

8. Ένας ελαιοπαραγωγός μάζεψε 500 κιλά ελιές και θέλει να τις βάλει σε σακιά που το καθένα χωράει 18 κιλά, ώστε να τις μεταφέρει στο ελαιοτριβείο. Να βρείτε:
- πόσα σακιά θα γεμίσει ο ελαιοπαραγωγός
 - πόσα κιλά ελιές θα περισσέψουν
 - πόσα σακιά θα χρειαστεί ο ελαιοπαραγωγός, ώστε να μεταφέρει όλες τις ελιές στο ελαιοτριβείο.
9. Ποιο μπορεί να είναι το υπόλοιπο μιας Ευκλείδειας διαίρεσης με διαιρέτη τον αριθμό 5.
10. Η ηλικία ενός ανθρώπου είναι 180 μήνες. Κάποιος ισχυρίζεται ότι είναι γέρος. Συμφωνείτε μαζί του;
11. Αν σήμερα είναι Πέμπτη, τι μέρα θα είναι μετά από 191 ημέρες.
12. Από την ισότητα $14 \cdot 12 = 168$ ποιες διαιρέσεις προκύπτουν;
13. i) Να γίνει η διαίρεση $910 : 65$.
ii) Μπορείτε να γράψετε το πηλίκο της διαίρεσης $910 : 14$ χωρίς να κάνετε αυτή τη διαίρεση; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
14. Στην παρέλαση της 28ης Οκτωβρίου θα παρελάσουν 168 μαθητές. Να βρείτε πόσες σειρές θα σχηματίσουν και πόσοι μαθητές θα περισσέψουν, αν τους διατάξουμε:
- σε τετράδες
 - σε πεντάδες
 - σε εξάδες.
15. Για τους φυσικούς αριθμούς a, β ισχύει ότι $a = 11 \cdot \beta + 17$.
- Να εξετάσετε αν το 17 είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του a δια 11.
 - Ποια είναι η μικρότερη τιμή του β ώστε το 17 να είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του a δια β .
16. Να βρείτε έναν αριθμό α οποίος:
- όταν διαιρεθεί με το 6 δίνει πηλίκο 15 και υπόλοιπο 3
 - όταν διαιρεθεί με το 12 δίνει πηλίκο 18 και υπόλοιπο 7
 - όταν διαιρεθεί με το 60 δίνει πηλίκο 2 και υπόλοιπο 24.

17. Σε μια Ευκλείδεια διαίρεση ένας φυσικός αριθμός ν διαιρείται με το 5 και δίνει πηλίκο 12.
- Αν η διαίρεση είναι τέλεια, να βρείτε τον αριθμό ν .
 - Ποια είναι τα δυνατά αποτελέσματα του υπολοίπου της διαίρεσης;
 - Αν το υπόλοιπο της παραπάνω διαίρεσης είναι 3, να βρείτε τον φυσικό αριθμό ν .
18. Το πηλίκο μιας διαίρεσης είναι 6 και το υπόλοιπο είναι 9.
- Να βρείτε τη μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει ο διαιρέτης.
 - Για την τιμή αυτή του διαιρέτη που βρήκατε στο ερώτημα i) να βρείτε τον διαιρετέο της παραπάνω διαίρεσης.
19. Το πηλίκο μιας διαίρεσης είναι 15 και ο διαιρέτης είναι 7.
- Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το υπόλοιπο.
 - Για την τιμή αυτή του υπολοίπου που βρήκατε στο ερώτημα i) να βρείτε τον διαιρετέο της παραπάνω διαίρεσης.
20. Η διαίρεση ενός φυσικού αριθμού Δ με τον φυσικό δ δίνει υπόλοιπο 2. Η διαίρεση του ίδιου φυσικού Δ με το 4 δίνει υπόλοιπο τον φυσικό δ .
- Να βρείτε την τιμή του αριθμού δ .
 - Να βρείτε τη μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει ο Δ .
21. Ο διαιρέτης σε μία διαίρεση είναι ο αριθμός 3 και το πηλίκο είναι ο αριθμός 8.
- Να βρείτε τις δυνατές τιμές του υπολοίπου ν .
 - Αν η διαίρεση δεν είναι τέλεια και το υπόλοιπο ν είναι περιττός αριθμός, να βρείτε τον διαιρετέο.

25. Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι πρώτοι και ποιοι είναι σύνθετος; 2, 10, 5, 20, 11, 16, 23, 32, 45, 33, 101.
26. Το γινόμενο ενός πρώτου αριθμού είναι πρώτος ή σύνθετος αριθμός και ποιος; Να γράψετε όλους τους διαφύτες του αριθμού 15. Ποιοι από αυτούς είναι πρώτοι και ποιοι είναι σύνθετοι;
27. Να γράψετε όλους τους διαφύτες του αριθμού 15. Ποιοι από αυτούς είναι πρώτοι και ποιοι είναι σύνθετοι;
28. Το γινόμενο δύο πρώτων αριθμών είναι πρώτος ή σύνθετος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
29. Δίνονται οι αριθμοί 2, 3, 6, 8, 11 και 55. Να βρείτε:
 i) ποιοι από τους παραπάνω αριθμούς είναι πρώτοι
 ii) ποιοι από τους παραπάνω αριθμούς είναι σύνθετοι
 iii) ποια ζεύγη των παραπάνω αριθμών είναι πρώτοι μεταξύ τους.
30. Δίνονται οι αριθμοί
 $A = 567$ και $B = 440$.
 i) Να ανωλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς A και B.
 ii) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί A και B είναι πρώτοι μεταξύ τους.
31. Να γράψετε τον αριθμό 24 σαν άθροισμα δύο πρώτων αριθμών.
32. Να βρείτε τον διηγήσιο αριθμό που διαιρείται συγχρόνως με το 2, 3, 5 και 9.
33. Να βρείτε τον μικρότερο φυσικό ο οποίος να διαιρείται με το 2 και το 5 συγχρόνως.
34. Με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας να δείξετε ότι οι αριθμοί $15 \cdot a - 3$ και $18 \cdot a + 21$ διαιρούνται με το 3.
35. Να βρείτε διηγήσιο ο οποίος έχει άθροισμα ψηφίων 12 και ένας από τους 4 διαφύτες του είναι ο 19.
36. Ένας αριθμός διαιρείται με το 9. Αν αλλάξουμε τις θέσεις των ψηφίων του θα διαιρείται πάλι με το 9;

1. Οι Φυσικοί Αριθμοί

37. i) Ποιο ψηφίο πρέπει να είναι το a ώστε ο αριθμός $4a1$ να διαιρείται με το 9.
 ii) Να ανωλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τον αριθμό $4a1$.
38. Ποιο ψηφίο πρέπει να είναι το a ώστε ο αριθμός $15a5$ να διαιρείται με το 25;
39. Ποιο ψηφίο πρέπει να είναι το a ώστε ο αριθμός $3859a$ να διαιρείται:
 i) με το 9 ii) με το 2 και το 5 συγχρόνως.
40. Να τοποθετήσετε στα κενά το κατάλληλο (ίδιο) ψηφίο ώστε ο αριθμός που θα προκύψει να διαιρείται συγχρόνως δια 2, 3, 5.
 $3 \square \square 5 \square 1 \square$
41. Να συμπληρώσετε το \square με το κατάλληλο ψηφίο ώστε ο αριθμός:
 i) $834 \square$ να διαιρείται με το 3
 ii) $703 \square$ να διαιρείται με το 2 και το 5.
 iii) $73 \square$ να διαιρείται με το 9
 iv) $92 \square$ να διαιρείται με το 2 αλλά όχι με το 4.
42. i) Να συμπληρώσετε τα κενά $5 \square 4 \square$, $90 \square$, $7 \square 3 \square$ ώστε οι αριθμοί που θα προκύψουν να διαιρούνται και με το 3 και με το 5.
 ii) Να δικαιολογήσετε ότι:
 α) οι αριθμοί της μορφής $18 \cdot a + 63$ διαιρούνται με το 9
 β) οι αριθμοί της μορφής $35 \cdot \beta + 60$ διαιρούνται με το 5.
43. Να γράψετε τα έξι πρώτα πολλαπλάσια του αριθμού 4.
44. Να αποδείξετε ότι:
 i) ο αριθμός $7 \cdot \alpha + 7 \cdot \beta$ είναι πολλαπλάσιο του 7.
 ii) ο αριθμός 9α είναι πολλαπλάσιο του 3.
 iii) ο αριθμός 5^3 είναι πολλαπλάσιο του 5.
45. Ποιοι αριθμοί ανήκουν στο 17 και το 43 είναι πολλαπλάσια του 2, του 3 και του 4 συγχρόνως;

45. Να βρείτε το ΕΚΠ των αριθμών:

- i) 5, 9
- ii) 6, 14
- iii) 12, 16
- iv) 2, 8, 12
- v) 12, 16, 24
- vi) 5, 15, 20

47. Δίνεται φυσικός αριθμός x ο οποίος είναι μεγαλύτερος του 27 και μικρότερος του 32. Να βρείτε τον x αν $ΕΚΠ(8, 20, x) = 120$.

48. Να γράψετε 3 ζεύγη φυσικών οι οποίοι να είναι πρώτοι μεταξύ τους. Να βρείτε το ΕΚΠ για κάθε ζεύγος. Τι παρατηρείτε;

49. Αν το ΕΚΠ των αριθμών 12, x είναι 36 να βρείτε τις δυνατές τιμές του φυσικού x :

50. Να βρείτε τον ΜΚΔ των αριθμών:
- i) 10, 40
 - ii) 15, 25
 - iii) 9, 24
 - iv) 12, 18, 36
 - v) 12, 20, 32
 - vi) 14, 28, 49.

51. Να βρείτε τον ΜΚΔ και το ΕΚΠ των παρακάτω αριθμών:

$$A = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 11$$
$$B = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13$$
$$\Gamma = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

52. Να βρείτε τον ΜΚΔ και το ΕΚΠ των αριθμών:

- i) 9, 27, 45
- ii) 12, 16, 20
- iii) 36, 54, 72
- iv) 20, 30, 40.

53. i) Να γράψετε τους διαιρέτες των αριθμών 15 και 30.
ii) Να βρείτε το ΜΚΔ των αριθμών αυτών. Τι παρατηρείτε;

54. Δύο φυσικοί αριθμοί έχουν ΜΚΔ το 20. Ποιοι είναι οι κοινοί διαιρέτες των αριθμών αυτών.

1. Οι Φυσικοί Αριθμοί

55. i) Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς 12, 18, 28.
ii) Να βρείτε το ΜΚΔ και το ΕΚΠ των αριθμών αυτών.

56. i) Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς 48, 72, 196.
ii) Να βρείτε το ΜΚΔ και το ΕΚΠ των αριθμών αυτών.

57. i) Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς 144, 252, 832.
ii) Να βρείτε το ΜΚΔ και το ΕΚΠ των αριθμών αυτών.

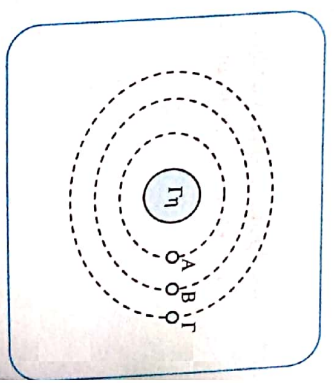
58. Δύο αριθμοί έχουν ΜΚΔ 6 και ΕΚΠ 36. Αν ο ένας είναι ο 12, να βρείτε τον άλλο.

59. Ένα βιβλίο χωρίζεται σε ενότητες που η κάθε μία έχει ακριβώς 18 σελίδες. Ο αριθμός των σελίδων του βιβλίου είναι πολλαπλάσιο του 16. Αν το βιβλίο έχει λιγότερες από 200 σελίδες, να βρείτε πόσες είναι οι σελίδες του βιβλίου.

60. Το πλήθος των σελίδων ενός βιβλίου βρίσκεται μεταξύ του 300 και του 450. Όταν μετράμε τις σελίδες του ανά 5 ή 6 ή 8 δεν περισσεύει καμία. Να βρείτε τον αριθμό των σελίδων του βιβλίου.

61. Τρία λεωφορεία με αφετηρία την ίδια πλατεία, εκτελούν τη συγκοινωνία σε 3 διαφορετικά σημεία της πόλης. Το πρώτο εκτελεί μια διαδρομή σε 18 min, το δεύτερο σε 24 min, το τρίτο σε 36 min. Αν στις 12 ακριβώς ξεκινήσουν μαζί, ύστερα από πόσο χρόνο θα ξεκινήσουν και πάλι μαζί και πόσες διαδρομές θα έχει κάνει το καθένα στον ενδιάμεσο χρόνο.

62. Τρεις τεχνητοί δορυφόροι περιστρέφονται γύρω από τη γη σε κυκλικές τροχιές διαφορετικών ακτίνων. Κάποια χρονική στιγμή βρίσκονται στα σημεία Α, Β, Γ τα οποία είναι συνευθειακά. Ο ένας κάνει έναν πλήρη κύκλο σε 12 ώρες, ο δεύτερος σε 18 ώρες και ο τρίτος σε 24 ώρες. Πόσες φορές μέσα στα επόμενα δέκα εικοστέτράωρα θα ξαναβρεθούν στα ίδια σημεία ταυτόχρονα; (Συνευστατικά ονομάζουμε τρία ή περισσότερα σημεία που βρίσκονται στην ίδια ευθεία).



63. Θέλουμε να συσκευάσουμε 150 πετσάδια, 90 στυλό και 60 γόμφες σε πακέτα, οποια να είναι τα ίδια και να περιέχουν και τα 3 είδη.
- Μπορεί να γίνουν 10 πακέτα δώρων; Αν ναι, πόσα αντικείμενα από κάθε είδος θα έχει κάθε πακέτο;
 - Πόσα πακέτα δώρων μπορεί να γίνουν με τον μικρότερο αριθμό από κάθε είδος;
64. Ένα κήφατο περιέχει μαρκαδόρους. Ποιος μπορεί να είναι ο αριθμός των μαρκαδόρων αν γνωρίζουμε ότι είναι μεγαλύτερος του 400, μικρότερος του 500 και απείρται ακριβώς με το 3 και 5, ενώ το ψηφίο των δεκάδων του είναι το 2.
65. Ένας περπατής έχει χρυσά και ασπρήνια νομίσματα. Τα χρυσά είναι λιγότερα από τα ασπρήνια. Τόσο ο αριθμός των χρυσών, όσο και ο αριθμός των ασπρήνιων νομισμάτων είναι διψήφιοι πρώτοι. Αν αντιστρέψουμε τα ψηφία των αριθμών αυτών, προκύπτουν αριθμοί που διαιρούνται με το 5. Πόσα χρυσά και πόσα ασπρήνια νομίσματα έχει ο περπατής;
66. Σε έναν πάπυρο μιας πραγματίας της Ανγύπτου βρέθηκε γραμμένος ο μικρότερος φυσικός αριθμός ο οποίος διαιρείται με όλους τους φυσικούς από το 1 μέχρι και το 10. Να βρείτε τον αριθμό αυτό.
67. Ο αριθμός των δέντρων ενός δάσους είναι τριψήφιος φυσικός, μικρότερος του 150. Αν τα δέντρα μετρηθούν ανά 3 ή 4 ή 5 ή 6 περισσεύουν πάντα 2. Πόσα είναι τα δέντρα;
68. Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς οι οποίοι είναι μεγαλύτεροι του 30 και μικρότεροι του 80 που όταν διαιρεθούν με το 3 και το 5 δίνουν υπόλοιπο 1.
69. Να βρείτε τριψήφιο αριθμό μικρότερο του 400, ο οποίος να είναι πολλαπλάσιο του 7, και αν διαιρεθεί με 2, 3, 4, 5, 6 αφήνει υπόλοιπο 1.

1. Οι Φυσικοί Αριθμοί

Διαγώνισμα 1

Θέμα 1ο

- Ποιοι φυσικοί αριθμοί ονομάζονται πρώτοι και ποιοι σύνθετοι; Να αναφερρετε τρία παραδείγματα για κάθε περίπτωση.
- Να γράψετε τους μονοψήφιους πρώτους αριθμούς και τους μονοψήφιους σύνθετους αριθμούς.

Θέμα 2ο

- Πότε ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με τους αριθμούς 2, 3, 5 και 9.
- Να συμπληρώσετε τα ψηφία του αριθμού 3 ___ 51 ___ ώστε να διαιρείται συγχρόνως με το 5 και το 9.

Θέμα 3ο

Να βρείτε τον ΜΚΔ και το ΕΚΠ των αριθμών 32, 48, 64.

Θέμα 4ο

- Να υπολογίσετε τις τιμές των αριθμών π , δ , ν όταν:

$$\pi = (4^2 - 3^2) : 7 + (5 \cdot 2 - 2^2)$$

$$\delta = (5^2 - 10 : 2) + 2(3^2 - 1^{2015})$$

$$\nu = 15 - 5 \cdot 2 + 10 : 5 - 3 \cdot 2.$$
- Να βρείτε τον διαιρετό Δ της Ευκλείδειας διαίρεσης $\Delta : \delta$, αν π είναι το πηλίκο, δ ο διαθέτης και ν το υπόλοιπο που βρήκαμε στο i) ερώτημα.

Θέμα 1ο

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).

- To 2 διαιρεί όλους τους φυσικούς αριθμούς.
- To 5 είναι πολλαπλάσιο και διαιρετός του 5.
- Δεν υπάρχει άρτιος αριθμός ο οποίος να είναι πρώτος.
- Η ισότητα $211 = 13 \cdot 15 + 16$ παριστάνει Ευκλείδεια διαίρεση.
- Ο αριθμός 6 είναι πρώτος.

Θέμα 2ο

Δίνονται οι φυσικοί αριθμοί 7, 3 και 4.

- Να γράψετε όλους τους διαφορετικούς διψήφιους αριθμούς που σχηματίζονται χρησιμοποιώντας τους παραπάνω φυσικούς, τον καθένα μία φορά.
- Να βρείτε ποιοι από τους παραπάνω αριθμούς του ερωτήματος i) είναι πρώτοι και ποιοι είναι σύνθετοι.

Θέμα 3ο

Δίνονται οι αριθμοί 4, 36, 13, 9 και 12.

- Να βρείτε τους διαιρετές καθενός από τους παραπάνω αριθμούς.
- Δύο από τους παραπάνω αριθμούς είναι πρώτοι μεταξύ τους χωρίς κανένα τους να είναι πρώτος. Να βρείτε ποιοι είναι αυτοί οι αριθμοί και να υπολογίσετε το ΕΚΠ τους.

Θέμα 4ο

Μία φυλακή οργάνωση συγκέντρωσε 96 πακέτα μακαρόνια, 72 κουτιά γάλα και 48 πακέτα ρύζι με σκοπό να τα μοιράσει στους άπορους μιας περιοχής. Να βρείτε πόσα το πολύ όμοια δέματα μπορεί να κατασκευάσει η οργάνωση, χωρίς να περισσέψουν κανένα από τα τρόφιμα που συγκεντρώθηκαν. Πόσα προϊόντα από κάθε είδος θα περιέχει κάθε δέμα;

Διαγώνισμα 3

Θέμα 1ο

- Τι ονομάζεται πολλαπλάσιο ενός φυσικού αριθμού a ;
- Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1932 είναι πολλαπλάσιο του 14.
- Το τριπλάσιο ενός πρώτου αριθμού είναι πρώτος ή σύνθετος αριθμός; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Θέμα 2ο

- Να βρείτε τους πρώτους αριθμούς ανάμεσα στο 10 και το 16 και να υπολογίσετε το άθροισμά τους, το οποίο ονομάζουμε α .
- Αν $\beta = \text{ΕΚΠ}(8, 32, 64)$ και $\gamma = \alpha + \beta - 8$, να υπολογίσετε τις τιμές των β και γ .
- Να βρείτε τον ΜΚΔ των αριθμών α, β, γ .

Θέμα 3ο

Ένας μαθητής σε μία διαίρεση με το 11 βρήκε πηλίκο 5 και υπόλοιπο 12.

- Έκανε σωστά τη διαίρεση ο μαθητής;
- Αν ο μαθητής δεν έκανε σωστά τη διαίρεση, να τον βοηθήσετε να τη διορθώσει.

Θέμα 4ο

Αν ισχύουν οι ισότητες

$$x = 20 - 3 \cdot 5 + 14 : 2$$

$$y = 26 - (18 - 5 \cdot 2) : 4$$

$$\omega = 4 \cdot x : y + 2 \cdot x - y : 3$$

να βρείτε:

- τις τιμές των αριθμών x, y και ω
- το ΕΚΠ (x, y, ω) .