Άλγεβρα

Ασκήσεις επανάληψης

Μεθοδολογία:

Για να λύσουμε μια εξίσωση 1ου βαθμού:

- *Την φέρνουμε στην μορφή αχ=β*
- *Στην συνέχεια αν α≠0 διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου(διαιρώντας με το α) και προκύπτει μοναδική λύση*
- *Διαφορετικά αν α=0, αφού αντικαταστήσουμε το α με το μηδέν , η εξίσωση θα προκύψει ταυτότητα ή αδύνατη*

1) Να λυθούν οι εξισώσεις

   i) $1-(x-1)^2 = 3-(x-1)(x+1)$

   ii) $\frac{4x-1}{2} = \frac{4-x}{4}$

2) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση

$$(\lambda^2-9)x = \lambda^2-3\lambda$$

   i) Να είναι ταυτότητα

   ii) Να είναι αδύνατη

   iii) Να έχει λύση

Μεθοδολογία:

Για να λύσουμε μια εξίσωση β βαθμού, πρώτα την μετατρέπουμε στην μορφή $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, όπου απαιτείται και στην συνέχεια υπολογίζουμε την διακρίνουσα

$\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma$.

- *Αν Δ>0 η εξίσωση έχει 2 ρίζες $\chi_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$*
- *Αν Δ=0 η εξίσωση έχει 1 διπλή ρίζα $\chi=\frac{-\beta}{2\alpha}$*
- *Αν Δ<0 η εξίσωση δεν έχει καμία πραγματική ρίζα*

3)Να λυθούν οι εξισώσεις

   i) $12x^2+6x-4=0$

   ii) $3x-(x-1)^2 = 5$

4) Να βρεθεί το λ, ώστε η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$

i) Να έχει 2 ρίζες άνισες

ii) Να έχει 1 διπλή ρίζα

iii) Να μην έχει καμία πραγματική ρίζα

5) Δείξτε ότι η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x - \lambda - 1 = 0$ έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε λ πραγματικό αριθμό.

Μεθοδολογία:

Για να επιλύσουμε μια ανίσωση β βαθμού, υπολογίζουμε την διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ και τις ρίζες $\chi_{1,2}$.

- *Αν $\Delta > 0$ τότε η εξίσωση έχει 2 άνισες ρίζες χ_1, χ_2 και το πρόσημο του τριωνύμου είναι:*

		x_1	x_2
$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$	*Ομόσημο του α*	*Ετερόσημο του α*	*Ομόσημο του α*

- *Αν $\Delta = 0$ η εξίσωση έχει 1 διπλή ρίζα την χ_1*

		X_1
$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$	*Ομόσημο του α*	*Ομόσημο του α*

- *Αν $\Delta < 0$ η εξίσωση δεν έχει καμία πραγματική ρίζα*

$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$	*Ομόσημο του α*

6) Να λυθεί η ανίσωση $8x^2 > 8x - 2$

Συναρτήσεις

Μεθοδολογία:

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης στην οποία περιέχεται κλάσμα, πρέπει ο παρονομαστής να είναι διαφορετικός του μηδενός.

$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ *πρέπει* $h(x)\neq 0$

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτηση στην οποία περιέχεται ρίζα, πρέπει το υπόριζο να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός.

$f(x)=\sqrt{g(x)}$ *πρέπει* $g(x)\geq 0$

1) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

i) $\mathrm{f(x)}=\sqrt{3\mathrm{x}+4}$

ii) $\mathrm{f(x)}=\frac{\mathrm{x}-5}{\mathrm{x}^3+8}$

iii) $\mathrm{f(x)}=\frac{\mathrm{x}}{\sqrt{\mathrm{x}-2}-2}$

Μεθοδολογία:

Για να βρούμε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων Cf και Cg, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=g(x)$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης θα δώσει τις τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων.

2) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2-1$ και $g(x)=5x-7$

i) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων f και g

ii) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από την C_g.

Ακολουθίες

Θεωρία

Μια ακολουθία λέγεται **αριθμητική πρόοδος**, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \omega$$

Ο $\nu^{ος}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega.$$

Το άθροισμα των πρώτων ν όρων αριθμητικής προόδου (α_ν) με διαφορά ω είναι

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu).$$

Μια ακολουθία λέγεται **γεωμετρική πρόοδος**, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό.

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda$$

Ο ν^{os} όρος μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ είναι

$$\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$$

Το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν) με λόγο $\lambda \neq 1$ είναι $S_\nu = \alpha_1 \cdot \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$.

Άσκηση 1

α) Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων $1, 2, 3, \ldots, \nu$.

β) Να βρείτε πόσοι από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους έχουν άθροισμα 45

Άσκηση 2

Δίνεται μία πρόοδος α_ν με πρώτους όρους $2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \ldots$

α) Να εξετάσετε αν η α_ν είναι αριθμητική πρόοδος.

β) Να αποδείξετε ότι η α_ν είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε το ν-οστό της όρο.