Table of Contents

3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : Κατηγορηματική Λογική

Ενότητα 2.

Η Δομή Υποκείμενο - Κατηγόρημα

Ε ρ ω τ ή σ ε ι ς 2ης ενότητας

Ερώτηση 1

Τι ονομάζουμε υποκείμενο και τι κατηγόρημα σε μια πρόταση της φυσικής γλώσσας;

Απάντηση

- Το όνομα που αναφέρεται στην ατομικότητα καλείται υποκείμενο της πρότασης.
- Το μέρος της πρότασης δια του οποίου γίνεται η κατηγόρηση καλείται κατηγόρημα.

Ασκήσεις 2ης ενότητας

Άσκηση 1

Να εκφρασθούν συμβολικά οι ακόλουθες προτάσεις της φυσικής γλώσσας:

i. Ο Γιώργος είναι μαθητής του λυκείου
ii. Η Μαρία είναι μαθήτρια του λυκείου
iii. Ο Γιώργος γράφει ποιήματα
iv. Η Μαρία είναι ψηλή.

Απάντηση

Έστω Α η κατηγορηματική μεταβλητή : ….. είναι μαθητής/τρια , Β η κατηγορηματική μεταβλητή : …..γράφει ποιήματα και Γ η κατηγορηματική μεταβλητή : ….. είναι ψηλός/λη. Ας είναι γ η ατομική σταθερά : Γιώργος και μ : Μαρία . Τότε :

i. Α(γ)
ii. Α(μ)
iii. Β(γ)
iv. Γ(μ)

Ενότητα 3.

Πολυμελή Κατηγορήματα

Ε ρ ω τ ή σ ε ι ς 3ης ενότητας

Ερώτηση 1

Τι ονομάζουμε δυαδική σχέση;

Απάντηση

Μια έκφραση που παρουσιάζεται ως διαδοχή κενών ***και λέξεων που αποδίδουν*** κάποιον συσχετισμό μεταξύ των ατομικοτήτων, που τα ονόματά τους θα τεθούν στα κενά, ονομάζεται **πολυμελής σχέση**. Π.χ. «……..είναι συνάδελφος του/της……» .

Μια σχέση η οποία συντάσσεται με δύο κενά, όπως το παραπάνω παράδειγμα, δηλαδή συνδέει δυο ονόματα, καλείται **δυαδική (ή διμελής) σχέση**.

Ασκήσεις 3^{ης} ενότητας

Άσκηση 1

Να εκφρασθούν συμβολικά οι ακόλουθες προτάσεις της φυσικής γλώσσας:

i. Ο Γιώργος είναι σύζυγος της Μαρίας,
ii. Ο Γιώργος είναι ψηλότερος του Δημήτρη,
iii. Η Μαρία είναι παιδί του Κώστα και της Αγγελικής,
iv. Ο Γιώργος είναι παιδί του Νίκου και της Ουρανίας.

Απάντηση

Έστω Α η κατηγορηματική σχέση «…. Είναι σύζυγος της ….», Β η κατηγορηματική σχέση «…. Είναι ψηλότερος του/της ……..», Γ η κατηγορηματική σχέση «…είναι παιδί του …και της ….» τότε αν x, y, z είναι ατομικές μεταβλητές οι αντίστοιχοι κατηγορηματικοί τύποι θα είναι : A(x,y) , B(x,y), Γ(x,y,z). Αν τώρα γ, δ, μ, κ, α, ν, ο ατομικές σταθερές για το ονόματα Γιώργος, Δημήτρη, Μαρία, Κώστα, Αγγελική, Νίκου, Ουρανία τότε σε συμβολική γλώσσα οι προτάσεις θα είναι :

i. Α(γ, μ)
ii. Β(γ, δ)
iii. Γ(μ, κ, α)
iv. Γ(γ, ν ,ο)

Ενότητα 4.

Ποσοδείκτες

Ε ρ ω τ ή σ ε ι ς 4^{ης} ενότητας

Ερώτηση 1

Τι είναι ο υπαρκτικός και τι ο καθολικός ποσοδείκτης ;

Απάντηση

- Για να δηλώσουμε την έκφραση «υπάρχει τουλάχιστον ένα» έχει επιλεγεί το σύμβολο ∃ (κατοπτρικό κεφάλαιο Ε), το οποίο καλείται υπαρκτικός ποσοδείκτης.
- Για να δηλώσουμε την έκφραση "κάθε" επιλέγουμε το σύμβολο ∀ (ανεστραμμένο κεφαλαίο Α), το οποίο καλείται καθολικός ποσοδείκτης.

Ερώτηση 2

Πότε η εμφάνιση μιας μεταβλητής καλείται δεσμευμένη;

Απάντηση

Στις περιπτώσεις που η ατομική μεταβλητή , λόγου χάρη, y εμφανίζεται στις εκφράσεις της μορφής : $\forall y\ A(y)$ή $\exists y\ A(y)$ λέμε ότι η εμφάνιση της ατομικής μεταβλητής y στο A(y) είναι δεσμευμένη

Ασκήσεις 4ης ενότητας

Άσκηση 1

1. Να εκφρασθούν συμβολικά οι ακόλουθες προτάσεις της φυσικής γλώσσας,

i. Όλα έχουν βάρους.
ii. Κάτι έχει βάρος.
iii. Οτιδήποτε έχει βάρος.
iv. Υπάρχει κάτι που έχει βάρος.

Απάντηση

Αν για το κατηγόρημα «έχουν βάρος» χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο Α και σαν ατομική μεταβλητή το x, τότε οι παραπάνω προτάσεις είναι σε συμβολική γλώσσα :

i. $\forall x A(x)$
ii. $\exists x A(x)$
iii. $\forall x A(x)$
iv. $\exists x A(x)$

Ενότητα 5.

Ποσόδειξη σε οποιουσδήποτε Τύπους

Ασκήσεις 5ης ενότητας

Άσκηση 1

Να εκφραστούν συμβολικά οι ακόλουθες προτάσεις της φυσικής γλώσσας:

i. Κάθε φυτό έχει χλωροφύλλη.
ii. Μερικά φυτά έχουν χλωροφύλλη.
iii. Ουδείς πλανήτης είναι αυτόφωτος.
iv. Μερικοί πλανήτες δεν είναι αυτόφωτοι

Απάντηση

Αν για το κατηγόρημα «είναι φυτό» χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο Α, για το κατηγόρημα «έχει χλωροφύλλη» χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο Β, για το κατηγόρημα «είναι πλανήτης» χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο Γ, για το κατηγόρημα «είναι αυτόφωτος» χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο Δ, τότε οι παραπάνω προτάσεις είναι σε συμβολική γλώσσα είναι :

i. $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$
ii. $\exists x(A(x) \wedge B(x))$
iii. $\forall x(\Gamma(x) \rightarrow \neg \Delta(x))$
iv. $\exists x(\Gamma(x) \wedge \neg \Delta(x))$

Ενότητα 6.

Πολλαπλή Ποσόδειξη

Ασκήσεις 6ης ενότητας

Άσκηση 1

Να εκφρασθούν συμβολικά οι ακόλουθες προτάσεις της φυσικής γλώσσας:

i. Κάθε τι στηρίζεται κάπου.

ii. Υπάρχει κάτι μικρότερο από το κάθε τι.

iii. Κάθε τι είναι μικρότερο από κάτι.

iv. Κάτι στηρίζει το κάθε τι.

Απάντηση

Έστω A το διμελές κατηγόρημα (σχέση) «…στηρίζεται στο …», B το διμελές κατηγόρημα (σχέση) «…μικρότερο από το …», τότε οι παραπάνω προτάσεις είναι σε συμβολική γλώσσα οι ακόλουθες :

i. $\forall x \exists y A(x, y)$

ii. $\exists x \forall y B(x, y)$

iii. $\forall x \exists y B(x, y)$

iv. $\exists x \forall y A(x, y)$

Ενότητα 7.

Τύποι

Ασκήσεις 7ης ενότητας

Άσκηση 1

Να εξετάσετε αν οι ακόλουθες εκφράσεις είναι τύποι :

i. $\forall x B(x, x)$ Ναι
ii. $\exists x B(a, a)$ Όχι
iii. $B(a, a)$ Ναι
iv. $\forall x (A(y) \rightarrow B(a, y))$ Όχι
v. $\forall x \exists x A(x)$ Όχι
vi. $\exists x A(x) \rightarrow \forall y B(y, y)$ Ναι

Ενότητα 8.

Μεταφορά σε Συμβολική Γλώσσα *

Ασκήσεις 8ης ενότητας

Άσκηση 1

Να εκφρασθούν συμβολικά οι ακόλουθες προτάσεις της φυσικής γλώσσας:

i. Κάθε ένας αγαπάει κάποιον αλλά δεν υπάρχει κάποιος που τον αγαπούν όλοι
ii. Ουδέν είναι λευκό ή μαύρο. Υπάρχουν μόνον γκρι πράγματα.
iii. Ο Θεός βοηθάει όποιον βοηθάει τον εαυτό του. (Benzamin Franklin)
iv. Δεν υπάρχει καλός πόλεμος ή όχι καλή ειρήνη. (Benzamin Franklin)
v. Κάποιο κορίτσι αυτού του τμήματος είναι ψηλότερο από όλα τα αγόρια του τμήματος.
vi. Για κάθε σώμα υπάρχει ένα σώμα μικρότερο του.

Απάντηση

i. Έστω A το διμελές κατηγόρημα «….αγαπάει ….» τότε η πρόταση i) παραπάνω σε συμβολική γλώσσα γράφεται : $\forall x \exists y A(x, y) \wedge \neg \exists z \forall w A(w, z)$
ii. Η πρόταση ii) γράφεται και ως : «Δεν υπάρχει κάτι που είναι λευκό ή μαύρο. Κάθε τι είναι γκρι» Σε συμβολική γλώσσα : $\neg \exists x (\Lambda(x) \vee M(x)) \wedge (\forall y \Gamma(y))$. Όπου Λ : «… είναι λευκό.», Μ : «…. είναι μαύρο.» και Γ : «… είναι γκρι.»

iii. Έστω Β : «… βοηθάει τον …» και θ η ατομική σταθερά «Θεός», τότε η πρόταση «Ο Θεός βοηθάει όποιον βοηθάει τον εαυτό του.» σε συμβολική γλώσσα γράφεται :
$\forall x\big(B(x,x) \to B(\theta,x)\big)$

iv. Έστω Π : «… είναι πόλεμος.», Κ : «…. Είναι καλός.» και Ε : «…είναι ειρήνη.» », τότε η πρόταση «Δεν υπάρχει καλός πόλεμος ή όχι καλή ειρήνη» σε συμβολική γλώσσα γράφεται :
$\neg\Big(\exists x\big(K(x) \wedge \Pi(x)\big) \vee \exists y\big(\neg K(y) \wedge E(y)\big)\Big)$

v. Έστω Κ : «… είναι κορίτσι.», Α : «… είναι αγόρι.», Τ : «….ανήκει στο τμήμα» και Ψ : «… είναι ψηλότερος/η από ….»», τότε η πρόταση «Κάποιο κορίτσι αυτού του τμήματος είναι ψηλότερο από όλα τα αγόρια του τμήματος.» σε συμβολική γλώσσα γράφεται :
$\exists x\Big(\big(K(x) \wedge T(x)\big) \wedge \forall y\big(A(x) \wedge T(x) \to \Psi(x,y)\big)\Big)$

vi. Έστω Σ : «… είναι σώμα.» και Μ : «Το …. είναι μικρότερο του …» τότε η πρόταση : «Για κάθε σώμα υπάρχει ένα σώμα μικρότερο του.» σε συμβολική γλώσσα γράφεται :
$\forall x\Big(\Sigma(x) \to \exists y\big(\Sigma(y) \wedge M(y,x)\big)\Big)$

Ενότητα 9.

Παραδείγματα Τυποποίησης Προτάσεων της Φυσικής Γλώσσας και Επιχειρημάτων*

Ασκήσεις 9ης ενότητας

Άσκηση 1

Να εκφρασθούν συμβολικά τα ακόλουθα επιχειρήματα:

i. Κάθε τι είναι υλικό ή αφηρημένο.

Τα φαντάσματα δεν είναι υλικά.

Άρα τα φαντάσματα είναι αφηρημένα

ii. Κάθε τι ακριβό είναι πολύτιμο και σπάνιο.

Οτιδήποτε πολύτιμο είναι επιθυμητό.

Άρα, κάθε τι ακριβό ή πολύτιμο είναι επιθυμητό.

Απάντηση

i. Έστω Α : «…είναι υλικό», Υ : «…είναι αφηρημένο» και Σ : «… σπάνιο.» τότε το επιχείρημα γράφεται :

Κάθε τι είναι υλικό ή αφηρημένο.	$\forall x\big(\Upsilon(x) \wedge A(x)\big)$
Τα φαντάσματα δεν είναι υλικά.	$\forall x\big(\Phi(x) \to \neg Y(x)\big)$
Άρα τα φαντάσματα είναι αφηρημένα	$\forall x\big(\Phi(x) \to A(x)\big)$

ii. Έστω Α : «…είναι ακριβό.», Π : «…είναι πολύτιμο», Σ : «… είναι σπάνιο.» και Ε : «… είναι επιθυμητό» τότε το επιχείρημα γράφεται :

Κάθε τι ακριβό είναι πολύτιμο και σπάνιο.

Οτιδήποτε πολύτιμο είναι επιθυμητό.

Άρα, κάθε τι ακριβό ή πολύτιμο είναι επιθυμητό.

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\big(\mathrm{A}(x) \to \Pi(x) \land \Sigma(x)\big) \\ \forall x\big(\Pi(x) \to E(x)\big)\end{array}}{\forall x\big(A(x) \lor \Pi(x) \to E(x)\big)}$$