Τίτλος: «Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις.»
Η δύναμη της γραφικής απεικόνισης και η περιοδικότητα.

Ταυτότητα του σεναρίου
Συγγραφέας: Δέσποινα Ζαχαριάδου, ΠΕ03
Γνωστική περιοχή Μαθηματικών: Ανάλυση
Θέμα: Τριγωνομετρικές συναρτήσεις, γραφικές παραστάσεις, περιοδικότητα, ιδιότητες, χαρακτηριστικά.
Εκπαιδευτικό Λογισμικό: Geogebra

Σκεπτικό της δραστηριότητας
Καινοτομίες:
Η ιδέα της δραστηριότητας είναι να εξοικειωθούν οι μαθητές/-τριες με την αναγκαιότητα της γραφικής παράστασης στη μελέτη μιας συνάρτησης και να αναπτύξουν δεξιότητες άντλησης πληροφοριών από αυτήν.
Οι συναρτήσεις που θα μελετηθούν είναι οι τριγωνομετρικές της μορφής:
ψ= ημχ, ψ=ημ(ωχ), ψ=ρημ(ωχ) , ψ=ρημ(ωχ)+κ
και ψ= συνχ, ψ=συν(ωχ), ψ=ρσυν(ωχ) , ψ=ρσυν(ωχ)+κ
Το λογισμικό «Geogebra» προσφέρει τη δυνατότητα παραμετρικοποίησης της εξίσωσης της γραφικής παράστασης που μελετάμε. Δηλαδή, αφού διατυπωθούν οι εξισώσεις με μορφή εντολών σε συμβολική γλώσσα, μπορούν οι μαθητές/-τριες να παρατηρήσουν το γραφικό αποτέλεσμα των εντολών και στη συνέχεια να χειριστούν δυναμικά τα γραφήματα, αλλάζοντας τις τιμές των μεταβλητών τους μεγεθών ή με τη χρήση του μεταβολέα-δρομέα.
Μπορούν έτσι να «ταξιδέψουν» στην «οικογένεια» των γραφικών παραστάσεων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και των μετασχηματισμών τους και άρα να «υποψιαστούν» την έννοια της απειρίας και να γενικεύσουν.

Σύντομη περιγραφή της δραστηριότητας
Αρχικά δίνονται στους μαθητές/-τριες οδηγίες και πληροφορίες για το λογισμικό που θα χρησιμοποιήσουν, την ονοματολογία των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και τη χρήση του μεταβολέα.
Δίνεται ειδικά σχεδιασμένο φύλλο εργασίας με ερωτήματα που θα τους καθοδηγήσουν στη σταδιακή ανακάλυψη και άντληση πληροφοριών από τις γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων.
Οι μαθητές/-τριες καλούνται να παρατηρήσουν τις γραφικές παραστάσεις, να συνεργαστούν με την ομάδα τους και να καταγράψουν τα συμπεράσματά τους και τις παρατηρήσεις τους για το Πεδίο Ορισμού, το Σύνολο Τιμών, την Περίοδο, το Μέγιστο και το Ελάχιστο για τις διάφορες μορφές εξισώσεων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων για τους περισσότερους πιθανούς μετασχηματισμούς.

Καλούνται επίσης να γενικεύσουν τα συμπεράσματά τους με χρήση του μεταβολέα, για τις διάφορες τιμές των μεταβλητών μεγεθών, τις αντίστοιχες μεταβολές που υφίσταται η γραφική παράσταση, το Πεδίο Ορισμού, το Σύνολο Τιμών, η Περίοδος, το Μέγιστο και το Ελάχιστο των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Προστιθέμενη αξία

Οι γραφικές παραστάσεις με τη βοήθεια του λογισμικού παρουσιάζονται εύκολα με ταχύτητα και αξιοπιστία. Ο δυναμικός χειρισμός του μεταβολέα εμφανίζει με αμεσότητα τις όποιες μεταβολές υφίσταται αυτή με κάθε αλλαγή συντελεστή και παράλληλα δείχνει και τον τύπο της αντίστοιχης συνάρτησης.
Η μαθησιακή διαδικασία έτσι αποκτά πρόσθετη αξία με τον πειραματισμό με την αλλαγή των συντελεστών με τη βοήθεια του δρομέα, την αναπαράσταση, την αμεσότητα με την οποία μπορούμε να δούμε πολλά στιγμιότυπα μιας οικογένειας συναρτήσεων, πολλούς μετασχηματισμούς και την προσομοίωση.
Η γνώση προσεγγίζεται με διάλογο -συζήτηση, συνεργασία, ανάπτυξη επιχειρηματολογίας και συλλογικότητα μέσα στις ομάδες. Παράλληλα η χρήση του λογισμικού οδηγεί σε δράση, έρευνα και αναζήτηση. Ο συνδυασμός των παραπάνω προσδίδει ιδιαίτερο ενδιαφέρον και πρωτοτυπία στη μαθησιακή διαδικασία.

Πλαίσιο εφαρμογής

Απευθύνεται στους μαθητές/-τριες της Β Λυκείου ή και για την εισαγωγική επανάληψη στα Μαθηματικά Θετικής ή Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Γ Λυκείου.

Χρόνος υλοποίησης:

Για την υλοποίηση του σεναρίου απαιτούνται 4 - 5 διδακτικές ώρες.

Χώρος υλοποίησης:

Η δραστηριότητα προτείνεται να εξελιχθεί στο εργαστήριο ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Προτεινόμενες γνώσεις των μαθητών/-τριών:

Με δεδομένο ότι το λογισμικό που θα χρησιμοποιηθεί είναι το «Geogebra», κρίνεται απαραίτητο να προϋπάρχουν γενικές γνώσεις χρήσης Η/Υ από το μάθημα της Πληροφορικής, δηλαδή οι μαθητές/-τριες πρέπει να είναι εξοικειωμένοι με τις βασικές λειτουργικότητες του Η/Υ και να προηγηθεί από τον διδάσκοντα στην αρχή της δραστηριότητας ενημέρωσή τους σχετικά με τις βασικές εντολές και δυνατότητες του λογισμικού, καθώς και να δοθεί σχετικό ενημερωτικό φυλλάδιο.

Για την Β Λυκείου η δραστηριότητα θα επιχειρήσει μια πρώτη επαφή με την περιοδικότητα των συναρτήσεων και τη μελέτη συνάρτησης μέσω της γραφικής παράστασης που θα διδαχθούν αναλυτικά στην επόμενη τάξη και θα πραγματοποιηθεί στην αντίστοιχη ενότητα του σχολικού βιβλίου. Για τη Γ Λυκείου η δραστηριότητα προτείνεται να πραγματοποιηθεί στην αρχή της σχολικής χρονιάς –όταν γίνεται αναφορά στις γραφικές παραστάσεις βασικών συναρτήσεων-, ώστε να αποτελέσει αφορμή για μια δημιουργική επανάληψη των όσων διδάχθηκαν στην προηγούμενη τάξη και θα κληθούν να χρησιμοποιήσουν παρακάτω.
Καλό είναι να μην είμαστε φειδωλοί με το χρόνο που θα διαθέσουμε για τη δραστηριότητα, ώστε να βοηθηθούν οι μαθητές/-τριες στις επεκτάσεις του θέματος, καθώς και να εξοικειωθούν με τις γραφικές παραστάσεις και τις δυνατότητες που μας δίνουν με ταυτόχρονη κατανόηση αυτών και των εννοιών που τις διέπουν.

Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία:
Κρίνεται χρήσιμο, οι μαθητές/-τριες να διαθέτουν τετράδιο για να κρατούν σημειώσεις και να καταγράφουν τις παρατηρήσεις, προτάσεις και διάφορες απόψεις των μελών της ομάδας τους, καθώς θα συνεργάζονται και θα ερευνούν.
Επιλέχθηκε να χρησιμοποιηθεί αυτό το λογισμικό γιατί θα δοθεί η ευκαιρία στους μαθητές/-τριες να κατακτηθεί δυναμικά η γνώση με τη χρήση των μεταβολέων και την παρατήρηση. Είναι γνωστό, ότι η γνώση με τη χρήση ψηφιακών εργαλείων προσεγγίζεται μέσα από αναπαράσταση, χειρισμό και διαδραστικότητα.
Θα δοθούν φύλλα εργασίας, όπου θα περιγράφονται οι δραστηριότητες που καλούνται να πραγματοποιήσουν καθώς και φύλλα αξιολόγησης της δραστηριότητας για ανατροφοδότηση του διδάσκοντα στο τέλος. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να προετοιμάσει τον τρόπο που θα αντιδρά στις πιθανές εκβάσεις της δραστηριότητας ή σε πιθανές ερωτήσεις.
Στα φύλλα εργασίας προτείνεται να τεθούν περισσότερα ερωτήματα με δυνατότητα επιλογής, ώστε να ενεργοποιηθούν (να διατηρηθεί αυξημένο το ενδιαφέρον τους) και οι μαθητές/-τριες με ιδιαιτερότητες – μαθησιακές δυσκολίες ή και αυξημένες μαθησιακές δυνατότητες - χαρισματικοί/-ές.

Κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης:
Εποικοδομητική μέθοδος διδασκαλίας. Ομαδοκεντρική μάθηση.
Η διδασκαλία θα είναι κυρίως μαθητοκεντρική. Οι μαθητές/-τριες θα χωριστούν σε ομάδες 3 ατόμων με διακριτούς ρόλους ανά μαθητή/-τρια, ώστε να ενεργοποιηθούν όλοι, τόσο αυτοί που παραιτούνται στην κατά μέτωπο διδασκαλία, όσο και αυτοί που παρουσιάζουν ιδιαιτερότητες.

Σε κάθε ομάδα προτείνεται να κατανεμηθούν αρμοδιότητες-ρόλοι, όπως:

<u>του χειριστή Η/Υ:</u> θα αποτελεί το «χέρι» της ομάδας, που θα μεταφέρει στον Η/Υ με το ποντίκι τις σκέψεις και τις ιδέες της,

<u>του γραμματέα:</u> θα καταγράφει σκέψεις, παρατηρήσεις, ιδέες, κανόνες και συμπεράσματα και

<u>του παρουσιαστή:</u> θα παρουσιάσει στην ολομέλεια τα συμπεράσματα της ομάδας.

Οι παραπάνω ρόλοι προτείνω να εναλλάσσονται από τη μία διδακτική ώρα στην άλλη, ώστε να εξασφαλίζεται η εξοικείωση όλων με το σύνολο της διαδικασίας.

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού θα είναι αυτός του συντονιστή και καθοδηγητή και όχι ο συνήθης του γνώστη των «πάντων» που προβάλλει η κατά μέτωπον διδασκαλία. Θα βρίσκεται στην αίθουσα πρόθυμος να ενθαρρύνει, αρωγός των παιδιών, έτοιμος να θέσει καίρια ερωτήματα που θα προωθούν την ανακάλυψη της γνώσης χωρίς ο ίδιος να την αποκαλύπτει.

Η διδασκαλία στοχεύει κυρίως στην παρακίνηση και ενεργοποίηση των μαθητών/-τριών με την ευχαρίστηση που προσφέρει η ανακάλυψη της αξίας της γραφικής παράστασης και της πληθώρας πληροφοριών που μπορούμε να αντλήσουμε από αυτήν.

Στόχοι της δραστηριότητας:

Η χρήση των Η/Υ έχει ως βασικό στόχο την ενίσχυση και τη βελτίωση της παραδοσιακής διδασκαλίας που σε πολλές περιπτώσεις έχει αμφίβολα αποτελέσματα. Προσπαθούμε να προσεγγίσουμε το γνωστικό αντικείμενο των Μαθηματικών με τρόπο που θα έχει μαθησιακό αποτέλεσμα.

Στόχος μας είναι να εμπνεύσουμε στους μαθητές/-τριες την αξία του να σκέφτονται με μαθηματικό τρόπο και όχι μόνο, να μην αντιμετωπίζουν με προκατάληψη τα σχήματα και τις γραφικές αναπαραστάσεις, αλλά να προσπαθούν να εκμαιεύσουν το μέγιστο πλήθος πληροφοριών από αυτά/-ές.

Διδακτικοί στόχοι:

- Να μάθουν να αναγνωρίζουν το Πεδίο Ορισμού και το Σύνολο Τιμών μιας συνάρτησης από τη γραφική της παράσταση.
- Να διαπιστώσουν τις επιπτώσεις που έχει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης η διαφοροποίηση ενός μεταβλητού μεγέθους.
- Να ανακαλύψουν συμμετρίες –κεντρική, αξονική συμμετρία- που προκύπτουν σε κάποιες γραφικές παραστάσεις.
- Να ανακαλύψουν την αξία της κατανόησης και του σχεδιασμού της γραφικής παράστασης για τη μελέτη μιας συνάρτησης.
- Να συνδυάσουν την έννοια της περιοδικότητας ενός φαινομένου με την περιοδικότητα των συναρτήσεων, ώστε να κατανοήσουν την έννοια της περιοδικότητας μιας συνάρτησης.

- Να υπολογίσουν την περίοδο, το μέγιστο και το ελάχιστο διαφόρων τριγωνομετρικών συναρτήσεων.
- Να γενικεύσουν τη σχέση που θα επαληθεύσουν με τους μεταβολείς εκφράζοντας την λεκτικά, δηλαδή διατυπώνοντας έναν κανόνα.
- Να γενικεύσουν τις παρατηρήσεις τους, διατυπώνοντας μια σχέση με σύμβολα.

Οι παιδαγωγικοί στόχοι μπορεί να είναι ίδιοι και στις δύο τάξεις χωρίς να αποκλείεται και κάποια διαφοροποίησή τους.

Παιδαγωγικοί στόχοι:

- Να συνεργαστούν και να αποκτήσουν όλοι ενεργό ρόλο στην ομάδα τους, για τις ανάγκες της δραστηριότητας.
- Να κινητοποιηθούν οι μαθητές/-τριες που ενδεχομένως δεν συμμετέχουν ενεργά στην παραδοσιακή διδασκαλία.
- Να κάνουν υποθέσεις για τη λύση των προβλημάτων που τίθενται και να ελέγξουν την αλήθεια τους.
- Να καταλήξουν σε γενικεύσεις μετά από πολλές δοκιμές, επαναλήψεις και πειραματισμό.
- Να συνειδητοποιήσουν ότι με το μεταβολέα ικανοποιείται η ανάγκη παραμετρικοποίησης των Μαθηματικών.
- Να έχουν μια πρώτη επαφή με την έννοια της επαγωγής, αφού τους προσφέρεται η δυνατότητα με χρήση του μεταβολέα να μεταβούν από το μερικό στο γενικό.
- Να συνειδητοποιήσουν ότι τα περισσότερα προβλήματα δεν έχουν μονοσήμαντη λύση, να αγγίξουν την ιδέα της απειρίας λύσεων στα Μαθηματικά.

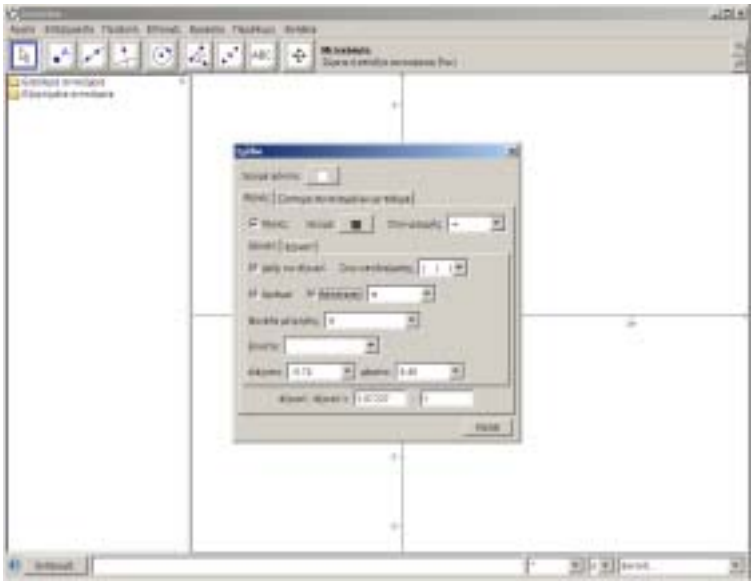
Η επιλογή των στόχων εξαρτάται κάθε φορά από τη συγκεκριμένη τάξη και τον διδάσκοντα.

****

Προτεινόμενη διδακτική προσέγγιση

Ανάλυση της δραστηριότητας

Φάση 1η



Κατά τη φάση αυτή οι μαθητές/-τριες θα έχουν μια πρώτη επαφή με το λογισμικό. Στην αρχή δουλεύοντας σε ομάδες θα επιχειρήσουν μια μικρή εξοικείωση με την εργαλειοθήκη και τις επιλογές των διαφόρων κουμπιών του Geogebra. Στόχος είναι να σχεδιάσουν τις

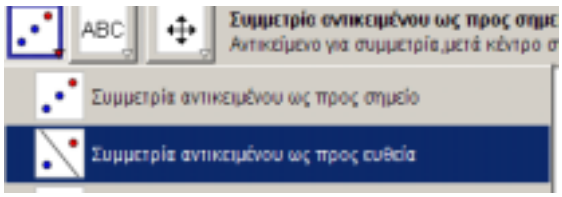
γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων ψ= ημχ και ψ= συνχ *(Φύλλο Εργασίας 1, στο τέλος του σεναρίου, ερώτηση 1),* να κάνουν συγκρίσεις και να προσπαθήσουν να αντλήσουν από αυτές, όσο το δυνατόν περισσότερες πληροφορίες.

Ξεκινώντας με δεξί κλικ στην επιφάνεια εργασίας, θα επιλέξουν Ιδιότητες με στόχο να μεταβάλλουν τη μονάδα του άξονα χ΄χ σε π. Αναμένεται, αφού σχεδιάσουν τις γραφικές παραστάσεις, πληκτρολογώντας τον τύπο τους δίπλα στη λέξη Εισαγωγή στο κάτω μέρος της οθόνης και Enter, να βρουν τα κοινά σημεία τους με τους άξονες και να επιλέξουν από το menu Ιδιότητες – Δείξε την ετικέτα – όνομα και τιμή για τα σημεία και τους τύπους των συναρτήσεων.

Η συνεργασία και η συζήτηση στις ομάδες, θα βοηθήσει στην ανάκληση γνώσεων από προηγούμενες τάξεις, στο συνδυασμό και την εξέλιξή τους, ώστε να παραχθεί νέα γνώση. Περιμένουμε για παράδειγμα να θυμηθούν, ότι η προβολή της γραφικής παράστασης στους άξονες δίνει το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών και να τα προσδιορίσουν. *(ερώτηση 2)*

Να παρατηρήσουν τις γραφικές παραστάσεις και με συνεργασία στην ομάδα τους να καταλήξουν σε συμπεράσματα για το αν υπάρχει κάποιο υποσύνολο του $\Re$, στο οποίο να ολοκληρώνονται οι μεταβολές τους, δηλαδή για την περιοδικότητά τους. *(ερώτηση 3)*

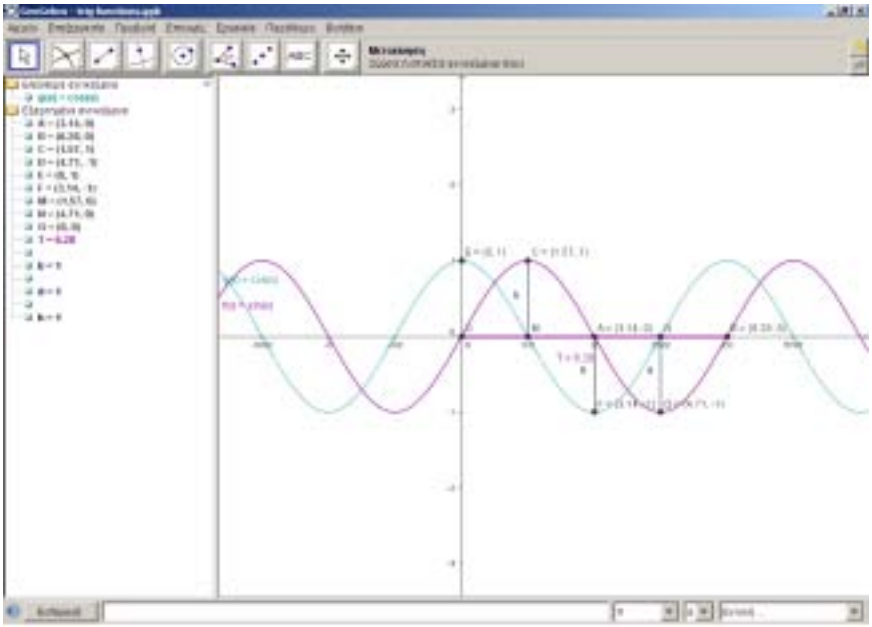
Στη συνέχεια από το κουμπί της γραμμής εργαλείων, περιμένουμε να καταλήξουν σε συμπεράσματα για συμμετρίες με τις επιλογές «συμμετρία αντικειμένου ως προς σημείο» και «συμμετρία αντικειμένου ως προς ευθεία». *(ερώτηση 4)*

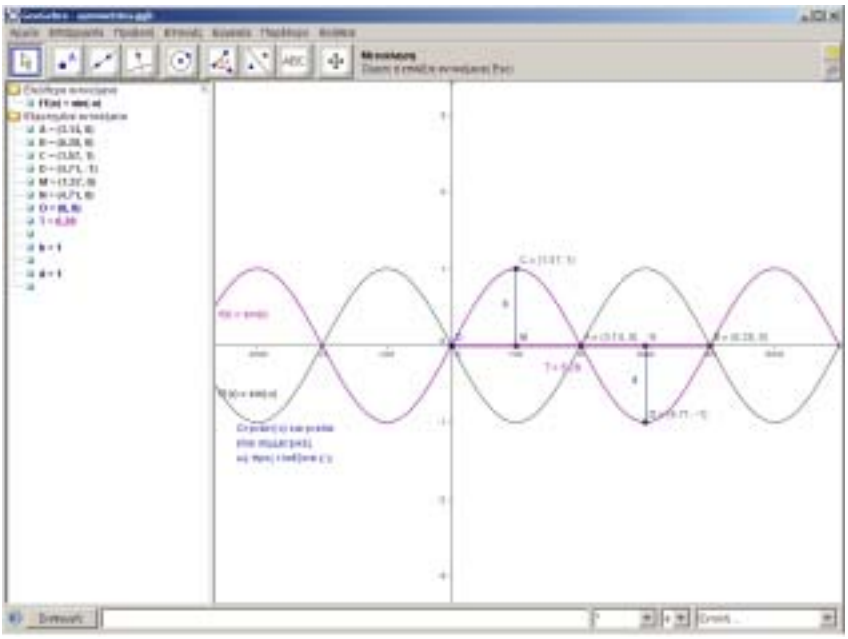


Μέρος της εργασίας των μαθητών/-τριών με το λογισμικό Geogebra που αναμένεται, φαίνεται στα στιγμιότυπα 1 και 2.

Στιγμιότυπο 1

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ψ=ημχ και ψ=συνχ





Στιγμιότυπο 2

Συμμετρία ως προς άξονα
Η συνάρτηση
ψ= ημχ έχει κέντρο συμμετρίας το Ο(0,0)...

****

****

Φάση 2η

Κατά τη φάση αυτή οι μαθητές/-τριες θα κληθούν να ανακαλύψουν ποια συνέπεια έχει η παρουσία συντελεστή του χ για τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που μελέτησαν στην 1η Φάση της δραστηριότητας. Θα σχεδιάσουν τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων της μορφής ψ=ημ(ωχ), ψ=ρημ(ωχ), ψ=ρημ(ωχ) + κ και ψ=συν(ωχ), ψ=ρσυν(ωχ), ψ=ρσυν(ωχ) + κ και θα προσπαθήσουν να αντλήσουν πληροφορίες από αυτές. *(Φύλλο Εργασίας 2, στο τέλος του σεναρίου)*

Στη φάση αυτή μπορούν να συνδυάσουν την έννοια της περιοδικότητας ενός φαινομένου με την περίοδο των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Για παράδειγμα μπορούν να κάνουν τα γραφήματα των Χ=Χο*ημ(ω*t) και U=Uo*ημ(ω*t) της απομάκρυνσης από την αρχική θέση και της ταχύτητας σώματος που εκτελεί ταλάντωση κ.ά.

Με καθοδήγηση του διδάσκοντα θα χρησιμοποιήσουν το μεταβολέα, ώστε με παρατήρηση των γραφικών αναπαραστάσεων και πειραματισμό για τις διάφορες τιμές των μεταβλητών, να καταλήξουν σε συμπεράσματα. Για παράδειγμα μπορούν να συμπεράνουν ότι το σύνολο τιμών των ψ=ρημ(ωχ) και ψ=ρσυν(ωχ) είναι πάντοτε το [-ρ,ρ].

Ξεκινώντας, όπως και στη Φάση 1, θα μεταβάλλουν τη μονάδα του άξονα χ΄χ σε π. Αναμένεται, αφού σχεδιάσουν τις γραφικές παραστάσεις, όπως στη Φάση 1, να βρουν τα κοινά σημεία τους με τους άξονες και να επιλέξουν να φαίνεται -όνομα και τιμή- για τα σημεία και τους τύπους των συναρτήσεων. Θα βλέπουν έτσι τη θέση μεγίστου ή ελαχίστου και το μέγιστο ή ελάχιστο, καθώς αλλάζει ο τύπος της συνάρτησης και για κάθε νέο μετασχηματισμό.

Μια πρώτη διαισθητική εκτίμηση της επίδρασης των συντελεστών του χ στις γραφικές παραστάσεις, αναμένουμε να έχουμε με την *ερώτηση 1 του Φύλλου εργασίας 2.*

Στη συνέχεια με καθοδήγηση του διδάσκοντα θα μετακινήσουν τις γραφικές παραστάσεις με χρήση του κουμπιού από την εργαλειοθήκη και επιλογή Μετακίνηση. Θα πειραματιστούν παρατηρώντας τις μεταβολές που υφίστανται οι εξισώσεις τους, η περίοδος και τα ακρότατά τους και θα επιδιώξουν να καταλήξουν σε κάποια πρώτα συμπεράσματα.

Στο σημείο αυτό, έχοντας καταλήξει σε συμπεράσματα με διαίσθηση και παρατήρηση θα επιχειρήσουν να απαντήσουν στις *ερωτήσεις 2, 3 και 4*. Θα εμφανίσουν ένα μεταβολέα h με το δρομέα, θα καθορίσουν τις ιδιότητές του, κάνοντας δεξί κλικ πάνω του και θα κατασκευάσουν τις παραμετρικές συναρτήσεις y=sinhx και y=coshx.

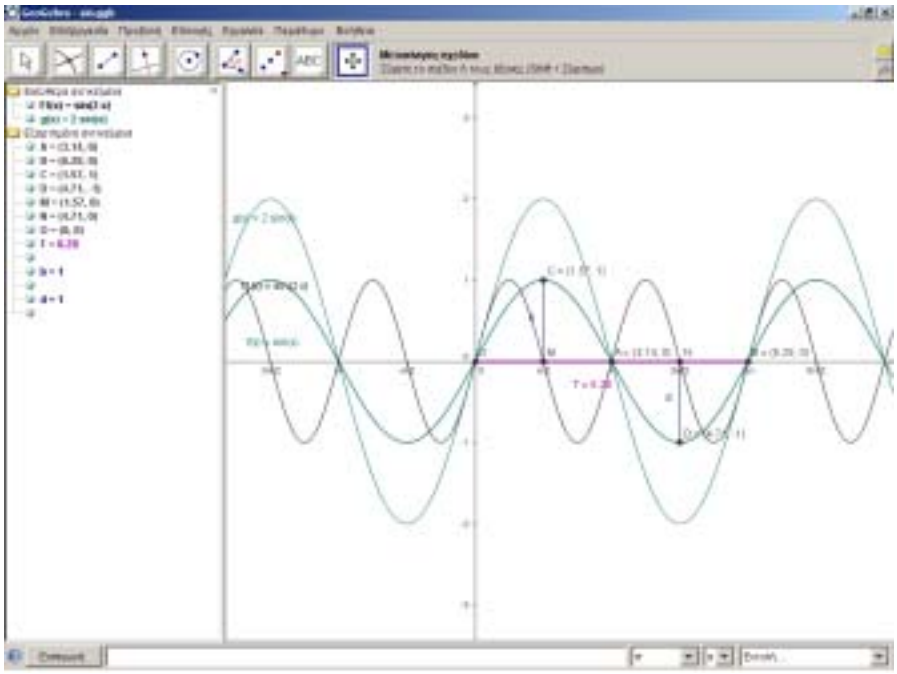
Στη συνέχεια θα αλλάξουν τις τιμές του μεταβολέα και θα συμπεράνουν για τις μεταβολές των γραφικών παραστάσεων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Για τις *ερωτήσεις 6 και 7* αναμένεται να εμφανίσουν δύο μεταβολείς r και h με το δρομέα και να ακολουθήσουν ανάλογη διαδικασία με τα προηγούμενα, ώστε να καταλήξουν σε συμπεράσματα με κίνηση των δρομέων, όπως φαίνεται στο στιγμιότυπο 6 παρακάτω. (π.χ. για να βρουν το μέγιστο, φέρνουν μεσοκάθετη του ευθ. τμήματος ΟΑ και βρίσκουν την τεταγμένη του σημείου τομής της με την γραφική παράσταση...)

Μέρος της εργασίας των μαθητών/-τριών που αναμένεται, φαίνεται στα στιγμιότυπα 3, 4, 5 και 6.

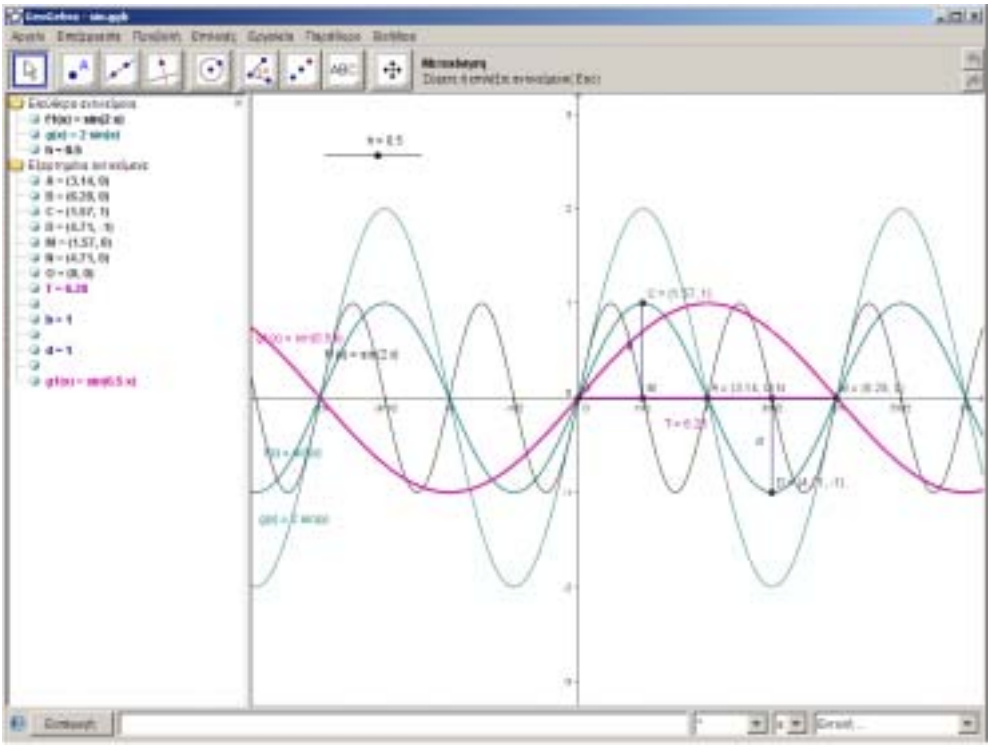
Στιγμιότυπο 3

Οι συναρτήσεις ψ=ημχ, ψ=ημ2χ, ψ=2ημχ



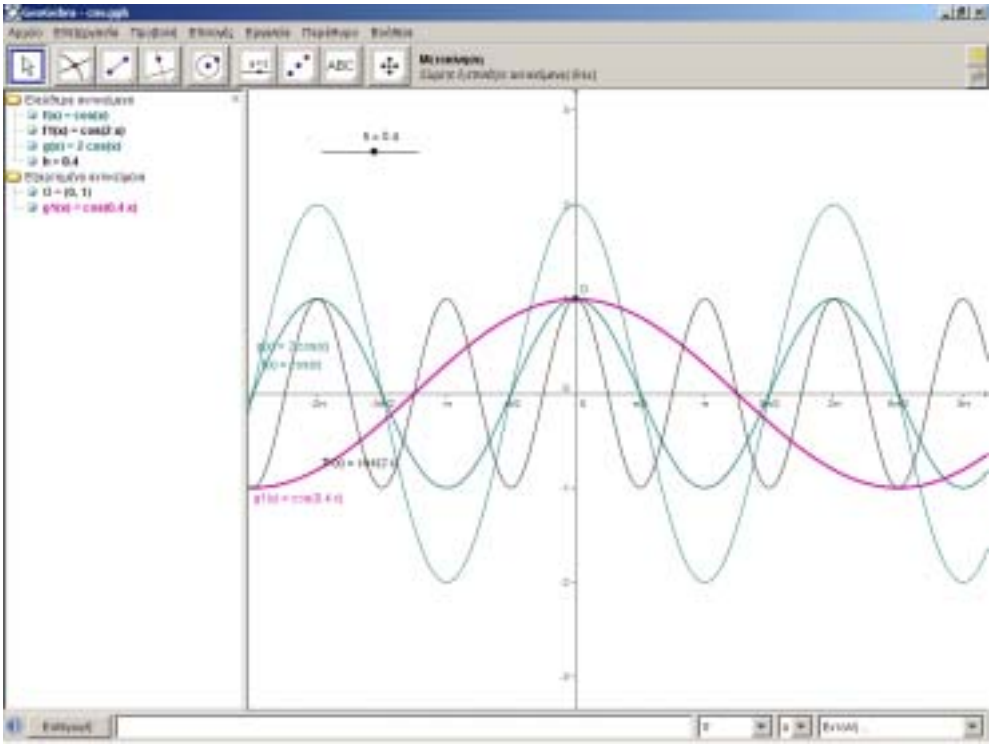
Στιγμιότυπο 4

Οι μεταβολές της ψ=ημωχ φαίνονται με την κίνηση του δρομέα h. (y=sinhx)

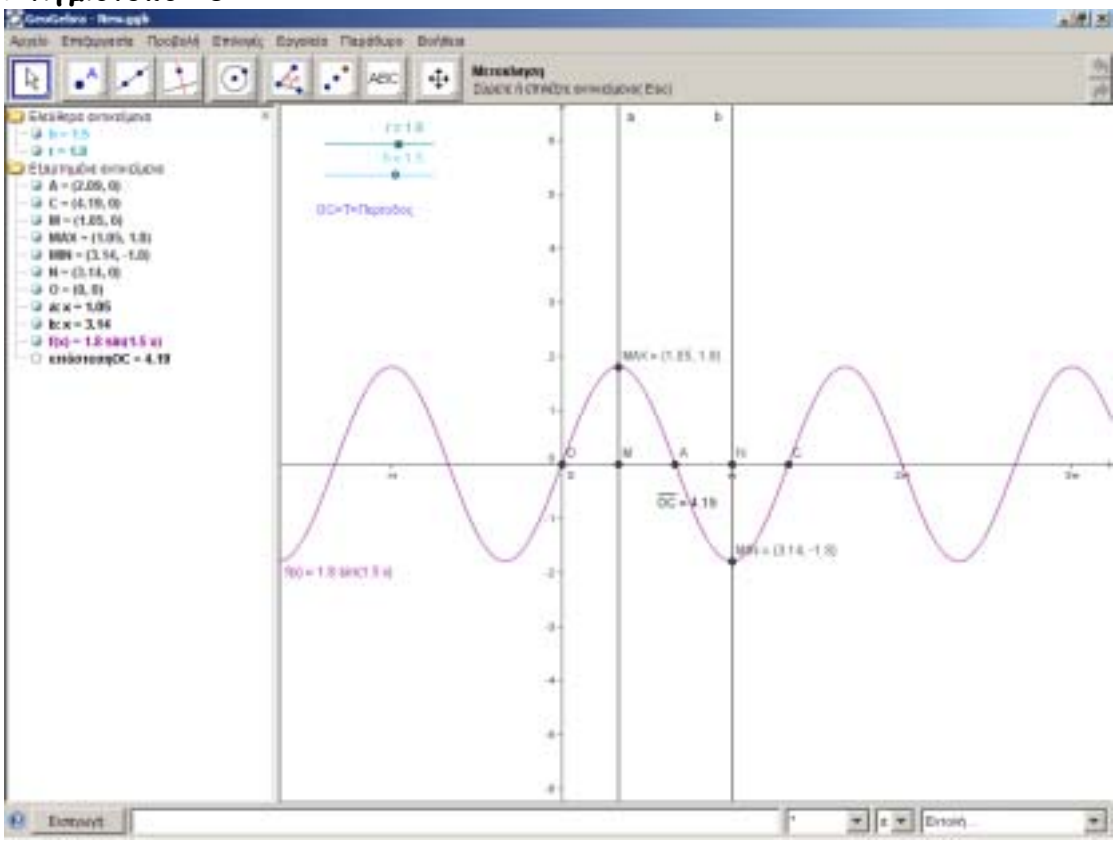


Στιγμιότυπο 5

Οι μεταβολές της ψ=συνωχ φαίνονται με την κίνηση του δρομέα h. (y=coshx)



Στιγμιότυπο 6



****

Περιγραφή υλοποίησης – νύξεις

Η αξιολόγηση της δραστηριότητας που θα ζητηθεί να γίνει από τους μαθητές/-τριες θα μας δώσει τη δυνατότητα διόρθωσης λαθών, παραλείψεων και ατελειών που πιθανότατα υπάρχουν στο σχεδιασμό της.

Κατ' αυτή την έννοια η αξιολόγηση θα αποτελέσει μια πηγή επανατροφοδότησης της διδασκαλίας και βελτίωσης τόσο του εκπαιδευτικού, όσο και της εκπαιδευτικής διαδικασίας.

Η αξιολόγηση, όπως προαναφέρθηκε, προτείνεται να γίνει μετά την ολοκλήρωση της όλης δραστηριότητας και να ακολουθεί τους εξής άξονες:

- Να είναι ανώνυμη από πλευράς των παιδιών, ώστε να υπάρχει δυνατότητα ελεύθερης έκφρασης.
- Να ζητηθεί να σχολιάσουν τις εντυπώσεις τους από το μάθημα, από την εργασία τους σε ομάδες, από τη διευκόλυνση ή όχι που τους παρείχε η χρήση των νέων τεχνολογιών στη διαδικασία της μάθησης και την κατανόηση εννοιών.
- Να σχολιάσουν κατά πόσο θα επιθυμούσαν επανάληψη παρόμοιας δραστηριότητας.
- Να κάνουν προτάσεις για βελτίωση και εξέλιξη της διαδικασίας.

****

Φύλλο Εργασίας 1

Διάρκεια: 2 διδακτικές ώρες

Συμβολισμός

ψ= ημχ → y=sin(x)

ψ= συνχ → y=cos(x)

Ερωτήσεις

1. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: ψ= ημχ και ψ= συνχ
   Υπάρχουν διαφορές και ομοιότητες μεταξύ τους;
   Αν ναι, να καταγράψετε τις παρατηρήσεις και τα συμπεράσματά σας.
2. Μπορείτε να ανακαλύψετε το Πεδίο Ορισμού και το Σύνολο Τιμών των συναρτήσεων, παρατηρώντας τη γραφική τους παράσταση;
   Αν ναι, μπορείτε να διατυπώσετε έναν κανόνα, που να περιγράφει τη διαδικασία που ακολουθήσατε;
3. Υπάρχει κάποιο υποσύνολο του $\Re$ στο οποίο ολοκληρώνονται οι μεταβολές της γραφικής παράστασης των παραπάνω συναρτήσεων; Είναι, δηλαδή, οι συναρτήσεις αυτές περιοδικές;
   Αν ναι, μπορείτε να βρείτε την περίοδό τους;
4. Προκύπτουν κάποιες συμμετρίες από τις γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων;
   Θα σας βοηθούσε, αν συμπληρώνατε τις σχέσεις:
   ημ(-χ) = ... και συν(-χ) = ...
   Στη συνέχεια να χαρακτηρίσετε τις συναρτήσεις ως άρτιες ή περιττές.
5. Συνοψίζοντας τα ερωτήματα που προηγήθηκαν, να συμπληρώσετε τον πίνακα:

	Εξίσωση	Πεδίο Ορισμού	Σύνολο Τιμών	Περίοδος	Μέγιστο	Ελάχιστο
1.	ψ= ημχ					
2.	ψ= συνχ					

****

****

Φύλλο Εργασίας 2

Διάρκεια: 3 ή 4 διδακτικές ώρες

Συμβολισμός

ψ= ημ(ωχ) → y= sin(hx)

ψ= συν(ωχ) → y= cos(hx)

ψ= ρημ(ωχ) → y=r*sin(hx)

ψ= ρσυν(ωχ) → y=r*cos(hx)

Ερωτήσεις

1. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
   ψ= ημ(2χ), ψ= ημ(χ/2) και ψ= συν(2χ), ψ= συν(χ/2).
   Να καταγράψετε τις παρατηρήσεις και τα συμπεράσματά σας.

2. Πως μεταβάλλεται η γραφική παράσταση της ψ= ημ(ωχ) και της ψ= συν(ωχ), όταν ο πραγματικός αριθμός ω παίρνει α) θετικές τιμές και β) αρνητικές τιμές;
3. Για ποια τιμή του ω$\in \Re$ η γραφική παράσταση της ψ= συν(ωχ) εκφυλίζεται σε ευθεία.
   (Υπόδειξη: Με το συμβολισμό y=sinhx για την ψ= ημ(ωχ) να παρατηρήσετε τις μεταβολές, κάνοντας χρήση του δρομέα για τη μεταβλητή h. Να εργαστείτε ανάλογα για την ψ= συν(ωχ)).
4. Τι συμβαίνει στην περίοδο των συναρτήσεων της ερώτησης 2, όταν ο πραγματικός αριθμός ω α) μεγαλώνει και β) μικραίνει;
5. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
   ψ= 2ημχ και ψ= 2συνχ.
   Να καταγράψετε τις παρατηρήσεις και τα συμπεράσματά σας.
6. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων της μορφής ψ= ρημ(ωχ) και ψ= ρσυν(ωχ) με τιμές της αρεσκείας σας για τους ρ, ω $\in \Re$.
7. Πως μεταβάλλεται η γραφική παράσταση των ψ= ρημ(ωχ) και ψ= ρσυν(ωχ) όταν το ω παραμένει σταθερό και ο πραγματικός αριθμός ρ:
   α) μεγαλώνει και β) μικραίνει;
8. Συνοψίζοντας τα ερωτήματα που προηγήθηκαν, να συμπληρώσετε τον πίνακα:

	Εξίσωση	Πεδίο Ορισμού	Σύνολο Τιμών	Περίοδος	Μέγιστο	Ελάχιστο
1.	ψ= ημ2χ					
2.	ψ= ημ(χ/2)					
3.	ψ= ημ(ωχ)					
4.	ψ= 2ημχ					
5.	ψ= ρημ(ωχ)					
6.	ψ= συν2χ					
7.	ψ= συν(χ/2)					
8.	ψ= συν(ωχ)					
9.	ψ= 2συνχ					
10.	ψ= ρσυν(ωχ)					

****

Βιβλιογραφία

1. Επιμορφωτικό υλικό για την εκπαίδευση των επιμορφωτών. Τεύχος 1: ΓΕΝΙΚΟ ΜΕΡΟΣ, ΙΤΥ,Πάτρα, Νοέμβριος 2007
2. Επιμορφωτικό υλικό για την εκπαίδευση των εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης. Τεύχος 4 Κλάδος ΠΕ03, ΕΙΔΙΚΟ ΜΕΡΟΣ, ΙΤΥ, Πάτρα, Μάιος 2008
3. Τουμάσης, Μπ. (1994) «Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών», Gutenberg, Αθήνα