Άλγεβρα Β΄ Λυκείου

Τράπεζα θεμάτων

Λογάριθμοι

21956

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = 2\log 5 + 3\log 2 - \log 20$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να λυθεί η εξίσωση $\ln(e^x - 1) = A$.

(Μονάδες 13)

20727

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \log x$ και $g(x) = \ln(x - 1)$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i. $\log x = 3$.

(Μονάδες 7)

ii. $\ln(x - 1) = 1$.

(Μονάδες 8)

20725

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \log x$ και $g(x) = \log(x+2)$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i. $f(x) = 2$.

(Μονάδες 7)

ii. $g(x) = 2f(x)$.

(Μονάδες 8)

19908

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\frac{1-x}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

(Μονάδες 12)

19903

ΘΕΜΑ 2

Αν $\alpha = \log 100 + \log 5 + \log 2 - \log 1$, τότε:

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 3$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση

$$9 \cdot 2^x = 4 \cdot \alpha^x.$$

(Μονάδες 15)

15617

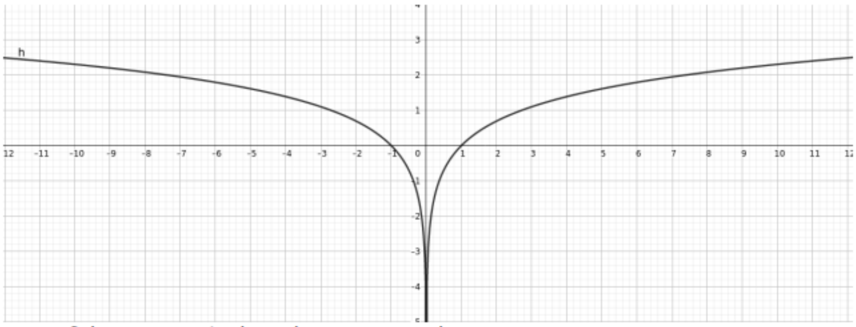
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ln\frac{1}{|x|}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -ln|x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(Μονάδες 10)

β) i) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = ln|x|$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.



Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 7)

ii) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και $g(x) = lnx, x > 0$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο για $x = 1$.

(Μονάδες 8)

21954

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $\mathrm{A} = \ln(\ln e) + \log(\log 10^{10})$.

α) Να αποδείξετε ότι :

i. $\log 10^{10} = 10$

(Μονάδες 6)

ii. $\mathrm{A} = 1$.

(Μονάδες 6)

β) Να λυθεί η εξίσωση $\log(x^2 + 1) = \mathrm{A}$.

(Μονάδες 13)

21858

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A=2\log 5+2\log 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $A=2$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία ισχύει ότι $e^{\lambda}=A$.

(Μονάδες 6)

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β), να αποδείξετε ότι $\ln\lambda<0$.

(Μονάδες 7)

20851

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A=2\log 6-\log 12 \quad \text{και} \quad B=\log 5+\log 2$$

α) Να αποδείξετε ότι $A=\log 3$ και $B=1$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $A<B$.

(Μονάδες 05)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\log x<1$.

(Μονάδες 08)

20635

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 7)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2$.

(Μονάδες 10)

21473

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση

$$\mathrm{A} = \ln x + \ln(x+6).$$

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση

$$\ln x + \ln(x+6) = \ln 7.$$

(Μονάδες 15)

21472

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση: $\ln(x+1) = \ln(2x)$.

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\ln(x+1) > \ln(2x)$.

(Μονάδες 12)

17318

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$, με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(3)$.

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι $ln3 + 3ln2 - f(3) = ln4$.

(Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = ln4$.

(Μονάδες 13)

15675

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

(Μονάδες 15)

20711

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \log 3$ και $\beta = \log 4$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $0 < \alpha < \beta$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι :

i. $\beta + \alpha > 1$.

(Μονάδες 6)

ii. $\ln \dfrac{\alpha}{\beta} < 0$.

(Μονάδες 7)

20710

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \log 20$ και $\beta = \log 50$. Να αποδείξετε ότι

α) $\beta + \alpha = 3$.

(Μονάδες 7)

β) $\ln(\beta + \alpha) > 1$.

(Μονάδες 6)

γ) $10^{\beta} - 10^{\alpha} = 10 \cdot (\beta + \alpha)$.

(Μονάδες 12)

Δίνεται ότι $e \simeq 2,71$.

21174

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η εξίσωση:

$\log(x+1) = -\log 2 - \log(1-x) \quad (1)$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\log(x+1) = \log\left(\dfrac{1}{2}\right) - \log(1-x)$.

(Μονάδες 15)

21953

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = e^{\ln 2} + 10^{2\log\sqrt{5}}$. Να αποδείξετε ότι

α) $A = 7$.

(Μονάδες 12)

β) $0 < \log A < 1$.

(Μονάδες 13)

21952

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = \ln\sqrt{e} + \log\sqrt[3]{100}$. Να αποδείξετε ότι

α) $A = \frac{7}{6}$.

(Μονάδες 12)

β) $0 < \ln A < 1$.

(Μονάδες 13)

Δίνεται $e \simeq 2.71$.

21676

ΘΕΜΑ 2

Αν είναι γνωστό ότι $\ln 4 = 1{,}386$ και $\ln 5 = 1{,}609$ τότε:

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \ln\frac{e}{5} - \ln\frac{4}{e}$

(Μονάδες 12)

β) Με τη βοήθεια της ισότητας $80 = 5 \cdot 4^2$ να αποδείξετε ότι $\ln 80 = 4{,}381$.

(Μονάδες 13)

21675

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2+1) = 1 - \log 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $1 - \log 2 = \log 5$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

(Μονάδες 13)

20692

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = logx, x > 0$.

α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς $f(100)$, $f(\sqrt{10})$

(Μονάδες 12)

β) Για $x > 1$, να επιλύσετε την εξίσωση $f(x+1) + f(x-1) = log10 \ - \ log5$.

(Μονάδες 13)

20663

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\log_2 8) \cdot x^3 + (4\log_2 \sqrt{2}) \cdot x^2 - (4\log_2 1) \cdot x + 1990$.

α) Να αποδείξετε ότι $\log_2 8 + 2\log_2 \sqrt{2} - \log_2 1 = 4$.

(Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x-2)$.

(Μονάδες 10)

21450

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x^2+4)$ και $g(x) = \ln x + \ln 4$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

(Μονάδες 13)

15817

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \ln 2$ και $\beta = \ln 3$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $0 < \alpha < \beta$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\beta - \alpha < 1$.

(Μονάδες 13)

Δίνεται $e \simeq 2.71$.

15808

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+2)$.

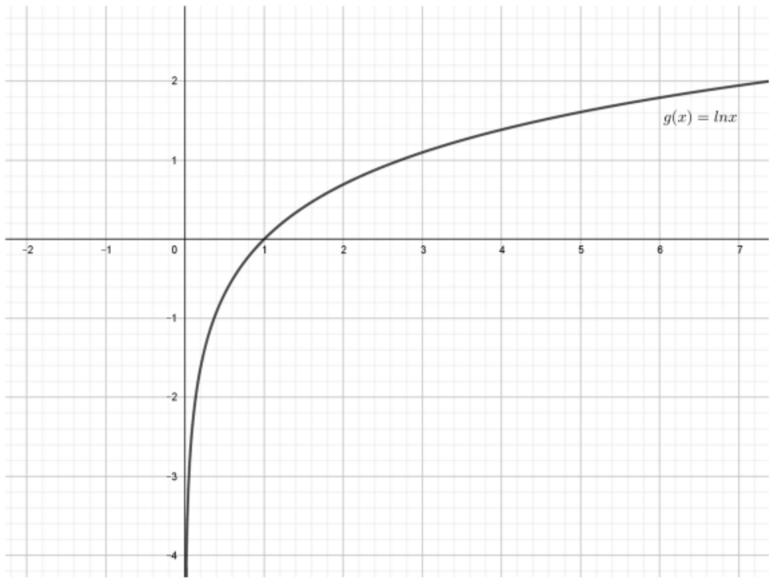
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 8)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\ln x$.



Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της $f(x)=\ln(x+2)$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g.

(Μονάδες 10)

17318

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$, με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(3)$.

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι $ln3 + 3ln2 - f(3) = ln4$.

(Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = ln4$.

(Μονάδες 13)

15816

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \ln 2$, $\beta = \ln 4$, $\gamma = \ln 8$.

α) Να αποδείξετε ότι $2\beta = \alpha + \gamma$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\beta + \gamma = 5\alpha$

(Μονάδες 13)

15687

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = \log_4 3 + \log_4 \alpha - \log_4 \beta$, όπου α, β θετικοί αριθμοί.

α) Να αποδείξετε ότι $A = \log_4 \frac{3\alpha}{\beta}$

(Μονάδες 13)

β) Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει $3\alpha = 16\beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης Α.

(Μονάδες 12)

15267

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2 + 1) = 1 + \log 3 - \log 6$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση γράφεται $\log(x^2 + 1) = \log 5$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση.

(Μονάδες 13)

15392

ΘΕΜΑ 3

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=2^x$ και $g(x)=5^{1-x}$, $x \in R$. Μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $H\left(0,\frac{1}{5}\right)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

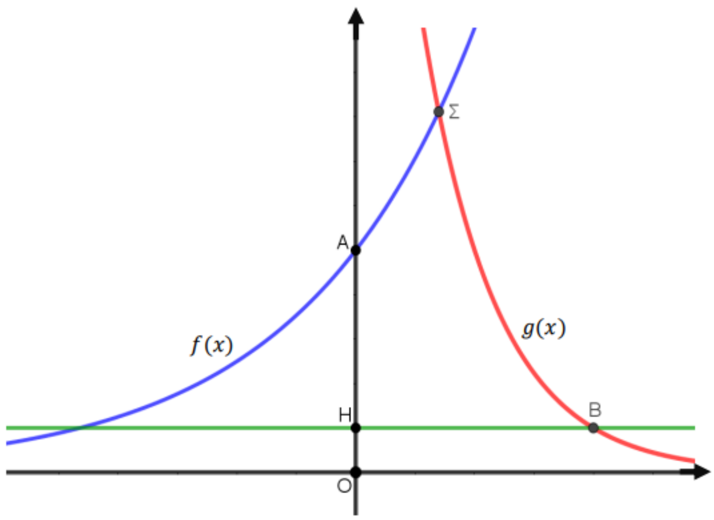
(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Σ.

(Μονάδες 10)

γ) Αν είναι x_B, x_Σ οι τετμημένες των σημείων B, Σ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $x_B - x_\Sigma = \log 20$.

(Μονάδες 7)



15676

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^x-1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα xx'.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον xx'.

(Μονάδες 10)

37476

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2x^2-x+2$. Να αποδείξετε ότι

α) το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$.

(Μονάδες 6)

β) $P(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(1,2)$.

(Μονάδες 7)

γ) $1<\log 20<2$.

(Μονάδες 6)

δ) $P(\log 20)<0$.

(Μονάδες 6)

21674

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\sqrt{10^x-2}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=(\log 2,+\infty)$.

(Μονάδες 07)

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\log\sqrt{\frac{10^x}{3}}, x\in\mathbb{R}$.

i. Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{\frac{10^x}{3}}=\sqrt{10^x-2}$ με $x\in(\log 2,+\infty)$.

(Μονάδες 09)

ii. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων, των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 09)

15688

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^{x}-1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της Α και το σημείο τομής της γραφικής της παράστασης με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=x-1$.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι αν α>0, τότε η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία $y=x+\alpha$.

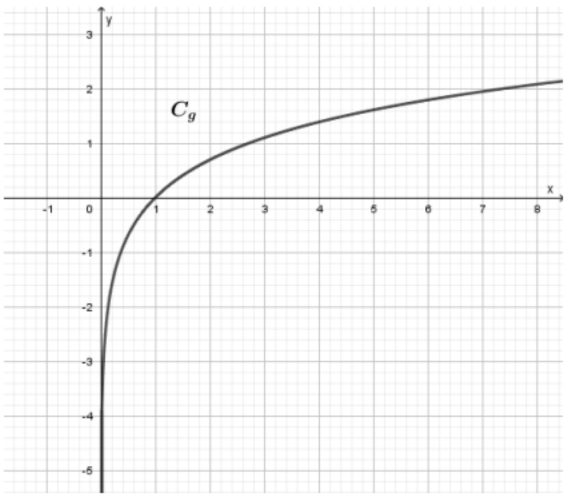
(Μονάδες 8)

20853

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-1)$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$g(x) = \ln x,\ x > 0.$



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 05)

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 08)

γ) Να βρείτε το διάστημα, στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 12)

20730

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f(x)} = \ln(1-\mathrm{x})$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 12)

β) Να λυθεί η εξίσωση $\ln(1-\mathrm{x}) = \ln(x^2+1)$.

(Μονάδες 13)

20729

ΘΕΜΑ 2

Δίνετε η συνάρτηση $\mathrm{f(x)} = \ln(\mathrm{x}-1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα x΄x.

(Μονάδες 9)

γ) Στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 10)

21680

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\ln x$, $x>0$ και η ευθεία $\varepsilon: y=2x-2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(2)+f(4)=\frac{1}{3}f(8)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι από τον άξονα x'x και πάνω.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε:

i. Τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία.

(Μονάδες 4)

ii. Για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από την ευθεία.

(Μονάδες 5)

20845

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=e^{\kappa x}$, $\kappa \geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f(1)-f(0) \geq f(0)-f(-1)$. Πότε ισχύει η ισότητα;

(Μονάδες 08)

β) Να αποδείξετε ότι αν $\kappa>0$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 07)

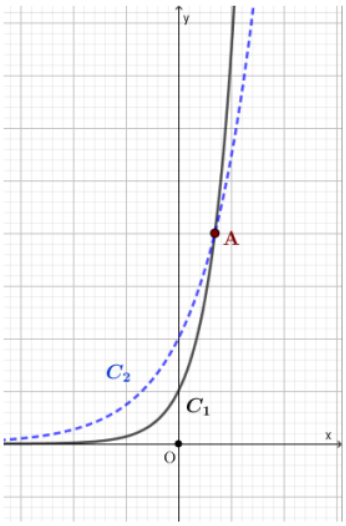
γ)

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει: $e^{2x}>2e^{x}$.

(Μονάδες 05)

ii. Χρησιμοποιώντας το παρακάτω σχήμα, να αντιστοιχίσετε τις C_1, C_2 με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\varphi(x)=2e^{x}$ και $k(x)=e^{2x}$.

Ποιες είναι οι συντεταγμένες του κοινού τους σημείου Α;



(Μονάδες 05)

20669

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{x^2+1}-x>0$, για κάθε $x\in(-\infty,0)$.

(Μονάδες 03)

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 09)

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $g(-x)+g(x)=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 09)

ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O.

(Μονάδες 04)

21679

ΘΕΜΑ 4

Ένα ζεστό ρόφημα τη στιγμή που σερβίρεται, σε θερμοκρασία του περιβάλλοντος που είναι $T_\alpha=25^\circ C$, έχει θερμοκρασία $T_o=73^\circ C$. Η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από t λεπτά δίνεται, σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, από την συνάρτηση

$$T(t)=T_\alpha+ce^{-\kappa t}$$

όπου όπου c , κ κατάλληλες σταθερές και $t\in[0,60]$. Αν είναι γνωστό ότι η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από 10 λεπτά είναι $61^\circ C$, τότε:

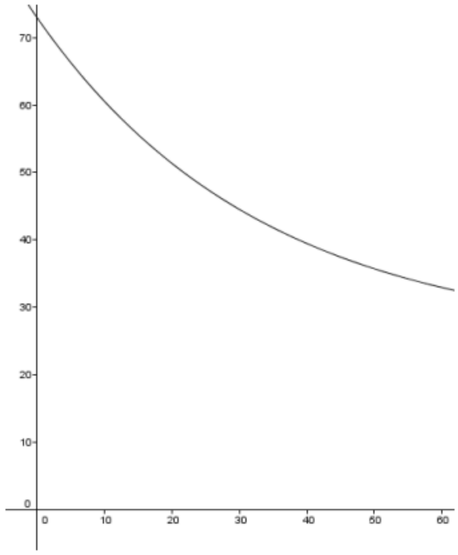
α) Να αποδείξετε ότι $c=48$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την σταθερά κ. (Θεωρήστε $\ln 0,75=-0,3$).

(Μονάδες 8)

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης T(t) φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



γ) Να βρείτε την θερμοκρασία του ροφήματος 40 λεπτά μετά το σερβίρισμα. (Θεωρήστε $e^{-1,2}=0,3$).

(Μονάδες 5)

δ) Αν θεωρήσουμε ότι ο καταναλωτής έχει την αίσθηση του ζεστού όταν η θερμοκρασία του ροφήματος είναι μεγαλύτερη από $40^{o}C$, να αιτιολογήσετε, με βάση τη γραφική παράσταση

και το αποτέλεσμα του ερωτήματος γ), γιατί πριν περάσουν 40 λεπτά ο καταναλωτής του ροφήματος έχει την αίσθηση ότι το ρόφημα δεν είναι πλέον ζεστό.

(Μονάδες 6)

21470

ΘΕΜΑ 4

Μια ποσότητα Q ραδιενεργού υλικού (σε κιλά) θάβεται και με την πάροδο του χρόνου *t* (σε έτη), μειώνεται ακολουθώντας το νόμο της εκθετικής μεταβολής $Q(t)=Q_0\cdot e^{ct}$. Γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής ποσότητας και μετά από τέσσερα χρόνια έχει απομείνει 1 κιλό.

α) Να δείξετε ότι $Q(t)=Q_0\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την αρχική ποσότητα που θάφτηκε (για $t=0$).

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά.

(Μονάδες 9)

16001

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x\ln x}$ και $g(x)=\sqrt{\ln x}$.

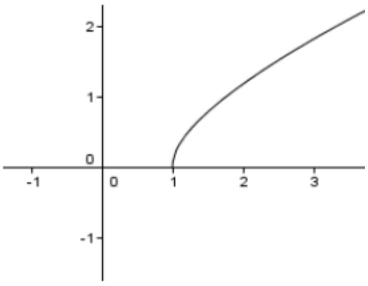
α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους.

(Μονάδες 4)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f είναι από τη γραφική παράσταση της g και πάνω.

(Μονάδες 5)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f.



γ) i. Να βρείτε τη μονοτονία της.

(Μονάδες 4)

ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{5}{3}\right)$ και $f\left(\frac{7}{5}\right)$.

(Μονάδες 5)

δ) Να σχεδιάσετε την ευθεία $y=1-x$ και να βρείτε γραφικά τη λύση της εξίσωσης $f(x)=1-x$.

(Μονάδες 7)

15678

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x) = -x^3 - 4x^2 - x + 6$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $\mathrm{P}(x) < 0$.

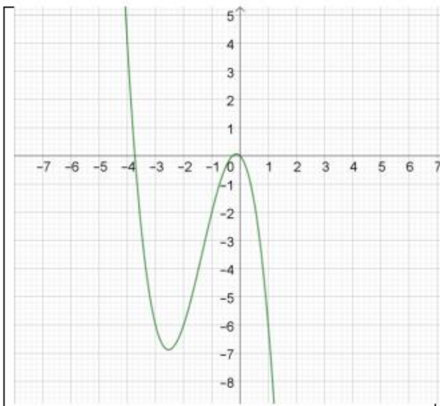
(Μονάδες 10)

β) Από τα παρακάτω σχήματα, ένα μόνο μπορεί να αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $\mathrm{P}(x)$. Να βρείτε ποιο αιτιολογώντας την απάντησή σας.

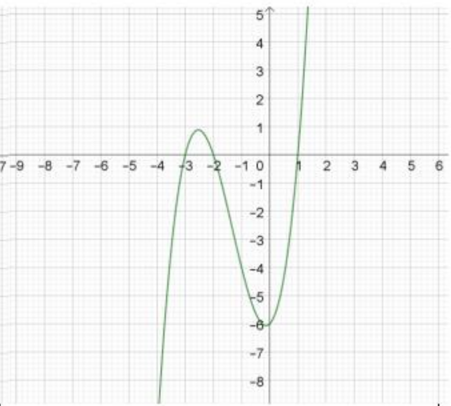
(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\mathrm{P}(x) = \ln x$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$.

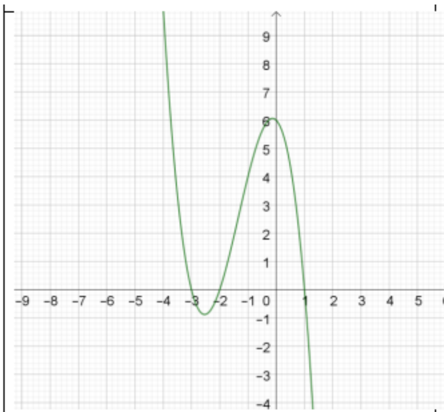
(Μονάδες 8)



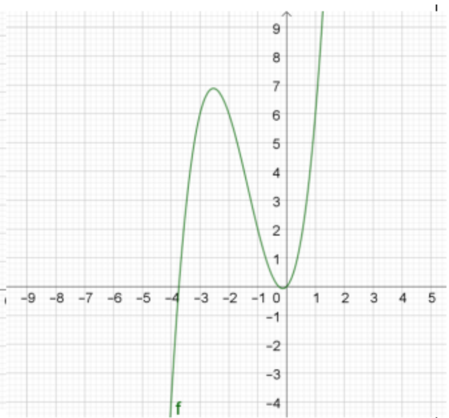
Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3



Σχήμα 4

15015

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-x^2-2x$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln^3 x-\ln^2 x-2\ln x=0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\ln^3 x-\ln^2 x-2\ln x>0$.

(Μονάδες 10)

20657

ΘΕΜΑ 4

Σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, η θερμοκρασία θ, σε βαθμούς Κελσίου, ενός αντικειμένου μειώνεται με την πάροδο του χρόνου t, σε λεπτά, σύμφωνα με τη συνάρτηση $\theta(t)=T+(\theta_0-T)e^{kt}$, όπου k μια σταθερά με $k<0$, θ_0 η αρχική θερμοκρασία του αντικειμένου, ενώ T είναι η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος μέσα στο οποίο τοποθετείται το αντικείμενο, με $\theta_0>T$.

Ένα αντικείμενο έχει θερμανθεί στους $100^o\ C$ και στη συνέχεια αφήνεται να κρυώσει σε ένα δωμάτιο με σταθερή θερμοκρασία $30^o\ C$. Γνωρίζουμε ότι 5 λεπτά μετά την τοποθέτησή του αντικειμένου στο δωμάτιο, η θερμοκρασία του αντικειμένου είναι $80^o\ C$.

α) Να αποδείξετε ότι $k=-0{,}0672$.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $\theta(t)=30+70\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^{t/5}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε, με προσέγγιση εκατοστού, τη θερμοκρασία του αντικειμένου μετά από 1 ώρα και 40 λεπτά.

(Μονάδες 8)

Δίνεται ότι $ln\left(\frac{5}{7}\right)=-0{,}336$ (προσεγγιστικά) και $\left(\frac{5}{7}\right)^{10}\cong 0{,}034$.

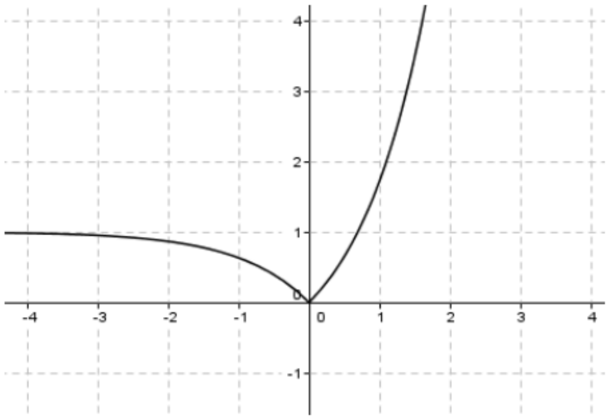
18235

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x)=|e^x-1|$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να περιγράψετε πως αυτή μπορεί να προκύψει από τη γνωστή γραφική παράσταση της $g(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)



β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να συμπεράνετε τη μονοτονία και την ελάχιστη τιμή της f .

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του α, το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής της παράστασης C_f με την ευθεία $y=\alpha$.

(Μονάδες 7)

18437

ΘΕΜΑ 4

Ένα από τα επιβλητικότερα μνημεία του κόσμου είναι η αψίδα Gateway Arch στην πόλη Saint-Louis των Η.Π.Α. Θεωρώντας κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, όπως στο παρακάτω σχήμα, η πρόσοψη της αψίδας προσεγγίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$f(x) = -192\left(e^{\frac{x}{100}} + e^{-\frac{x}{100}}\right) + 576,$

με $f(x) \geq 0$, όπου οι αριθμοί $x, f(x)$ μετρούνται σε μέτρα (m).

(Η γραφική παράσταση μιας τέτοιας συνάρτησης λέγεται αλυσοειδής καμπύλη).

α) Να αποδείξετε ότι το μέγιστο ύψος ΟΚ της αψίδας είναι $192\ m$.

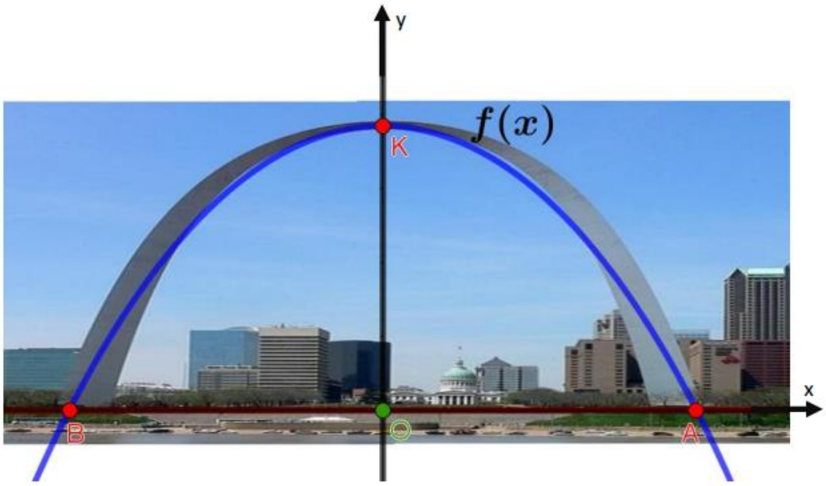
(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Α στο οποίο η καμπύλη τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox. Δίνεται ότι $ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \cong 0{,}96$.

(Μονάδες 13)

γ) Αν γνωρίζουμε ότι τα σημεία Α και Β έχουν αντίθετες τετμημένες, να αποδείξετε ότι το πλάτος ΑΒ της αψίδας είναι ίσο με το μέγιστο ύψος της ΟΚ.

(Μονάδες 5)



18434

ΘΕΜΑ 4

Ο Νόμος των Bouguert-Lambert στη φωτομετρία, λέει ότι η ένταση I μιας ακτινοβολίας (ηλιακό φως, ακτίνες Χ, κ.λπ.) που εισχωρεί κατακόρυφα σε ένα διαφανές μέσο (νερό λιμνών, θαλάσσης, γυαλί, κ.λ.π.) μειώνεται εκθετικά, απορροφούμενη από το μέσο, συναρτήσει του βάθους (πάχους) h του μέσου, σύμφωνα με τη συνάρτηση $I = I_0 \cdot e^{-\lambda h}$, όπου $\lambda > 0$ σταθερά και I_0 η αρχική ένταση.

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει κάποιο βάθος h στο οποίο η ένταση της ακτινοβολίας να είναι μηδέν.

(Μονάδες 3)

β) Γνωρίζουμε ότι για καθαρό νερό θαλάσσης είναι $\lambda = 1{,}4\ m^{-1}$ (το m παριστάνει μέτρα) και ότι μια συγκεκριμένη μορφή φυτικής ζωής δεν μπορεί να υπάρξει, όταν η ένταση του ηλιακού φωτός γίνει μικρότερη ή ίση από το $\frac{1}{4}$ της αρχικής έντασης. Να βρείτε για ποιες τιμές του βάθους h συμβαίνει αυτό. (Δίνεται ότι $ln2 = 0{,}7$)

(Μονάδες 12)

γ) Σε κάποιο άλλο διαφανές μέσο, γνωρίζουμε ότι σε βάθος $10\ m$ η ένταση μιας ακτινοβολίας μειώνεται στο μισό της έντασης της αρχικής ακτινοβολίας. Να αποδείξτε ότι στην συγκεκριμένη κατάσταση ισχύει $I = I_o \cdot 2^{-\frac{h}{10}}$.

(Μονάδες 10)

15591

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{\alpha}{\alpha+5}\right)^x$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι εκθετική και ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 8)

γ) Για τη μεγαλύτερη τιμή του $a \in \mathbb{Z}$ για την οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα εκθετική με βάση ακέραιο αριθμό, να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x)+f(x+1)=14$$

(Μονάδες 9)

21950

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\dfrac{e^{3x}-8}{e^{2x}+4e^{x}-12}$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $\dfrac{\omega^3-8}{\omega^2+4\omega-12}>0$ είναι το $(-6,2)\cup(2,+\infty)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}-\{\ln 2\}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και του άξονα xx'.

(Μονάδες 9)

21678

ΘΕΜΑ 4

Ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού λέμε τον χρόνο που απαιτείται για να διασπασθεί η μισή από την αρχική του ποσότητα, οπότε να απομείνει το 50% από αυτή.

Αν Q_o είναι η αρχική ποσότητα ενός ραδιενεργού υλικού, τότε η ποσότητα $Q(t)$ που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον τύπο $Q(t)=Q_o e^{ct}$, όπου c είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το υλικό.

α) Να αποδείξετε ότι ο χρόνος ημιζωής t' δίνεται από τον τύπο $t'=-\dfrac{\ln 2}{c}$.

(Μονάδες 8)

Το ραδιοϊσότοπο του άνθρακα, άνθρακας -14 έχει χρόνο ημιζωής 5730 χρόνια.

β) Να αποδείξετε ότι η ποσότητα του άνθρακα -14 που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον τύπο

$$Q(t)=Q_o e^{-\frac{\ln 2}{5730}t}$$

(Μονάδες 8)

γ) Κατά την εξέταση ενός οστού που ανακάλυψαν οι παλαιοντολόγοι διαπιστώθηκε ότι έχει απομείνει σ' αυτό το 25% της ποσότητας του άνθρακας -14 που περιείχε αρχικά. Να βρείτε την ηλικία του οστού.

(Μονάδες 9)

20847

ΘΕΜΑ 4

Αν I είναι η ένταση του ήχου (σε W/m^2 - Watt ανά τετραγωνικό μέτρο), τότε η αντίστοιχη ηχοστάθμη D (σε ντεσιμπέλ) δίνεται από τον τύπο:

$$D = 10 \cdot \log(10^{12} \cdot I)$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα ηχοστάθμης.

Όριο ακοής	0 *ντεσιμπέλ*
Θρόισμα φύλλων	10 *ντεσιμπέλ*
Συνήθης ψίθυρος	20 *ντεσιμπέλ*
Αθόρυβο αυτοκίνητο	50 *ντεσιμπέλ*
Συνήθης ομιλία	65 *ντεσιμπέλ*
Κυκλοφοριακή κίνηση	80 *ντεσιμπέλ*
Αεροσυμπιεστής (κομπρεσέρ) σε απόσταση 3 μέτρων	90 *ντεσιμπέλ*
Όριο πόνου	120 *ντεσιμπέλ*
Αεριωθούμενο	140 *ντεσιμπέλ*

α) Να βρείτε την ένταση του ήχου που δημιουργεί το θρόισμα των φύλλων.

(Μονάδες 08)

β) Αν η ένταση του ήχου σε μία ροκ συναυλία είναι 1 W/m^2 να ελέγξετε αν η ηχοστάθμη στην οποία εκτίθεται το κοινό αγγίζει το όριο του πόνου.

(Μονάδες 07)

γ) Αν διπλασιάσουμε την ένταση του ενισχυτή ενός στερεοφωνικού συστήματος, τότε να υπολογίσετε πόσα ντεσιμπέλ θα αυξηθεί η στάθμη του εξερχόμενου ήχου. (Δίνεται ότι $\log 2 \approx 0{,}3$).

(Μονάδες 10)

18865

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 3)

β) Να προσδιορίσετε το είδος της συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f.

(Μονάδες 6)

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 6)

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $E(x) = \frac{1}{2}(x-1)\ln x$, με $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ μπορεί να περιγράψει το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$, όπου $A(1,0)$, $B(x,0)$ και $Γ(x, \ln x)$.

(Μονάδες 10)

18863

ΘΕΜΑ 4

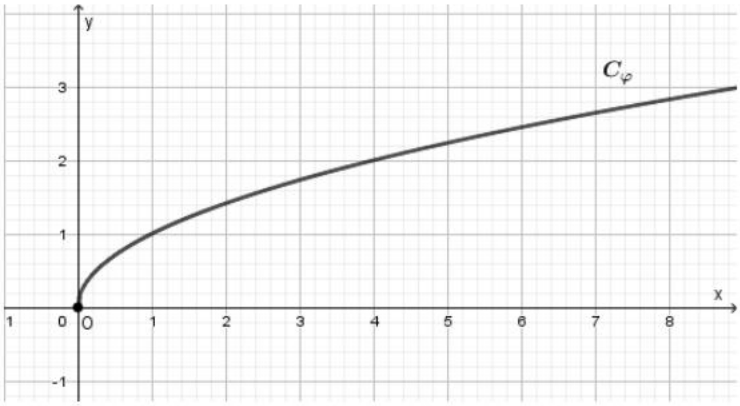
Δίνονται οι συναρτήσεις:

$\varphi(x) = \sqrt{x}$, με $x \geq 0$, $f(x) = \sqrt{x-1}$, με $x \geq 1$ και $g(x) = \frac{x+1}{3}$, με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 08)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης φ.



i. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 02)

ii. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, να σχεδιάσετε και την γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

(Μονάδες 04)

γ) Με τη βοήθεια του σχήματος ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g.

(Μονάδες 06)

δ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{ln10 - 1} > \frac{1+ln10}{3}$.

(Μονάδες 05)

18429

ΘΕΜΑ 4

Η μονάδα μέτρησης της έντασης του ήχου είναι το ένα Watt ανά τετραγωνικό μέτρο $(1W/m^2)$. Στο ανθρώπινο αυτί, η ελάχιστη ένταση που γίνεται αντιληπτή είναι $10^{-12}\ w/m^2$. Για να μετρήσουμε την στάθμη της έντασης ενός ήχου, χρησιμοποιούμε την κλίμακα Decibel (Db). Το επίπεδο της στάθμης σε Db δίνεται από τη σχέση $D = 10 \cdot log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ όπου I_0 η ελάχιστη αντιληπτή ένταση και I η ένταση του ήχου.

α) Να βρείτε το επίπεδο των Db που παράγει ένα μαχητικό αεροσκάφος, αν γνωρίζουμε ότι η ένταση του ήχου του είναι $100\ w/m^2$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι μια αύξηση του επιπέδου στάθμης οποιουδήποτε ήχου κατά 20 Db αντιστοιχεί σε ήχο έντασης 100 φορές μεγαλύτερης.

(Μονάδες 10)

γ) Το όριο πόνου του ανθρώπινου αυτιού λόγω έντασης ήχου είναι 120 Db. Η έκθεση σε ήχους πάνω από 120 Db μπορεί να οδηγήσει σε προβλήματα ακοής ή κώφωση. Ποια είναι η αντίστοιχη ένταση ήχου στο όριο του πόνου για τον άνθρωπο;

(Μονάδες 7)

18110

ΘΕΜΑ 4

α)

i. Να λύσετε την εξίσωση $x(e^x - 1) = 0$

(Μονάδες 03)

ii. Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ το πρόσημο του γινομένου $x(e^x - 1)$

(Μονάδες 06)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)}$.

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 05)

ii. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0), f(\ln 2)$ και $f(-\ln 2)$.

(Μονάδες 06)

iii. Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παρακάτω ισχυρισμός: « η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)}$ είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της». Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

(Μονάδες 05)

15694

ΘΕΜΑ 4

Στην Αστρονομία, οι αστέρες ταξινομούνται ανάλογα με την λαμπρότητα τους με βάση την σχέση $m - M = 5 \cdot log\left(\frac{d}{10}\right)$, (I) όπου d η απόσταση του αστέρα από τον παρατηρητή, m είναι το φαινόμενο μέγεθός τους (το πόσο λαμπροί φαίνονται) και M το απόλυτο μέγεθός τους. Το απόλυτο μέγεθος ορίζεται να είναι το φαινόμενο μέγεθος σε απόσταση 10 parsec από τον παρατηρητή, όπου 1 parsec είναι η μονάδα μέτρησης της απόστασης d και ισούται με 3,26 έτη φωτός $= 30{,}9 \cdot 10^{12}\,Km$.

α) Για ποιες τιμές της απόστασης d το φαινόμενο μέγεθος ενός αστέρα είναι μικρότερο από το απόλυτο μέγεθός του;

(Μονάδες 7)

β) Ένας αστέρας έχει φαινόμενο μέγεθος $m = 1{,}157$ και βρίσκεται σε απόσταση $d = 100$ parsec από έναν παρατηρητή. Ποιο είναι το απόλυτο μέγεθος αυτού του αστέρα;

(Μονάδες 6)

γ) Να επιλύσετε την σχέση (I) ως προς d.

(Μονάδες 7)

δ) Ο αστέρας Betelgeuse έχει φαινόμενο μέγεθος 0,46 και απόλυτο μέγεθος $-5{,}14$. Ποια είναι η απόστασή του από τον παρατηρητή; Δίνεται ότι $\sqrt[25]{10^{53}} \cong 131$.

(Μονάδες 5)

21474

ΘΕΜΑ 4

Σε ένα ανοιχτό δοχείο υπάρχουν 10 λίτρα ενός υγρού. Το υγρό εξατμίζεται έτσι ώστε ο όγκος του να μειώνεται κατά 15% ανά εβδομάδα.

α) Να βρείτε την ποσότητα του υγρού που υπάρχει στο δοχείο στο τέλος της 1ης και στο τέλος της 2ης εβδομάδας.

(Μονάδες 8)

β) Ο όγκος V του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη συνάρτηση $V(t) = V_0 \cdot \alpha^t$, όπου V_0 και α σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τους αριθμούς V_0 και α.

(Μονάδες 8)

γ) Αν ο όγκος του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη σχέση $V(t) = 10 \cdot (0{,}85)^t$, να βρείτε πότε ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής. (Δίνεται ότι: $\log(0{,}5) \simeq -0{,}3$ και $\log(0{,}85) \simeq -0{,}07$).

(Μονάδες 9)

21447

ΘΕΜΑ 4

Σε ένα πείραμα εργαστηρίου, ο αριθμός των βακτηρίων δίνεται από τον τύπο

$$P(t) = 200 \cdot e^{ct},$$

Όπου t ο χρόνος σε ώρες από την αρχή του πειράματος ($t=0$). Σε μία ώρα ο αριθμός των βακτηρίων ήταν 328.

(Δίνεται ότι $\ln(1{,}64) \cong 0{,}5$ και $\ln 10 \cong 2{,}3$)

α) Να βρείτε τον αριθμό των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $c = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής.

(Μονάδες 9)

21446

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(e^x - 2\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + x = 3\ln 2$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) + x \geq 3\ln 2$.

(Μονάδες 9)

21445

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log\dfrac{4^x - 1}{2^x + 5}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \log 3 - \log 7$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > \log 3 - \log 7$.

(Μονάδες 9)

15093

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = log(10^x - 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) + x = log(10^{2x} - 10^x)$, $x > 0$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μοναδικού κοινού σημείου της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας $y = -x$.

(Μονάδες 6)

15690

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}\ln x^2$, $x \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) = \ln x$.

(Μονάδες 6)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{2}\ln x^2$, $x \neq 0$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική της παράσταση είναι κάτω από την ευθεία $y = 2$.

(Μονάδες 7)

15822

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+x$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ και $\alpha\neq 0$, το οποίο έχει 3 ακέραιες ρίζες διαφορετικές ανά δύο.

α) Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες του $P(x)$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$ και $\beta=0$.

(Μονάδες 6)

γ) Με $\alpha=-1$ και $\beta=0$,

i. να λύσετε την ανίσωση $P(x)>0$.

(Μονάδες 6)

ii. να αποδείξετε ότι $P(\log\sqrt{10})>0$.

(Μονάδες 6)

15474

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=\ e^{lne}x^3+4x^2ln\sqrt{e}+2$.

α) Να δείξετε ότι $P(x)=ex^3+2x^2+2$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ με την ευθεία ε: $y=ex+4$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία ε: $y=ex+4$.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης: $P(e)-e^2-4$.

(Μονάδες 4)

15251

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-9x^2+(\alpha-2)x-6$ το οποίο έχει παράγοντα το $x-1$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α.

(Μονάδες 6)

β) Για $\alpha=15$

i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x):\left(x^2-3x+2\right)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 6)

ii. αν $P(x)=\left(x^2-3x+2\right)(2x-3)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.

(Μονάδες 7)

iii. να αποδείξετε ότι $P(\ln 2)<0$.

(Μονάδες 6)

15823

ΘΕΜΑ 4

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $4x^2-1$ δίνει πηλίκο $3x-2$ και υπόλοιπο 1.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=1$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $P(\log 5)\neq 1$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$.

(Μονάδες 5)

15679

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παράσταση $A = \ln\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^x-3}\right)$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{\omega^2-1}{\omega-3} > 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $A = -\ln 3$.

(Μονάδες 9)

15021

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε την παράσταση $f(\ln 2) + f(\ln \frac{1}{2})$.

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $f(\eta\mu\theta) + f(\eta\mu(\pi+\theta)) = 0$, για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ με $\eta\mu\theta \neq 0$.

(Μονάδες 7)

25463

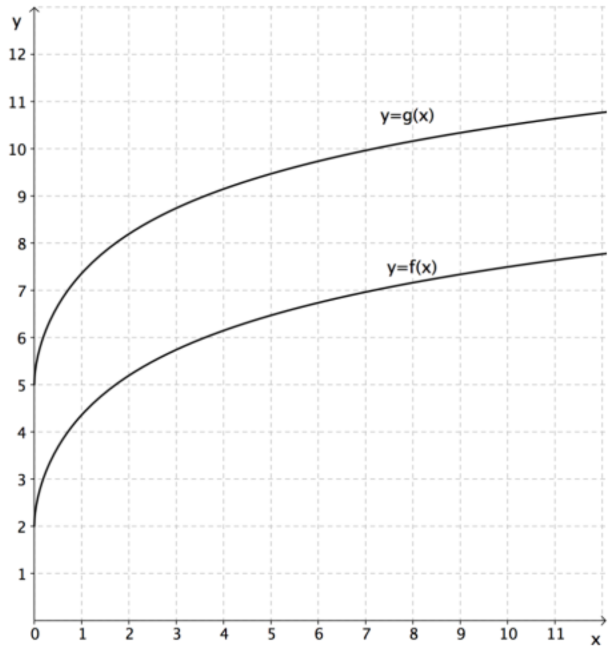
ΘΕΜΑ 4

Ένας ερευνητής πραγματοποίησε μια στατιστική μελέτη για την μεταβολή του βάρους των Ελληνοπαίδων. Τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνονται στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, όπου παριστάνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g. Στον οριζόντιο άξονα $x'x$ καταγράφεται η ηλικία σε μήνες και στον κατακόρυφο άξονα $y'y$ το βάρος σε κιλά. Η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει τις ελάχιστες φυσιολογικές τιμές και η γραφική παράσταση της g τις μέγιστες φυσιολογικές τιμές που μπορεί να έχει ένα παιδί κατά την διάρκεια του πρώτου έτους της ηλικίας του.

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f έχει τύπο

$$f(x) = a\sqrt{\ln(x+1)} + \ln(x+1) + \beta, \qquad x \geq 0, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

και ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$ και $B(e^2 - 1,\ 2\sqrt{2} + 4)$ ενώ για την γραφική παράσταση της g, γνωρίζουμε ότι προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f μετατοπισμένη κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.



α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 2$. Στην συνέχεια να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g.

(Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε γραφικά (κατά προσέγγιση) την ηλικία κατά την οποία η ελάχιστη φυσιολογική τιμή του βάρους ενός παιδιού είναι τα 5 κιλά. Στη συνέχεια, με αλγεβρικό τρόπο, να βρείτε με ακρίβεια την ηλικία.

(Μονάδες 8)

γ) Το βάρος ενός παιδιού στο τέλος του 12^o μήνα βρέθηκε 13 κιλά. Πως θα το χαρακτηρίζατε:
υπέρβαρο, φυσιολογικό ή λιποβαρές; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας με αλγεβρικό τρόπο.

(Μονάδες 7)

20857

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - ax^2 + 7x - \beta,\ \ \alpha, \beta \epsilon \mathbb{R}$.

Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x - 3$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x+1)$ είναι $\upsilon = -16$, τότε:

α) Να υπολογισθούν οι τιμές των α, β.

(Μονάδες 06)

Αν είναι $\alpha = 5,\ \ \beta = 3$,

β) να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 07)

γ) να λυθεί η ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 06)

δ) Αν $P(ln\kappa) < 0$, τότε να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού κ.

(Μονάδες 06)