $C$ .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C$  στο σημείο της  $M(5, \frac{9}{4})$ .

(Μονάδες 7)

21218

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι υπερβολές  $(C_1): x^2 - y^2 = 1, (C_2): y^2 - x^2 = 1$ .

α) Να αποδείξετε ότι οι εστίες της  $C_1$  είναι οι  $E_1(\sqrt{2}, 0), E'_1(-\sqrt{2}, 0)$ .

(Μονάδες 12)

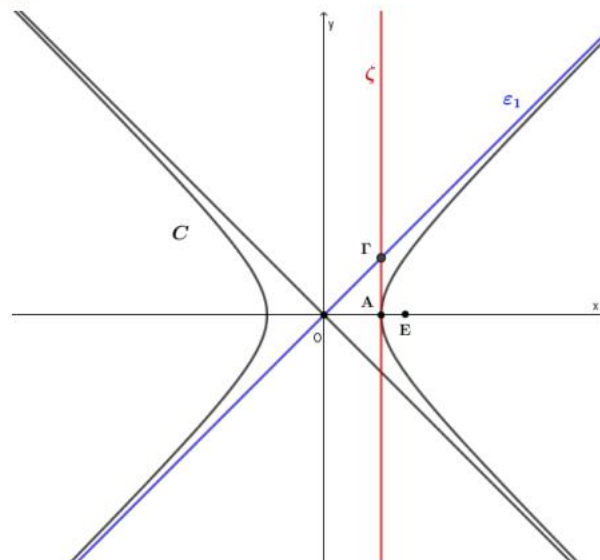
β) Αν  $E_2, E'_2$  οι εστίες της  $C_2$  τότε να αποδείξετε ότι το  $E_1E_2E'_1E'_2$  είναι τετράγωνο.

(Μονάδες 13)

20869

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται η υπερβολή  $C: x^2 - y^2 = 1$ , η εστία της  $E$ , η εφαπτομένη της  $\zeta$  στο σημείο  $A(1,0)$  και το σημείο  $\Gamma$  στο οποίο αυτή τέμνει την ασύμπτωτη ευθεία  $\varepsilon_1$  της υπερβολής.



α) Να βρείτε τις εστίες  $E', E$  και τις ασύμπτωτες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  της υπερβολής.

(Μονάδες 10)

β)

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης  $\zeta$ .

(Μονάδες 07)

ii. Να αποδείξετε ότι το σημείο  $\Gamma$  έχει συντεταγμένες  $(1,1)$ .

(Μονάδες 08)

20721

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η υπερβολή  $C$  με εξίσωση  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ .

α) Να βρείτε τις εστίες της  $C$ .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της  $C$ .

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή  $C$  και τις ασύμπτωτές της στο ίδιο σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 9)

21649

ΘΕΜΑ 2

Η υπερβολή  $C$  έχει εστίες τα σημεία  $E(5,0), E'(-5,0)$  και εκκεντρότητα  $\frac{5}{4}$ . Να

βρείτε:

α) την εξίσωση της  $C$ .

(Μονάδες 10)

β) τις εξισώσεις των ασυμπτωτων της  $C$ .

(Μονάδες 8)

γ) την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C$  στο σημείο της  $M(5, \frac{9}{4})$ .

(Μονάδες 7)

22566

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση  $4x^2 - y^2 = 4$ .

α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής της υπερβολής είναι  $A(1,0)$  και  $A'(-1,0)$

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι  $y = 2x$  και  $y = -2x$ .

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από την κορυφή  $A$  και είναι παράλληλη προς την ασύμπτωτη  $y = -2x$  έχει εξίσωση  $y = -2x + 2$

(Μονάδες 8)

17942

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η κωνική τομή με εξίσωση (C)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ .

α) Να προσδιορίσετε το είδος της κωνικής τομής και να βρείτε μία εστία της.

(Μονάδες 12)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο  $M(1, 2022)$  μπορεί να ανήκει στην (C) .

(Μονάδες 13)

22567

ΘΕΜΑ 2

Στο καρτεσιανό επίπεδο  $Oxy$  η υπερβολή  $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  τέμνει τον άξονα  $x'$  στα σημεία

$A'(-4, 0)$  και  $A(4, 0)$  και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες  $y = \frac{3}{4}x$  και  $y = -\frac{3}{4}x$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $\alpha = 4$  και  $\beta = 3$ ,

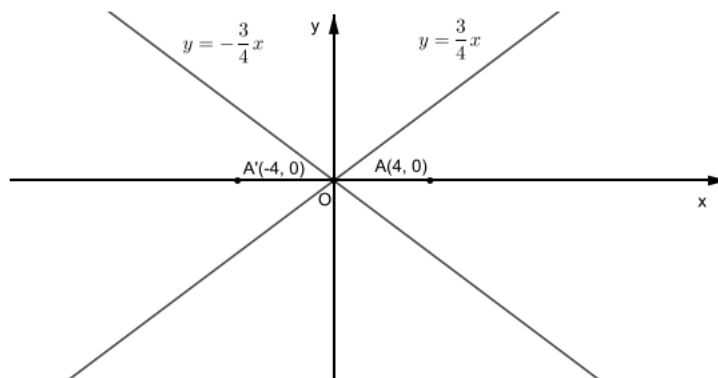
(Μονάδες 10)

ii. οι εστίες της  $C$  είναι τα σημεία  $E'(-5, 0)$  και  $E(5, 0)$ .

(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε το παρακάτω σχήμα, συμπληρώνοντάς το με την παραπάνω υπερβολή  $C$ .

(Μονάδες 5)



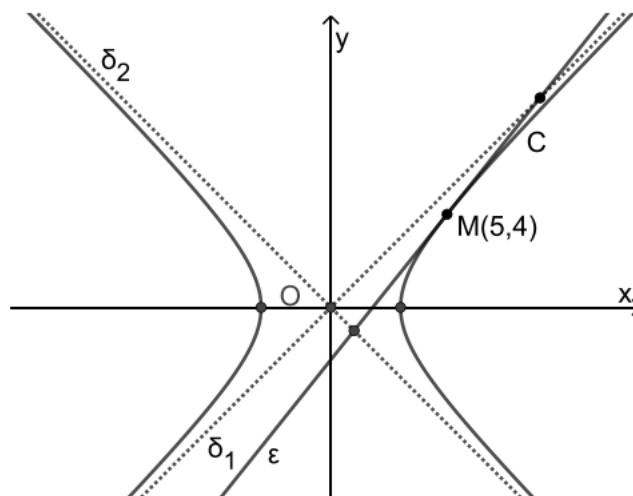
## ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα η υπερβολή  $C$  έχει εξίσωση  $x^2 - y^2 = 9$ , οι ευθείες  $\delta_1$  και  $\delta_2$  είναι οι ασύμπτωτες της  $C$  και η  $\varepsilon$  είναι η εφαπτομένη της  $C$  στο σημείο της  $M(5, 4)$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Οι εξισώσεις των ασυμπτωτών είναι  $\delta_1: y = x$  και  $\delta_2: y = -x$ . (Μονάδες 8)
- ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο  $M$  είναι  $\varepsilon: 5x - 4y = 9$ . (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών  $\varepsilon$  και  $\delta_1$  καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών  $\varepsilon$  και  $\delta_2$ . (Μονάδες 9)



22559

ΘΕΜΑ 2

Η υπερβολή στο παρακάτω σχήμα έχει εστίες τα σημεία  $E'(-10, 0)$  και  $E(10, 0)$  και κορυφές τα σημεία  $A'(-8, 0)$  και  $A(8, 0)$ .

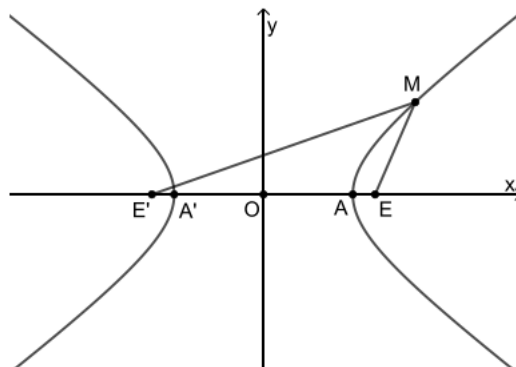
α) Να αποδείξετε ότι η υπερβολή έχει εξίσωση  $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ . (Μονάδες 12)

β) Έστω  $M$  ένα σημείο της υπερβολής.

i. Να αποδείξετε ότι  $|(ME') - (ME)| = 16$ . (Μονάδες 8)

ii. Αν  $(ME) = 9$ , να βρείτε την απόσταση του σημείου  $M$  από την εστία  $E'$ .

(Μονάδες 5)



22169

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η υπερβολή  $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  με ασύμπτωτη την  $y = \frac{3}{4}x$ . Η απόσταση των κορυφών της  $A$  και  $A'$  είναι 8.

α)

i. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής. (Μονάδες 10)

ii. Ποιες είναι οι εστίες της υπερβολής; (Μονάδες 05)

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$  στο σημείο της  $(5, \frac{9}{4})$ . (Μονάδες 10)

22269

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση :  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$  (1).

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας :

- i. Τις συντεταγμένες των εστιών της.
- ii. Την εκκεντρότητά της.
- iii. Τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\epsilon$  που εφάπτεται στην υπερβολή στο σημείο της,

$A(\sqrt{5}, \frac{1}{2})$ .

(Μονάδες 10)

22196

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η υπερβολή (C) με εξίσωση

$$x^2 - y^2 = 25 \quad (1)$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών  $E$  και  $E'$ .

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες ( $\epsilon_1$ ), ( $\epsilon_2$ ) της υπερβολής.

(Μονάδες 10)

γ) Τι γωνία σχηματίζουν οι ασύμπτωτες ( $\epsilon_1$ ), ( $\epsilon_2$ ); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 05)

16128

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η υπερβολή (C):  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών  $E'$  και  $E$ .

(Μονάδες 10)

β) Αν το  $N$  είναι τυχαίο σημείο της (C), να βρείτε την τιμή της διαφοράς  $|(NE') - (NE)|$ .

(Μονάδες 5)

γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή (C).

(Μονάδες 10)



17944

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση της μορφής  $(C): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , εστιακή απόσταση  $EE' = 2\sqrt{7}$

και εκκεντρότητα  $e = \frac{\sqrt{7}}{2}$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $a=2, b=\sqrt{3}$ .

(Μονάδες 8)

β) i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών  $A, A'$  της υπερβολής (C).

ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων ευθειών της υπερβολής (C).

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την υπερβολή (C), τις ασύμπτωτές της, τις εστίες της και τις κορυφές της.

(Μονάδες 9)

32206

ΘΕΜΑ 4

Η υπερβολή  $C$  έχει εστίες τα σημεία  $E(5,0), E'(-5,0)$  και διέρχεται από το σημείο

$M(5, \frac{9}{4})$ .

α) Να αποδείξετε ότι έχει εκκεντρότητα  $\frac{5}{4}$ .

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την εξίσωση της  $C$ .

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας  $\widehat{EM'E'}$ .

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το συνημίτονο της οξείας γωνίας που σχηματίζουν οι ασύμπτωτές της.

(Μονάδες 6)

Δίνεται ότι  $\sqrt{1681} = 41$ .

21657

ΘΕΜΑ 4

Έστω υπερβολή  $C$  με κέντρο το  $(0,0)$ , εστίες πάνω στον άξονα  $xx'$  της οποίας το ορθογώνιο βάσης είναι τετράγωνο.

α) Να βρείτε:

i. τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της  $C$ .

(Μονάδες 6)

ii. την εκκεντρότητα της  $C$ .

(Μονάδες 6)

β) Αν η υπερβολή διέρχεται από το σημείο  $(2,0)$  και  $(\zeta)$  τυχαία ευθεία παράλληλη σε κάποια εκ των ασυμπτωτων της  $C$  (που δεν ταυτίζεται με κάποια από αυτές),

i. να δείξετε ότι η  $(\zeta)$  έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την  $C$ .

(Μονάδες 8)

ii. είναι η ευθεία  $(\zeta)$  εφαπτόμενη της  $C$ ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

21656

ΘΕΜΑ 4

Έστω υπερβολή  $C$  με κέντρο το  $(0,0)$ , εστίες τα σημεία  $E(5,0), E'(-5,0)$  και κορυφές τα σημεία  $A(4,0), A'(-4,0)$ .

α) Να βρείτε:

i. τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της υπερβολής  $C$ .

(Μονάδες 3)

ii. την εξίσωση της υπερβολής  $C$ .

(Μονάδες 3)

β) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα, την υπερβολή  $C$ , τις ασύμπτωτες της  $C$  και το ορθογώνιο βάσης της  $C$ .

(Μονάδες 9)

γ) Αν  $M$  τυχαίο σημείο της  $C$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης  $(ME) - (ME')$ .

(Μονάδες 5)

δ) Αν  $M(\sqrt{80}, 6)$  σημείο της  $C$ , να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας  $\widehat{EME'}$ .

(Μονάδες 5)

## ΘΕΜΑ 4

Κατά τη διάρκεια μιας επιχείρησης εντοπισμού ενός αγνοούμενου σε μια αχανή δασώδη επίπεδη περιοχή, δύο παρατηρητές  $M_1$  και  $M_2$  βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία. Ο αγνοούμενος εκτοξεύει φωτοβολίδες που διαθέτει και οι δύο παρατηρητές σημειώνουν τις χρονικές στιγμές που ακούνε τον ήχο της εκλυροσκορότησης του όπλου. Είναι γνωστό ότι ο παρατηρητής  $M_1$  ακούει σε όλες τις εκρήξεις τον ήχο με διαφορά  $4 \text{ sec}$  αργότερα από τον παρατηρητή  $M_2$ .

α) Αν ονομάσουμε  $P$  την θέση του αγνοούμενου, να αποδείξετε ότι

$$(PM_1) - (PM_2) = 1360 \text{ m.}$$

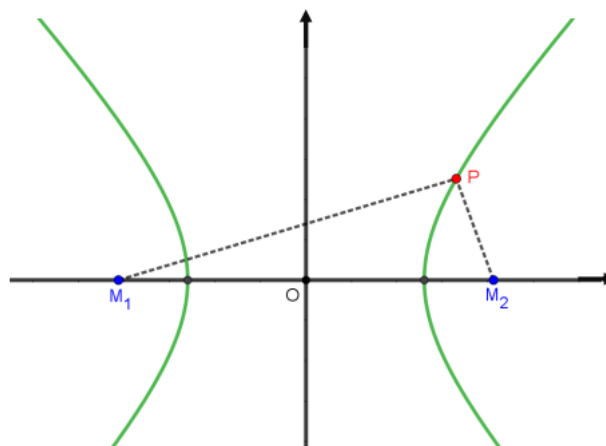
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η θέση  $P$  του αγνοούμενου ανήκει σε έναν κλάδο υπερβολής με εστίες τα σημεία  $M_1$  και  $M_2$ .

(Μονάδες 8)

γ) Αν γνωρίζουμε ότι η απόσταση  $(M_1M_2)$  είναι  $1378 \text{ m}$ , να αποδείξετε ότι αυτή η υπερβολή έχει εξίσωση  $\frac{x^2}{680^2} - \frac{y^2}{111^2} = 1$ , θεωρώντας ως άξονα  $x'x$  την ευθεία  $M_1M_2$  και κέντρο της υπερβολής την αρχή των αξόνων. Δίνεται ότι  $37^2 = 1369$ .

(Μονάδες 9)



22174

ΘΕΜΑ 4

Πλανήτης κινείται πάνω σε επίπεδο, ελλειπτικά γύρω από τον ήλιο του. Στο καρτεσιανό επίπεδο ο ήλιος βρίσκεται στην εστία της έλλειψης  $E(\gamma,0)$ , ενώ η άλλη εστία είναι στο  $E'(-\gamma,0)$ . Η εκκεντρότητα της τροχιάς είναι 0,6 ενώ ο μεγάλος άξονας 10.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς. (Μονάδες 09)

β) Θεωρούμε ότι ο πλανήτης κινείται πάνω στην  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ .

i. Τη στιγμή που ο πλανήτης βρίσκεται στο σημείο  $\Gamma\left(3, \frac{16}{5}\right)$  εκπέμπεται από αυτόν

σήμα που κινείται κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς του προς τη μεριά του άξονα  $Oy$ . Να εξετάσετε αν αυτό το σήμα θα περάσει από το σημείο  $\Delta(0,5)$ . (Μονάδες 09)

ii. Κομήτης κινείται στο ίδιο επίπεδο με τον πλανήτη και πάνω στην καμπύλη

$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$  με  $x > 0$ . Ποια είναι τα σημεία συνάντησης των δύο τροχιών;

(Μονάδες 07)

