Πολυωνυμικές Εξισώσεις και Ανισώσεις

18583

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-x^2-8x+4$.

α)

i. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$.

(Μονάδες 10)

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-2)$.

(Μονάδες 9)

β) Αν $P(x)=(2x-1)(x^2-4)$, να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

(Μονάδες 6)

15989

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2x^2-2x+4$.

α) Δίνεται ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει μοναδική ακέραια ρίζα. Να προσδιορίσετε τη μοναδική ακέραια ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε όλες τις ρίζες του $P(x)$ και να το γράψετε ως γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων.

(Μονάδες 13)

20856

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε οτι η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

(Μονάδες 12)

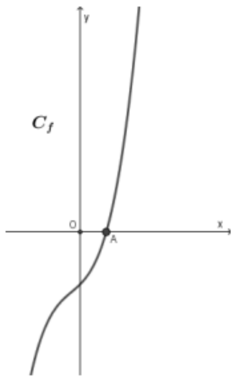
β) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

i. Να δικαιολογήσετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ρίζα.

(Μονάδες 04)

ii. Να αποδείξετε ότι η ρίζα αυτή βρίσκεται στο διάστημα $(0,1)$.

(Μονάδες 09)



18230

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 4$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει παράγοντα το $(x-2)$.

(Μονάδες 9)

β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 7)

15176

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3\,x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι το $x - 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου.

(Μονάδες 12)

β) Αν $P(x) = (x - 1\,) \cdot (x^2 - x + 2)$, να βρείτε για ποιες τιμές του x είναι $P(x) > 0$.

(Μονάδες 13)

15349

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.

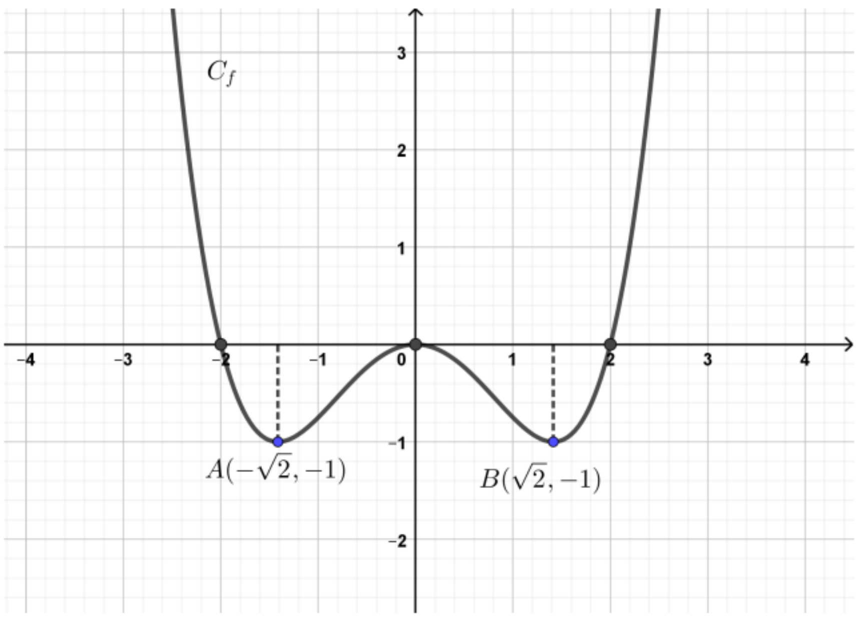
(Μονάδες 7)

β) Αν γνωρίζετε ότι τα σημεία $A\left(-\sqrt{2}, -1\right)$ και $B(\sqrt{2}, -1)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της f να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x) = 0$.

(Μονάδες 10)



15175

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μία ρίζα του πολυωνύμου.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + 1)$.

(Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 10)

17241

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x + 2$.

α)

I. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x + 1)$.

(Μονάδες 7)

II. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x + 1)$.

(Μονάδες 10)

β) Αν $P(x) = (x + 1)(x^2 - x + 2)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 8)

15674

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x) = 3x^3 - x^2 - x + 2$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $\mathrm{P}(x) : (x - 1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 10)

β) Αν $\mathrm{P}(x) = (x - 1)(3x^2 + 2x + 1) + 3$ να λύσετε την ανίσωση $\mathrm{P}(x) < 3$.

(Μονάδες 15)

15653

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+x^2+2x+2$.

α)

i. Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $(x+1)$.

(Μονάδες 8)

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x+1)$.

(Μονάδες 5)

β) Αν $P(x)=(x+1)(x^2+2)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.

(Μονάδες 12)

15247

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-x^2+2x-1$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

(Μονάδες 10)

β) Αν $P(x)=(2x-1)(x^2+1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)\geq 0$.

(Μονάδες 15)

15246

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+x^2-x-1$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

(Μονάδες 10)

β) Αν $P(x)=(x+1)^2(x-1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)\geq 0$.

(Μονάδες 15)

15695

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2x - 3, x \in R$.

α) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x+1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) + 6 = 0$.

(Μονάδες 12)

15654

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 7x + 6$.

α) Να δείξετε ότι το $x-2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 13)

15618

ΘΕΜΑ 2

α) Να γράψετε το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+x^2-x$ ως γινόμενο ενός πρωτοβάθμιου και ενός δευτεροβάθμιου πολυωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

(Μονάδες 15)

15248

ΘΕΜΑ 2

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $2x-1$ δίνει πηλίκο x^2-2 και υπόλοιπο 1.

α) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

(Μονάδες 12)

β) Αν $P(x)=2x^3-x^2-4x+3$

i. να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$.

(Μονάδες 7)

ii. να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

(Μονάδες 6)

15047

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-x^3-5x^2+7x-2$.

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν το πολυώνυμο έχει και άλλη ακέραια ρίζα.

(Μονάδες 15)

15040

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $x^3-7x+6=0$.

α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα της.

(Μονάδες 5)

β) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης

$$(x^3-7x+6):(x-1)$$

και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

(Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $x^3-7x+6=0$.

(Μονάδες 10)

20859

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x^3-4x^2+x+6}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 09)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

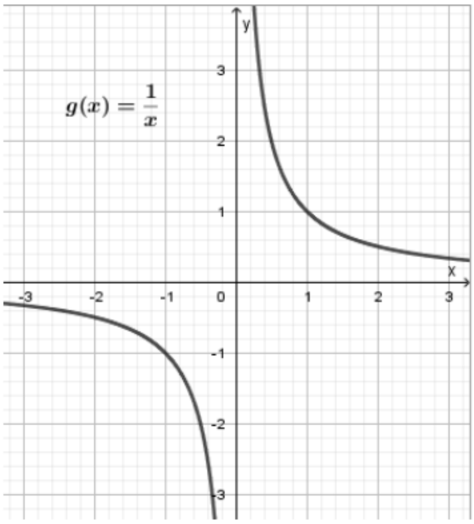
(Μονάδες 05)

γ)

i. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f.

(Μονάδες 02)

ii. Αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\frac{1}{x}$ είναι η παρακάτω,



να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 04)

δ) Να λύσετε την εξίσωση: $\left|\frac{1}{f(x)}\right|=1$.

(Μονάδες 05)

37475

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-x^2-2x+1$. Να αποδείξετε ότι

α) το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$.

(Μονάδες 6)

β) $P(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(\frac{1}{2},1)$.

(Μονάδες 7)

γ) $\frac{1}{2}<\sigma\upsilon\nu\theta<1$ για κάθε γωνία $\theta\in(0,\frac{\pi}{3})$.

(Μονάδες 6)

δ) $P(\sigma\upsilon\nu\theta)<0$ για κάθε γωνία $\theta\in(0,\frac{\pi}{3})$.

(Μονάδες 6)

20943

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται γωνία x με $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ και οι παραστάσεις:

$A=\eta\mu^2(\pi-x)+\eta\mu^2(\pi+x)+\sigma\upsilon\nu^2(-x)$,

$B=\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}+\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$.

α) Να αποδείξετε ότι $A=\eta\mu^2 x+1$.

(Μονάδες 08)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση B.

(Μονάδες 08)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x για την οποία οι παραστάσεις A και B να είναι ίσες.

(Μονάδες 09)

20752

ΘΕΜΑ 4

Δύο συμμαθητές ο Αλέξανδρος και ο Φίλιππος που κάθονται στο ίδιο θρανίο σχεδιάζουν τον τριγωνομετρικό κύκλο σε μιλιμιτρέ χαρτί και στη συνέχεια προσπαθώντας να υπολογίσουν τις συντεταγμένες ενός δοσμένου σημείου Μ αυτού του κύκλου διαφωνούν στην απάντησή τους. Ο Αλέξανδρος εκτιμά ότι οι συντεταγμένες του σημείου Μ είναι $M(0{,}8\,,\,0{,}6)$ ενώ ο Φίλιππος εκτιμά ότι οι συντεταγμένες του είναι $M(1\,,1)$.

α) Ποιος από τους δύο έχει σίγουρα άδικο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 08)

β) Αν υποθέσουμε ότι το σημείο του οποίου υπολογίστηκαν σωστά οι συντεταγμένες του είναι το $M(0{,}8\,,\,0{,}6)$

i. να αιτιολογήσετε ότι $\eta\mu\omega = 0{,}6$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = 0{,}8$

(Μονάδες 03)

ii. να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \eta\mu(\pi-\omega) - 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right) + \varepsilon\varphi(-\omega) + \sigma\varphi(\pi+\omega).$$

(Μονάδες 05)

γ) Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = 5\sigma\upsilon\nu\omega\cdot x^3 - 10\eta\mu\omega\cdot x^2 + 5x - 3$, $x \in R$ όπου ω η γωνία που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

(Μονάδες 09)

21240

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x - 2$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου.

(Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $3\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^3 + 4\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{x^2+1}\right) - 2 > 0$.

(Μονάδες 11)

21155

ΘΕΜΑ 4

Στον πίνακα μιας σχολικής τάξης είναι γραμμένο το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, όπου οι συντελεστές a, b, c είναι μη μηδενικοί ακέραιοι αριθμοί. Δύο μαθητές, ο Α και ο Β, παίζουν ένα παιχνίδι, επιλέγοντας τιμές για τους συντελεστές ως εξής: πρώτα ο Α επιλέγει τιμή για κάποιον συντελεστή, μετά ο B επιλέγει τιμή για έναν από τους δύο εναπομείναντες συντελεστές και τέλος ο A επιλέγει τιμή για τον συντελεστή που έμεινε. Προσπαθούν να επιλέξουν τους a, b, c ώστε το $P(x)$ να ικανοποιεί κάποια συγκεκριμένη συνθήκη.

α) Έστω ότι ο μαθητής Α επιλέγει $\alpha = 2$, μετά ο Β επιλέγει $b = 1$ και τέλος ο Α επιλέγει πάλι $c = 2$. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ θα έχει τότε ως μοναδική ρίζα τον αριθμό -2.

(Μονάδες 5)

β) Ο μαθητής Α επιλέγει $a = -1$. Να αποδείξετε ότι ανεξάρτητα πως θα παίξει ο μαθητής Β, ο Α μπορεί μετά να επιλέξει συντελεστή έτσι ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x - 1$.

(Μονάδες 8)

γ) Ο μαθητής Α επιλέγει $c = 1$. Να αποδείξετε ότι ανεξάρτητα πως θα παίξει ο μαθητής Β, ο Α μπορεί μετά να επιλέξει συντελεστή έτσι ώστε το $P(x)$ να έχει σίγουρα ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

(Μονάδες 7)

δ) Ο μαθητής Α επιλέγει $c = 2022$. Να αποδείξετε ότι όπως και να επιλεγούν μετά οι συντελεστές a και b είναι αδύνατον το $P(x)$ να έχει ως ρίζα τον αριθμό 13.

(Μονάδες 5)

22013

ΘΕΜΑ 4

Δίδεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^4 + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $\mathrm{P}(\mathrm{x})$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε δύο αριθμούς α, β τέτοιους ώστε:

$$\mathrm{x}^4 + 1 = (\mathrm{x}^2 + \alpha\mathrm{x} + 1) \cdot (\mathrm{x}^2 + \beta\mathrm{x} + 1)$$

(Μονάδες 10)

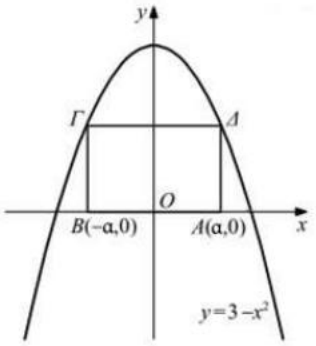
γ) Θεωρούμε την ακόλουθη πρόταση: «*Κάθε πολυώνυμο που μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πολυωνύμων μικρότερου μη μηδενικού βαθμού, έχει πραγματικές ρίζες*». Είναι η πρόταση αυτή Σωστή ή Λάθος; Αν η πρόταση είναι σωστή, να δώσετε απόδειξη. Αν η πρόταση είναι λάθος, να δώσετε αντιπαράδειγμα.

(Μονάδες 10)

18221

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η παραβολή $y=3-x^2$ και τα σημεία της Γ,Δ. Δίνεται ακόμα ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $\alpha\in\left(0,\sqrt{3}\right)$.



α) Αν E είναι το εμβαδό του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\left(0,\sqrt{3}\right)$ είναι $E=f(\alpha)=-2\alpha^3+6\alpha$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 08)

ii. να βρεθεί το εμβαδό E στη θέση $\alpha=1$.

(Μονάδες 02)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό E δεν μπορεί να ξεπεράσει τις 4 τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 12)

γ) Να βρεθεί η θέση του α, ώστε το εμβαδό E να πάρει τη μέγιστη τιμή του.

(Μονάδες 03)

15174

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^4 + x^3 + \alpha x - 4$ και $\delta(x) = x^2 - 3x + 2$. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $\delta(x)$, είναι το πολυώνυμο $\upsilon(x) = 24x - 24$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α.

(Μονάδες 8)

β) Για $\alpha = 2$,

i. να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 1$.

(Μονάδες 2)

ii. να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$.

(Μονάδες 8)

iii. να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

17943

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό $\mathrm{E} = 60cm^2$, του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά $2cm$ μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:

α)

i. Να δείξετε ότι $y = \dfrac{120}{x}$.

(Μονάδες 3)

ii. Αφού εκφράσετε όλες τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου συναρτήσει του x, να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση:

$$x^3 + x^2 - 3600 = 0.$$

(Μονάδες 7)

β) Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 16, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου.

(Μονάδες 10)

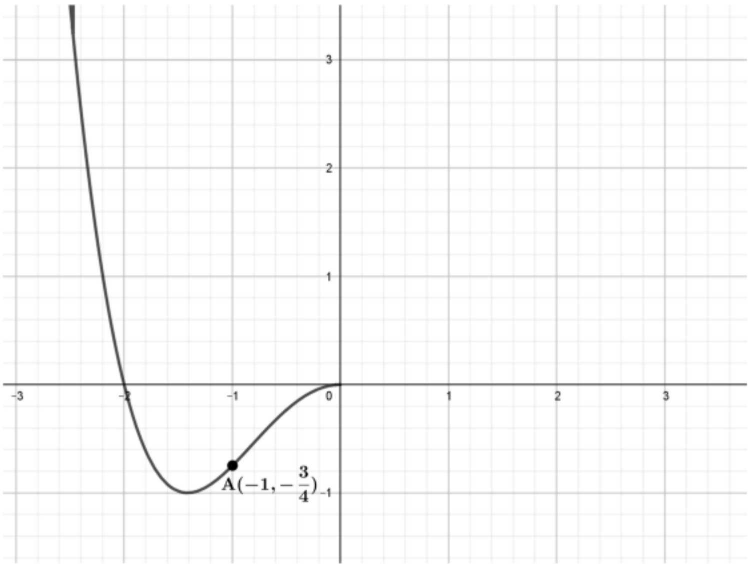
γ) Να βρείτε το πλήθος των ορθογωνίων τριγώνων που ικανοποιούν τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

17925

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\alpha x^2$, $x\in\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ και το σημείο $\mathrm{A}\left(-1,-\frac{3}{4}\right)$ αυτής.



α) Να δείξετε ότι $\alpha=-1$.

(Μονάδες 6)

β) Για $\alpha=-1$,

i. Να αποδείξετε ότι $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x>0$.

(Μονάδες 6)

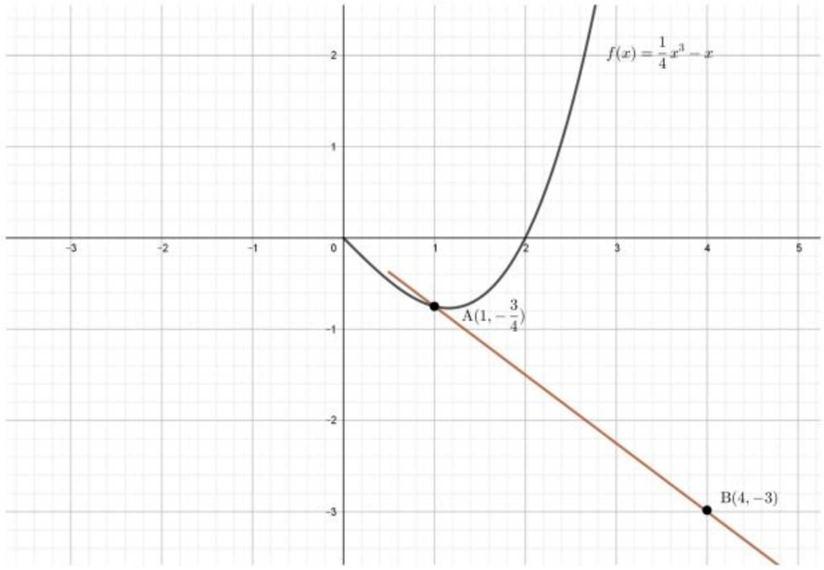
γ) Αφού επιβεβαιώσετε ότι $f\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{3}{4}$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας $y=-\frac{3}{4}$ με την γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 8)

17919

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x$, $x\in\mathbb{R}$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}\left(1,-\frac{3}{4}\right)$ και $\mathrm{B}(4,-3)$.



α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB.

(Μονάδες 6)

β)

i. Να αποδείξετε ότι $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x<0$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν η ευθεία AB έχει εξίσωση $y=-\frac{3}{4}x$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας με την γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 8)

15790

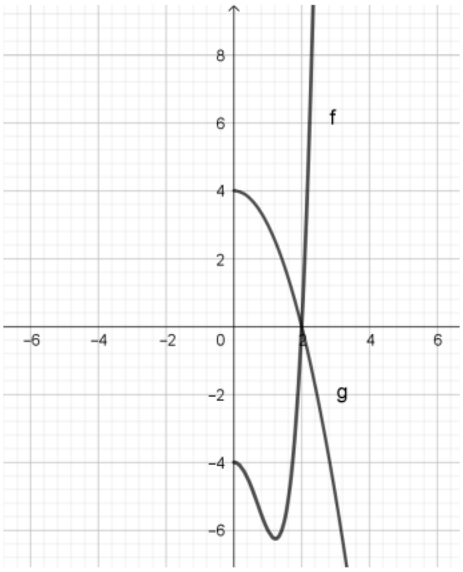
ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^4-3x^2-4$ και $g(x)=-x^2+4$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-x)=f(x)$ και $g(-x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μέρος των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.



Αφού μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας, να συμπληρώσετε τις γραφικές παραστάσεις σε όλο το $\mathbb{R}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να λύσετε , αλγεβρικά ή γραφικά:

i. την εξίσωση $f(x)=g(x)$.

(Μονάδες 6)

ii. την ανίσωση $f(x)<g(x)$.

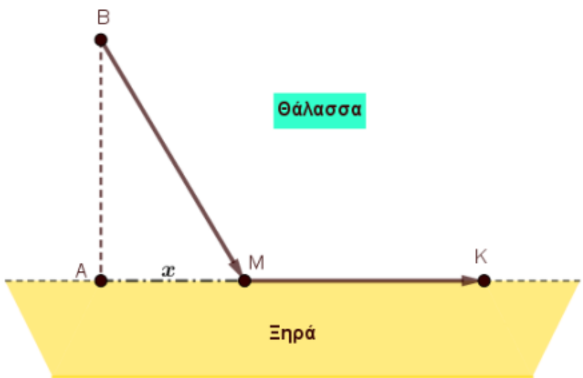
(Μονάδες 6)

15436

ΘΕΜΑ 4

Ένας κολυμβητής βρίσκεται στη θάλασσα, στο σημείο B σε απόσταση $2\,km$ από το κοντινότερο σημείο A μιας ευθύγραμμης ακτής. Ο προορισμός του είναι ένα σημείο K της ακτής, το οποίο απέχει $4\,km$ από το A. Η διαδρομή που κάνει είναι η BM κολυμπώντας στη θάλασσα με σταθερή ταχύτητα $3\,km/h$ και η MK τρέχοντας στην ακτή με σταθερή ταχύτητα $5km/h$.

Γνωρίζουμε ότι η σχέση μεταξύ του διαστήματος s που διανύεται, της ταχύτητας v και του αντίστοιχου χρόνου κίνησης t, είναι $v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$.



Αν το σημείο M απέχει από το A απόσταση $x\,km$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $BM = \sqrt{4 + x^2}$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που εκφράζει τον χρόνο κίνησης t (σε h) του κολυμβητή – δρομέα ως προς την απόσταση x (σε km) είναι η:

$$t(x) = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{3} + \frac{4 - x}{5}, \quad x \in [0, 4].$$

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη θέση του σημείου M της ακτής, έτσι ώστε ο χρόνος της διαδρομής του κολυμβητή – δρομέα να είναι $\frac{4}{3}$ ώρες.

(Μονάδες 10)

15094

ΘΕΜΑ 4

Το διάστημα $S(t)$ σε μέτρα που έχει διανύσει ένα κινητό τη χρονική στιγμή t σε δευτερόλεπτα, δίνεται από τη σχέση: $S(t) = 2t^3 - 6t^2 + 10t$

α) Να βρείτε το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό τις χρονικές στιγμές $t = 0$ και $t = 2$.

(Μονάδες 03)

β) Να βρείτε πόσο χρόνο χρειάζεται το κινητό για να διανύσει απόσταση *30* μέτρων.

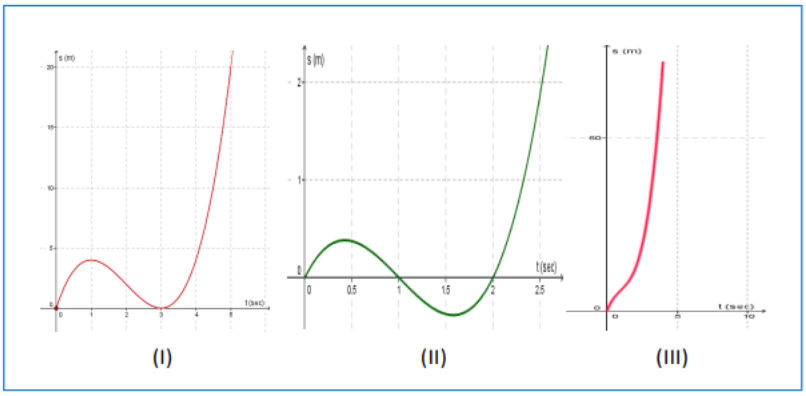
(Μονάδες 10)

γ) Επειδή το $S(t)$ εκφράζει το διάστημα που διανύει το κινητό, θα πρέπει να είναι πάντα μη αρνητικό. Να αποδείξετε αλγεβρικά αυτόν τον ισχυρισμό.

(Μονάδες 08)

δ) Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τριών πολυωνύμων $S(t)$. Μία από αυτές εκφράζει το διάστημα $S(t)$ της εκφώνησης. Να βρείτε ποια από τις τρεις είναι αυτή, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 04)



15960

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + \kappa x - 1$, με $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ για την οποία $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

β) Για $\kappa = 0$,

i. να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$,

(Μονάδες 6)

ii. να δείξετε ότι $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

(Μονάδες 6)

iii. να βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

15431

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 5$, με $x \in \mathbb{R}$.

i. Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x-1)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με $(x-2)$ είναι -1, να δείξετε ότι:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = -6 \\ \text{και} \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases}.$$

(Μονάδες 6)

ii. Να δείξετε ότι $\alpha = -9$ και $\beta = 12$.

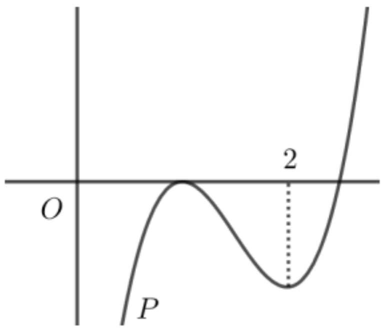
(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν η γραφική παράσταση της $P(x)$ είναι η ακόλουθη, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.

(Μονάδες 4)



15005

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$.

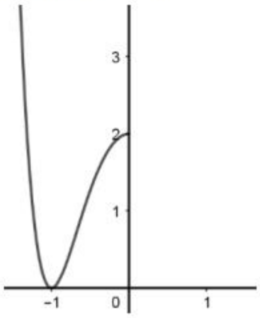
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f για $x \leq 0$. Να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$.



(Μονάδες 4)

δ) Με βάση τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 6)

15677

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των α, β, αν είναι γνωστό ότι το $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $Q(x) = x^2 - 2x + 1$.

(Μονάδες 8)

β) Για $\alpha = 4, \beta = -2$

i. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x^2+5)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 8)

ii. Αν $P(x) = \left(x^2+5\right)(x^2-2x-6)+14x+28$ να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 14(x+2)$.

(Μονάδες 9)

14955

ΘΕΜΑ 4

Η μέση θερμοκρασία Τ (σε βαθμούς Κελσίου) στην επιφάνεια ενός πλανήτη, μετά από x εκατομμύρια χρόνια, έχει εκτιμηθεί ότι είναι $T(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$.

α) Αποδείξτε ότι 2 εκατομμύρια χρόνια μετά, η μέση θερμοκρασία στον πλανήτη θα είναι μηδέν ^oC.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τους αριθμούς α, β, γ με $\alpha < \beta < \gamma$ ώστε να ισχύει

$T(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$

(Μονάδες 10)

γ) Θεωρούμε ότι μια χρονική περίοδος παγετώνων στον πλανήτη είναι αυτή στην οποία η μέση θερμοκρασία T είναι συνεχώς κάτω από μηδέν ^oC. Ποιες χρονικές περιόδους θα έχουμε παγετώνες στον πλανήτη;

(Μονάδες 10)

15066

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Ο αριθμός 0 δεν είναι ρίζα του.

ii. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του, τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα του.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε ένα θετικό ακέραιο αριθμό που να είναι ρίζα του.

(Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 5)