

# Γεωμετρία

## Ασκήσεις επανάληψης

### Θεωρία

#### ΤΡΙΓΩΝΑ

Δύο **τρίγωνα** είναι **ίσα** όταν έχουν:

- Δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (ΠΠΠ).
- Μία πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (ΓΠΓ).
- Και τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία (ΠΠΠΠ).

Ειδικότερα δύο **ορθογώνια τρίγωνα** είναι **ίσα** όταν έχουν:

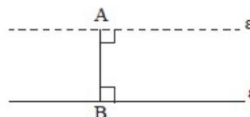
- Δύο οποιεσδήποτε ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.
- Μια πλευρά και την προσκείμενη σε αυτήν οξεία γωνία αντίστοιχα, ίσες μία προς μία.

Στο **ισοσκελές** τρίγωνο:

- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.
- Η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση είναι ύψος και διχοτόμος.
- Το ύψος, που αντιστοιχεί στη βάση, είναι διχοτόμος και διάμεσος.

#### ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

Από σημείο A εκτός ευθείας ε



- **υπάρχει** ευθεία  $\epsilon' // \epsilon$ .
- δεχόμαστε αξιωματικά ότι η  $\epsilon'$  είναι **μοναδική**. (Αίτημα παραλληλίας)

Δύο ευθείες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  είναι παράλληλες αν:

- είναι **κάθετες** στην ίδια ευθεία  $\epsilon$ .
- είναι **παράλληλες** προς τρίτη ευθεία  $\epsilon$ .
- τέμνονται από μια τρίτη ευθεία και σχηματίζουν:

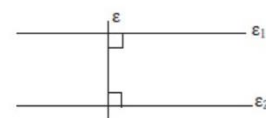
τις εντός εναλλάξ γωνίες τους **ίσες**.

τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους **ίσες**.

τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους **παραπληρωματικές**.

Έστω  $\epsilon_1 // \epsilon_2$  και  $\epsilon$  μια τρίτη ευθεία.

- Αν  $\epsilon \perp \epsilon_1$  τότε  $\epsilon \perp \epsilon_2$ .
- Αν η  $\epsilon$  τέμνει την  $\epsilon_1$  τότε θα τέμνει και την  $\epsilon_2$  και θα σχηματίζει:

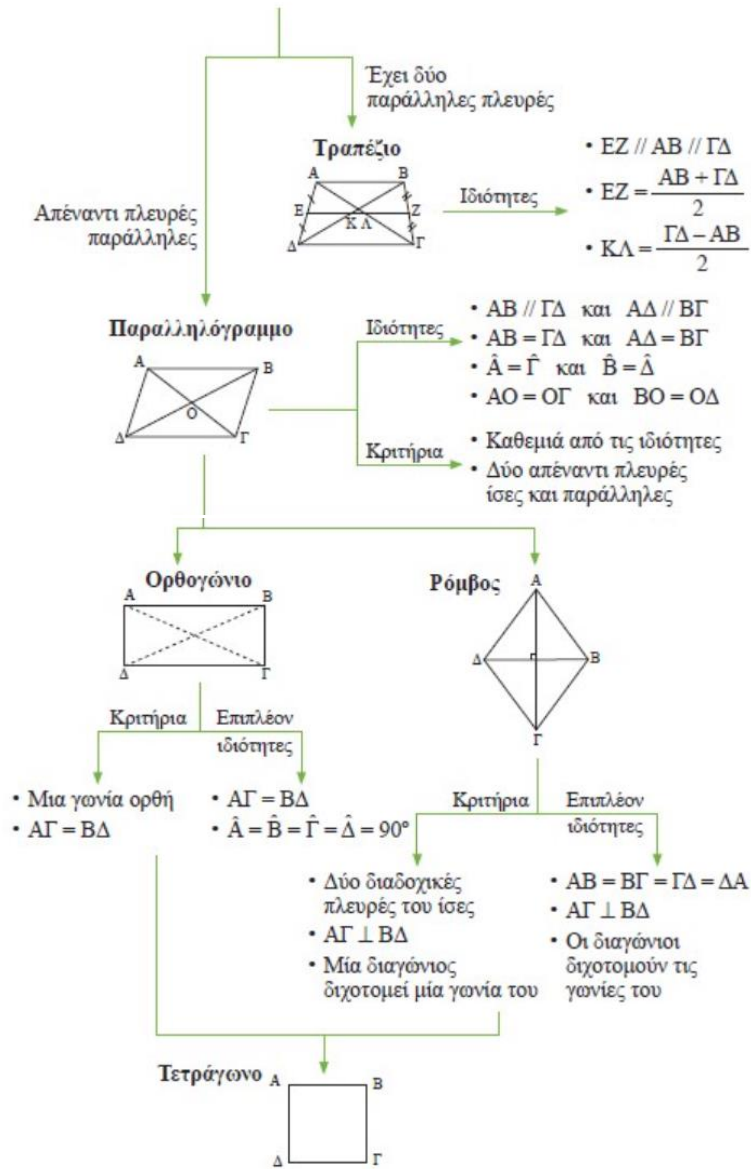


τις εντός εναλλάξ γωνίες **ίσες**.

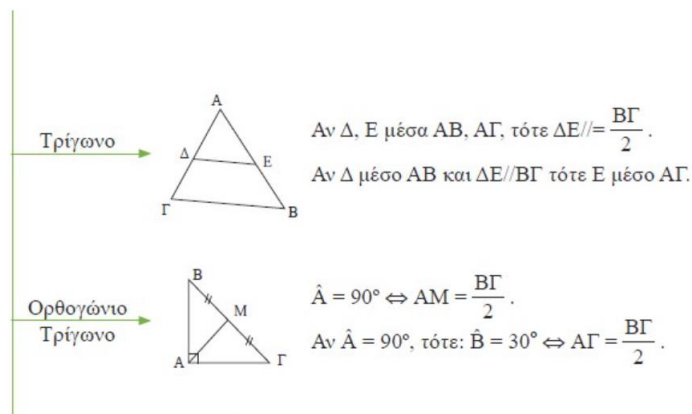
τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες **ίσες**.

τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες **παραπληρωματικές**.

# ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ



## Εφαρμογές των παραλληλογράμμων



## Ασκήσεις

### Άσκηση 1

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB=AG$ . Από τα μέσα  $K, \Lambda$  των ίσων πλευρών  $AB$  και  $AG$  φέρουμε  $KE, \Lambda\Delta$  κάθετα στη  $B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $KEB$  και  $\Lambda\Delta\Gamma$  είναι ίσα.

### Άσκηση 2

Δίνεται τρίγωνο  $\Delta EZ$  και η διχοτόμος του  $\Delta H$ . Από την κορυφή  $E$  φέρουμε την  $EI//\Delta H$ , η οποία τέμνει την προέκταση της  $\Delta Z$  στο σημείο  $I$ . Να δείξετε ότι  $ZI=\Delta E+\Delta Z$ .

### Άσκηση 3

Αν  $\Delta$  και  $E$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $AG$  αντίστοιχα του ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ), να αποδείξετε ότι:

- A)  $\Delta E//B\Gamma$
- B) Το  $\Delta E\Gamma B$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

### Άσκηση 4

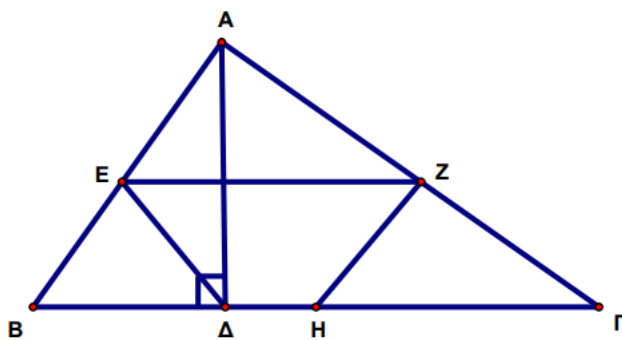
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A=90^\circ$ ) και  $\hat{B} = 30^\circ$ . Αν  $E, Z$  τα μέσα των  $AB$  και  $AG$ , να αποδειχθεί ότι  $EZ=AG$ .

### Άσκηση 5

Στο παρακάτω σχήμα το  $A\Delta$  είναι το ύψος του  $AB\Gamma$  προς τη  $B\Gamma$ , η  $\Delta E$  είναι διάμεσος του τριγώνου  $AB\Delta$ , επίσης  $EZ//B\Gamma$  και  $ZH//AB$ .

Να αποδειχθεί ότι :

- A)  $ZH=EB$
- β) Το τρίγωνο  $E\Delta B$  είναι ισοσκελές
- γ) Το  $\Delta EZH$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

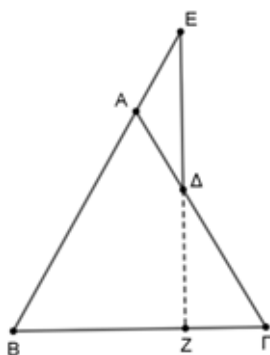


## Άσκηση 6

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Θεωρούμε σημείο  $E$  στην προέκταση της  $BA$  (προς το  $A$ ) και σημείο  $\Delta$  στο εσωτερικό της πλευράς  $A\Gamma$ , ώστε  $AE=A\Delta$ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $A\Delta E$ .

β) Αν  $Z$  είναι το σημείο τομής της προέκτασης της  $E\Delta$  (προς το  $\Delta$ ) με την  $B\Gamma$ , να αποδείξετε ότι η  $EZ$  είναι κάθετη στην  $B\Gamma$ .



## Άσκηση 7

Έστω κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $r$ . Σε σημείο  $N$  του κύκλου φέρουμε την εφαπτόμενή του, και εκατέρωθεν του  $N$  θεωρούμε σημεία  $A$  και  $B$ , τέτοια ώστε  $NA=NB$ . Οι  $OA$  και  $OB$  τέμνουν τον κύκλο στα  $K$  και  $\Lambda$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο  $AOB$  είναι ισοσκελές,

β) το σημείο  $N$  είναι μέσο του τόξου  $K\Lambda$ .

