ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
9 Νοεμβρίου 2019

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-16)^5}{(-8)^5}+\frac{(-12)^5}{6^5}+1\right)\cdot\left(\frac{(-16)^3}{8^3}+\frac{(-12)^3}{(-6)^3}+2019\right).$$

Λύση
Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\left(\frac{(-16)^5}{(-8)^5}+\frac{(-12)^5}{6^5}+1\right)\cdot\left(\frac{(-16)^3}{8^3}+\frac{(-12)^3}{(-6)^3}+2019\right)\\&=\left(\left(\frac{-16}{-8}\right)^5+\left(\frac{-12}{6}\right)^5+1\right)\cdot\left(\left(\frac{-16}{8}\right)^3+\left(\frac{-12}{-6}\right)^3+2019\right)\\&=\left(2^5+(-2)^5+1\right)\cdot\left((-2)^3+2^3+2019\right)\\&=\left(2^5-2^5+1\right)\cdot\left(-2^3+2^3+2019\right)=1\cdot 2019=2019.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Ένας ταξιδιώτης έμεινε σε μία πόλη ένα τριήμερο. Την πρώτη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{3}$ των χρημάτων που είχε μαζί του. Τη δεύτερη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της πρώτης μέρας και την τρίτη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{5}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της δεύτερης μέρας. Αν στο τέλος της τρίτης μέρας του είχαν μείνει 240 ευρώ, να βρείτε πόσα χρήματα είχε μαζί του ο ταξιδιώτης στην αρχή της πρώτης μέρας.

Λύση (1ος τρόπος)
Έστω ότι ο ταξιδιώτης είχε μαζί του την πρώτη μέρα x ευρώ.

Τότε την πρώτη μέρα ξόδεψε $\frac{x}{3}$ ευρώ και του έμειναν $x-\frac{x}{3}=\frac{2x}{3}$ ευρώ. Τη δεύτερη μέρα ξόδεψε $\frac{2x}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{x}{6}$ ευρώ και του έμειναν $\frac{2x}{3}-\frac{x}{6}=\frac{3x}{6}=\frac{x}{2}$ ευρώ. Την τρίτη μέρα ξόδεψε $\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{x}{10}$ ευρώ και του έμειναν $\frac{x}{2}-\frac{x}{10}=\frac{4x}{10}=\frac{2x}{5}$ ευρώ.

Επομένως έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{2x}{5}=240 \Leftrightarrow \frac{2x}{5}=\frac{240}{1} \Leftrightarrow 2x=1200 \Leftrightarrow x=\frac{1200}{2} \Leftrightarrow x=600 \text{ ευρώ.}$$

2ος τρόπος (χωρίς εξίσωση)

Την πρώτη μέρα του μένουν τα $\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ μέρους των χρημάτων του.

Τη δεύτερη μέρα ξοδεύει το $\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$ μέρους των χρημάτων του και του μένει το $\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ μέρους των χρημάτων.

Την τρίτη μέρα ξοδεύει το $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$ μέρους των χρημάτων του και του μένουν τα $\frac{1}{2}-\frac{1}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ μέρους των χρημάτων που είναι 240€. Άρα το $\frac{1}{5}$ είναι $240:2=120$€, και επομένως τα χρήματα που είχε ήταν $120\cdot 5=600$€.

3ος τρόπος

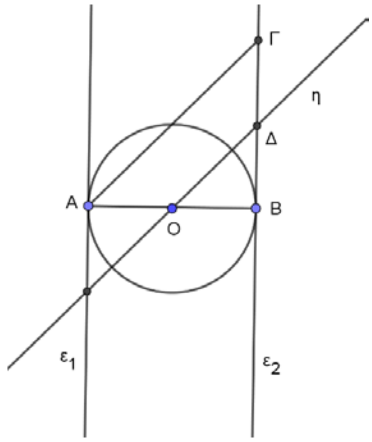
Επειδή την τρίτη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{5}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της δεύτερης μέρας, του απέμειναν τα $\frac{4}{5}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της δεύτερης μέρας που ήταν 240 ευρώ. Επομένως, με αναγωγή στη μονάδα βρίσκουμε ότι του είχαν μείνει στο τέλος της δεύτερης μέρας $240\cdot\frac{5}{4}=300$ ευρώ.

Επειδή την δεύτερη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει από την πρώτη μέρα, του απέμειναν τα $\frac{3}{4}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της πρώτης μέρας που ήταν 300 ευρώ. Επομένως, με αναγωγή στη μονάδα βρίσκουμε ότι του είχαν μείνει στο τέλος της πρώτης μέρας $300\cdot\frac{4}{3}=400$ ευρώ.

Επειδή την πρώτη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{3}$ των χρημάτων που είχε μαζί του, του απέμειναν τα $\frac{2}{3}$ των χρημάτων που του είχε μαζί του που ήταν 400 ευρώ. Επομένως, με αναγωγή στη μονάδα βρίσκουμε ότι είχε μαζί του στο ξεκίνημα της πρώτης μέρας $400\cdot\frac{3}{2}=600$ ευρώ.

Πρόβλημα 3

Δίνεται κύκλος με διάμετρο $ΑΒ$, κέντρο $Ο$ και οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που είναι κάθετες στα άκρα $Α$ και $Β$ της διαμέτρου $ΑΒ$. Στην ευθεία ε_2 παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα $ΒΓ$ ίσο με τη διάμετρο του κύκλου και στη συνέχεια σχεδιάζουμε την ευθεία η να διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και να είναι παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα $ΑΓ$. Η ευθεία η τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα $ΒΓ$ στο σημείο $Δ$.



(α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες και να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $ΑΒΓ$ και $ΟΒΔ$.

(β) Να αποδείξετε ότι το Δ είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος $ΒΓ$.

(γ) Να εξετάσετε το είδος του τετράπλευρου $ΑΟΔΓ$.

Λύση

(α) Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι μεταξύ τους παράλληλες, αφού είναι κάθετες στα άκρα $Α$ και $Β$ της διαμέτρου $ΑΒ$. Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές αφού $Α\hat{Β}Γ = 90^0$, $ΑΒ = ΒΓ$, επομένως οι γωνίες της βάσης του $ΑΓ$ είναι 45^0 η καθεμία. Στο τρίγωνο $ΟΔΒ$, έχουμε $Δ\hat{Β}Ο = 90^0$, $Δ\hat{Ο}Β = 45^0$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη με την $Γ\hat{Α}Ο = 45^0$ και $Ο\hat{Δ}Β = 45^0$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη με την $Α\hat{Γ}Β = 45^0$.

(β) Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι το τρίγωνο ΟΒΔ είναι ισοσκελές και από την υπόθεση $ΒΓ = ΑΒ$ έχουμε:

$$ΔΒ = ΟΒ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΒΓ}{2}.$$

Επομένως το Δ είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος $ΒΓ$.

(γ) Το τετράπλευρο $ΑΟΔΓ$ είναι τραπέζιο αφού οι πλευρές του $ΑΟ, ΓΔ$ τέμνονται στο σημείο $Β$ και οι πλευρές του $ΑΓ, ΟΔ$ είναι μεταξύ τους παράλληλες. Επίσης ισχύει $ΑΟ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΒΓ}{2} = ΓΔ$. Επομένως, το τετράπλευρο ΑΟΔΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Πρόβλημα 4

Χρησιμοποιώντας μία μόνο φορά καθέναν από τους ακέραιους από το 1 μέχρι και το 26 γράφουμε 13 κλάσματα. Πόσα το πολύ από αυτά τα κλάσματα μπορεί να είναι ίσα με ακέραιο αριθμό;

Λύση

Για να ισούται ένα κλάσμα με ακέραιο πρέπει ο παρονομαστής του να διαιρεί τον αριθμητή του. Από τους 26 δεδομένους ακέραιους πρώτοι, δηλαδή αυτοί που διαιρούνται μόνο με τον εαυτό τους και τη μονάδα, είναι οι 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. Οι 6 μικρότεροι από αυτούς, 2, 3, 5, 7, 11, 13, μπορούν να τοποθετηθούν ως παρονομαστές με αριθμητή πολλαπλάσιο τους, ώστε το κλάσμα να ισούται με ακέραιο. Από τους υπόλοιπους, δηλαδή το 17, 19, 23 ο ένας μπορεί να δημιουργήσει κλάσμα

με παρονομαστή το 1, δηλαδή ίσο με ακέραιο, έστω το $\frac{23}{1}=23.$ Με τους 17 και 19 θα γράψουμε υποχρεωτικά ένα κλάσμα που δεν είναι ακέραιος, οπότε ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός κλασμάτων που μπορούμε να γράψουμε ίσα με ακέραιους είναι 12.
Θα εξετάσουμε τώρα, αν είναι δυνατόν να γραφούν ακριβώς 12 τέτοια κλάσματα. Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής:

$\frac{26}{13},\frac{25}{5},\frac{23}{1},\frac{22}{11},\frac{21}{7},\frac{20}{10},\frac{18}{9},\frac{15}{3},\frac{14}{2}$ (υποχρεωτική επιλογή παρονομαστών)

$\frac{24}{8},\frac{16}{4},\frac{12}{6}$ (υπάρχει δυνατότητα αλλαγής των παρονομαστών).

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\left(\frac{(-32)^9}{4^9}+\frac{(-16)^9}{(-2)^9}\right)\cdot(-2019)^2+20\right)\cdot\left(\frac{(-10)^{10}}{2^{10}}-\left(-\frac{1}{5}\right)^{-10}+100\right).$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\mathrm{A}=\left(\left(\frac{(-32)^9}{4^9}+\frac{(-16)^9}{(-2)^9}\right)\cdot(-2019)^2+20\right)\cdot\left(\frac{(-10)^{10}}{2^{10}}-\left(-\frac{1}{5}\right)^{-10}+100\right)$$

$$=\left(\left(\left(\frac{-32}{4}\right)^9+\left(\frac{-16}{-2}\right)^9\right)\cdot(-2019)^2+20\right)\cdot\left(\left(\frac{-10}{2}\right)^{10}-(-5)^{10}+100\right)$$

$$=\left(\left((-8)^9+(+8)^9\right)\cdot(-2019)^2+20\right)\cdot\left((-5)^{10}-(-5)^{10}+100\right)$$

$$=\left(\left(-8^9+8^9\right)\cdot(-2019)^2+20\right)\cdot(0+100)=\left(0\cdot(-2019)^2+20\right)\cdot(+100)=20\cdot100=2000.$$

Πρόβλημα 2

Σε ένα τηλεοπτικό παιγνίδι ο Γιώργος πριν την τελική φάση του παιγνιδιού έχει κερδίσει 600 ευρώ. Στην τελική φάση πρέπει να απαντήσει σε 12 ερωτήσεις. Για κάθε σωστή απάντηση κερδίζει 80 ευρώ, ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση χάνει 40 ευρώ. Αν ο Γιώργος κέρδισε τελικά 1320 ευρώ, να βρείτε σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά.

Λύση

Έστω ότι ο Γιώργος απάντησε σωστά σε x ερωτήσεις. Τότε δεν απάντησε σωστά σε $12-x$ ερωτήσεις, οπότε το τελικό κέρδος του, έστω K, θα είναι:

$$\mathrm{K}=600+80x-40(12-x)\Leftrightarrow \mathrm{K}=600+80x-480+40x\Leftrightarrow \mathrm{K}=120+120x.$$

Επομένως, για την εύρεση του x πρέπει να λύσουμε την εξίσωση:

$$120+120x=1320\Leftrightarrow 120x=1320-120\Leftrightarrow 120x=1200\Leftrightarrow x=10.$$

Πρόβλημα 3

(α) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{2020}{2019}, \frac{2021}{2020}, \frac{2022}{2021}, \frac{3020}{3019}, \frac{3021}{3020}, \frac{3022}{3021},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό.

(β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{4020}{4021}, \frac{4021}{4022}, \frac{4022}{4023}, \frac{5020}{5021}, \frac{5021}{5022}, \frac{5022}{5023},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό.

Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας και στα δύο ερωτήματα.

Λύση.

(α) Το κοινό χαρακτηριστικό των έξι κλασμάτων είναι το ότι ο αριθμητής τους είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή τους κατά 1. Όλα είναι της μορφής $\frac{\nu+1}{\nu} = 1 + \frac{1}{\nu}$, οπότε σε σύγκριση δύο τέτοιων κλασμάτων $\frac{\mu+1}{\mu}, \frac{\nu+1}{\nu}$ έχουμε:

$$\frac{\mu+1}{\mu} > \frac{\nu+1}{\nu} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{\mu} > 1+\frac{1}{\nu} \Leftrightarrow \frac{1}{\mu} > \frac{1}{\nu} \Leftrightarrow \mu < \nu .$$

Επομένως μεγαλύτερο από τα δεδομένα κλάσματα είναι το κλάσμα που έχει το μικρότερο παρονομαστή, δηλαδή το $\frac{2020}{2019}$, και μικρότερο είναι αυτό που έχει το μεγαλύτερο παρονομαστή, δηλαδή το $\frac{3022}{3021}$.

2ος τρόπος

Παρατηρούμε ότι τα κλάσματα γράφονται ως:

$$\frac{2020}{2019} = 1 + \frac{1}{2019} = 1\frac{1}{2019}$$

$$\frac{2021}{2020} = 1 + \frac{1}{2020} = 1\frac{1}{2020}$$

.

.

.

$$\frac{3022}{3021} = 1 + \frac{1}{3021} = 1\frac{1}{3021}$$

Όμως $\frac{1}{2019} > \frac{1}{2020} > \cdots > \frac{1}{3021}$, οπότε μεγαλύτερο κλάσμα το πρώτο, δηλαδή το $\frac{2020}{2019}$, και μικρότερο το τελευταίο, δηλαδή το $\frac{3022}{3021}$.

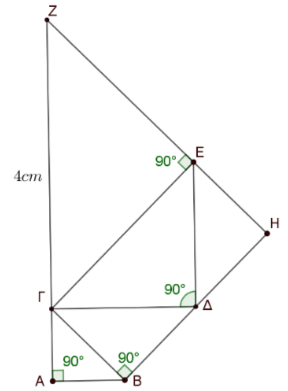
(β) Παρατηρούμε ότι τα αντίστροφα των δεδομένων κλασμάτων

$$\frac{4021}{4020}, \frac{4022}{4021}, \frac{4023}{4022}, \frac{5021}{5020}, \frac{5022}{5021}, \frac{5023}{5022},$$

είναι της ιδίας μορφής με αυτά του ερωτήματος (α). Σύμφωνα με το ερώτημα (α) συμπεραίνουμε ότι μεγαλύτερο κλάσμα είναι το πρώτο και μικρότερο το τελευταίο. Επομένως, για τα αντίστροφα τους το συμπέρασμα είναι ότι μεγαλύτερο είναι το τελευταίο, δηλαδή το $\frac{5023}{5022}$, και μικρότερο το πρώτο, δηλαδή το $\frac{4021}{4020}$.

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}, \mathrm{\Delta\hat{B}\Gamma}, \mathrm{E\hat{\Delta}\Gamma}$ και $\mathrm{Z\hat{E}\Gamma}$ είναι ορθές. Δίνεται ακόμη ότι: $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$, $\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{B\Delta}$, $\mathrm{\Delta\Gamma} = \mathrm{\Delta E}$, $\mathrm{E\Gamma} = \mathrm{EZ}$ και $\mathrm{\Gamma Z} = 4\ cm$.
Στο σημείο Η τέμνονται οι ευθείες ΒΔ και ΖΕ.



(α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΒ.
(β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Γ και Ζ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.
(γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΒΓΕΗ.

Λύση

(α) Αν $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma} = x$, τότε από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε ότι:

$$\mathrm{B\Gamma}^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \Rightarrow \mathrm{B\Gamma} = x\sqrt{2} = \mathrm{B\Delta}.$$

Από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΓΒΔ με το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε ότι:

$$\mathrm{\Gamma\Delta}^2 = \left(x\sqrt{2}\right)^2 + \left(x\sqrt{2}\right)^2 = 4x^2 \Rightarrow \mathrm{\Gamma\Delta} = 2x = \mathrm{\Delta E}.$$

Από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΓΔΕ με το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε ότι:

$$\mathrm{\Gamma E}^2 = (2x)^2 + (2x)^2 = 8x^2 \Rightarrow \mathrm{\Gamma E} = 2\sqrt{2}x = \mathrm{EZ}.$$

Από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΓΕΖ με το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε ότι:

$$\mathrm{\Gamma Z}^2 = \left(2\sqrt{2}x\right)^2 + \left(2\sqrt{2}x\right)^2 = 16x^2 \Rightarrow \mathrm{\Gamma Z} = 4x,$$

οπότε $\mathrm{\Gamma Z} = 4x = 4 \Rightarrow x = 1\ cm.$

(β) Επειδή τα τρίγωνα $\mathrm{BA\Gamma}, \mathrm{\Delta B\Gamma}, \mathrm{E\Delta\Gamma}$ και $\mathrm{ZE\Gamma}$ είναι ορθογώνια ισοσκελή οι οξείες γωνίες τους είναι ίσες με $\frac{180^0 - 90^0}{2} = 45^0$. Επομένως, έχουμε:

$$\mathrm{A\hat{\Gamma}Z} = \mathrm{A\hat{\Gamma}B} + \mathrm{B\hat{\Gamma}\Delta} + \mathrm{\Delta\hat{\Gamma}E} + \mathrm{E\hat{\Gamma}Z} = 4 \cdot 45^0 = 180^0,$$

οπότε τα σημεία Α, Γ και Ζ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

(γ) Το τετράπλευρο ΒΓΕΗ έχει τρεις γωνίες του ορθές, αφού $\mathrm{\Gamma\hat{B}\Delta} = 90^0$, $\mathrm{B\hat{\Gamma}E} = \mathrm{B\hat{\Gamma}\Delta} + \mathrm{\Gamma\hat{\Delta}E} = 45^0 + 45^0 = 90^0$ και $\mathrm{\Gamma\hat{E}H} = 180^0 - \mathrm{\Gamma\hat{E}Z} = 180^0 - 90^0 = 90^0$. Επομένως και η τέταρτη γωνία του θα είναι ορθή, οπότε αυτό είναι ορθογώνιο και έχει εμβαδό

$$\mathrm{E}_{(\mathrm{B\Gamma EH})} = \mathrm{B\Gamma} \cdot \mathrm{\Gamma E} = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4\ cm^2.$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Οι αριθμοί α, β είναι θετικοί και τέτοιοι ώστε

$$10\left(\alpha^2+\beta^2\right)=29\alpha\beta \qquad \text{και} \qquad \alpha+\beta=7.$$

Να υπολογίσετε την τιμή των αθροισμάτων $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ και $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$.

Λύση

Από την ταυτότητα $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$ και τις σχέσεις

$$10\left(\alpha^2+\beta^2\right)=29\alpha\beta \qquad \text{και} \qquad \alpha+\beta=7.$$

παίρνουμε ότι:

$$10\left[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right]=29\alpha\beta \Rightarrow 10(\alpha+\beta)^2-20\alpha\beta=29\alpha\beta$$

$$\Rightarrow 10(\alpha+\beta)^2=49\alpha\beta \overset{\alpha+\beta=7}{\Rightarrow} \alpha\beta=\frac{10(\alpha+\beta)^2}{49}=\frac{10\cdot 7^2}{49}\Rightarrow \alpha\beta=10.$$

Έτσι έχουμε:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{7}{10} \quad \text{και}$$

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)^2-\frac{2}{\alpha\beta}=\left(\frac{7}{10}\right)^2-\frac{2}{10}=\frac{49}{100}-\frac{2}{10}=\frac{29}{100}.$$

Διαφορετικά, αφού πρώτα βρούμε ότι $\alpha\beta=10$ μπορούμε να προχωρήσουμε ως εξής: Από την εξίσωση $\alpha+\beta=7$ έχουμε ότι $\beta=7-\alpha$, οπότε με αντικατάσταση του β στην εξίσωση $\alpha\beta=10$ έχουμε:

$$\alpha(7-\alpha)=10 \Leftrightarrow 7\alpha-\alpha^2=10 \Leftrightarrow \alpha^2-7\alpha+10=0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta=9$ και ρίζες $\alpha=\dfrac{7\pm 3}{2} \Leftrightarrow \alpha=5$ ή $\alpha=2$, οπότε έχουμε: $(\alpha,\beta)=(5,2)$ ή $(\alpha,\beta)=(2,5)$. Με αντικατάσταση βρίσκουμε άμεσα και από τα δύο ζεύγη: $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{7}{10}$ και $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}=\dfrac{29}{100}$.

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{3019}{3020}, \frac{3020}{3021}, \frac{3021}{3022}, \frac{4019}{4020}, \frac{4020}{4021}, \frac{4021}{4022},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Λύση

Το κοινό χαρακτηριστικό των έξι κλασμάτων είναι το ότι ο παρονομαστής τους είναι μεγαλύτερος από τον αριθμητή τους κατά 1. Όλα είναι της μορφής

$$\frac{\nu}{\nu+1}=\frac{\nu+1-1}{\nu+1}=1-\frac{1}{\nu+1},$$

οπότε σε σύγκριση δύο τέτοιων κλασμάτων $\frac{\mu}{\mu+1}, \frac{\nu}{\nu+1}$ έχουμε:

$$\frac{\mu}{\mu+1}>\frac{\nu}{\nu+1}\Leftrightarrow 1-\frac{1}{\mu+1}>1-\frac{1}{\nu+1}\Leftrightarrow -\frac{1}{\mu+1}>-\frac{1}{\nu+1}\Leftrightarrow \frac{1}{\mu+1}<\frac{1}{\nu+1}\Leftrightarrow \mu>\nu .$$

Επομένως μεγαλύτερο από τα δεδομένα κλάσματα είναι το κλάσμα που έχει το μεγαλύτερο αριθμητή, δηλαδή το $\frac{4021}{4022}$, και μικρότερο είναι αυτό που έχει το μικρότερο αριθμητή, , δηλαδή το $\frac{3019}{3020}$.

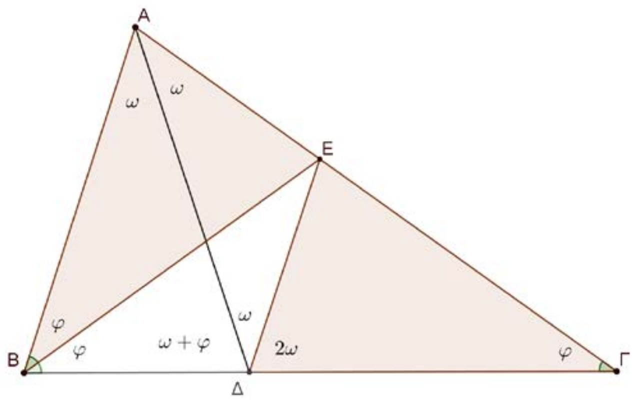
Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο ώστε $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}=2\cdot \mathrm{B\hat{\Gamma}A}$. Η διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ έτσι ώστε $\mathrm{AB}=\Delta\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}$ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε.

(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΓΕ είναι ίσα.

(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$.

Λύση



Σχήμα 3

Έστω ότι $\hat{\mathrm{A}}=\mathrm{B\hat{A}\Gamma}=2\omega$, $\hat{\Gamma}=\mathrm{B\hat{\Gamma}A}=\varphi$, οπότε θα είναι $\hat{\mathrm{B}}=\mathrm{A\hat{B}\Gamma}=2\varphi$.

(α) Από την υπόθεση έχουμε $\mathrm{E\hat{B}\Gamma}=\frac{\mathrm{A\hat{B}\Gamma}}{2}=\mathrm{B\hat{\Gamma}E}$, οπότε το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{BE}=\mathrm{E\Gamma}$. Επιπλέον $\mathrm{A\hat{B}E}=\frac{\mathrm{A\hat{B}\Gamma}}{2}=\mathrm{B\hat{\Gamma}E}$ και από την υπόθεση $\mathrm{AB}=\Delta\Gamma$. Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΓΕ είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες των πλευρών αυτών ίσες.

(β) Από το ερώτημα (α) προκύπτουν τα εξής:

- $\mathrm{E\hat{\Delta}\Gamma}=\mathrm{B\hat{A}E}=\hat{\mathrm{A}}=2\omega$
- $\mathrm{AE}=\mathrm{E\Delta}\Rightarrow$ το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές $\Rightarrow \mathrm{A\Delta E}=\Delta\mathrm{AE}=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}=\omega=\mathrm{B\hat{A}\Delta}$.

Επομένως οι ευθείες ΑΒ και ΔΕ είναι παράλληλες, γιατί τεμνόμενες από την ΑΔ σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Επομένως θα έχουν και

$$E\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{B}\Delta \Rightarrow 2\omega = 2\varphi \Rightarrow \omega = \varphi,$$

οπότε έχουμε

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^0 \Rightarrow 2\omega + 2\varphi + \varphi = 180^0 \Rightarrow 5\omega = 180^0 \Rightarrow \omega = 36^0.$$

Άρα είναι $B\hat{A}\Gamma = 2\omega = 72^0$.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τις τιμές του ακέραιου αριθμού α για τις οποίες ο ρητός αριθμός $A = \dfrac{\left(\alpha^2 - 1\right)^3}{\left(\alpha - 1\right)^4}$ είναι ακέραιος.

Λύση

Για $\alpha \neq 1$, έχουμε

$$A = \frac{\left(\alpha^2 - 1\right)^3}{\left(\alpha - 1\right)^4} = \frac{\left(\alpha - 1\right)^3 \left(\alpha + 1\right)^3}{\left(\alpha - 1\right)^4} = \frac{\left(\alpha + 1\right)^3}{\alpha - 1}.$$

Αν τώρα θέσουμε $\alpha - 1 = x$, τότε έχουμε $\alpha + 1 = x + 2$ και

$$A = \frac{\left(x + 2\right)^3}{x} = \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x} = x^2 + 6x + 12 + \frac{8}{x}.$$

Επομένως, ο ρητός αριθμός A είναι ακέραιος, αν και μόνον αν,

$$\frac{8}{x} = \frac{8}{\alpha - 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left(\alpha - 1\right) \text{ είναι διαιρέτης του } 8$$

$$\Leftrightarrow \alpha - 1 \in \left\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\right\}$$

$$\Leftrightarrow \alpha \in \left\{2, 3, 5, 9.0, -1, -3, -7\right\}.$$

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Οι αριθμοί α, β είναι θετικοί και τέτοιοι ώστε

$$\alpha^2 + \beta^2 = 16\alpha\beta \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \alpha^3 + \beta^3 = 90\alpha\beta.$$

Να υπολογίσετε την τιμή των αθροισμάτων $\alpha + \beta$ και $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}$.

Λύση

Από τις ταυτότητες

$$\left(\alpha + \beta\right)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \text{ και } \alpha^3 + \beta^3 = \left(\alpha + \beta\right)\left(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta\right)$$

και τις σχέσεις $\alpha^3 + \beta^3 = 90\alpha\beta$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 15\alpha\beta$ παίρνουμε ότι:

$$\left(\alpha + \beta\right)\left(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta\right) = 90\alpha\beta \overset{\alpha^2 + \beta^2 = 16\alpha\beta}{\Rightarrow} \left(\alpha + \beta\right)\left(16\alpha\beta - \alpha\beta\right) = 90\alpha\beta$$

$$\Rightarrow \left(\alpha + \beta\right) \cdot 15\alpha\beta = 90\alpha\beta \overset{\alpha\beta \neq 0}{\Rightarrow} \alpha + \beta = 6.$$

Επιπλέον, έχουμε

$$\alpha^2+\beta^2=16\alpha\beta \Rightarrow (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=16\alpha\beta$$

$$\Rightarrow 18\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2 \Rightarrow \alpha\beta=\frac{(\alpha+\beta)^2}{18}=\frac{6^2}{18}=2,$$

οπότε θα είναι: $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{6}{2}=3$.

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα: $\left\{\begin{array}{c} xy^3=-8 \\ (x+y)y=2 \end{array}\right\}$.

Λύση (1ος τρόπος)

Πρέπει $xy\neq 0$, αφού διαφορετικά δεν μπορεί να αληθεύει το σύστημα, το οποίο γράφεται:

$$\left\{\begin{array}{c} xy^3=-8 \\ (x+y)y=2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} xy\cdot y^2=-8 \\ xy+y^2=2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} (2-y^2)\cdot y^2=-8 \\ xy=2-y^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y^4-2y^2-8=0 \\ x=\dfrac{2-y^2}{y} \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y^2=\dfrac{2\pm\sqrt{36}}{2} \\ x=\dfrac{2-y^2}{y} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y^2=\dfrac{2\pm 6}{2} \\ x=\dfrac{2-y^2}{y} \end{array}\right\} \overset{y^2\geq 0}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{c} y^2=4 \\ x=\dfrac{2-y^2}{y} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y=2 \\ x=-1 \end{array}\right\} \text{ή} \left\{\begin{array}{c} y=-2 \\ x=1 \end{array}\right\}.$$

2ος τρόπος

Πρέπει $xy\neq 0$, αφού διαφορετικά δεν μπορεί να αληθεύει το σύστημα, το οποίο γράφεται:

$$\left\{\begin{array}{c} xy^3=-8 \\ (x+y)y=2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} xy\cdot y^2=-8 \\ xy+y^2=2 \end{array}\right\}.$$

Αν θέσουμε: $xy=\varphi,\ y^2=\omega>0$, τότε με αγνώστους φ και ω προκύπτει το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} \varphi\omega=-8 \\ \varphi+\omega=2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \varphi\omega=-8 \\ \omega=2-\varphi \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \varphi(2-\varphi)=-8 \\ \omega=2-\varphi \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \varphi^2-2\varphi-8=0 \\ \omega=2-\varphi \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \varphi=\dfrac{2\pm\sqrt{36}}{2} \\ \omega=2-\varphi \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \varphi=\dfrac{2\pm 6}{2} \\ \omega=2-\varphi \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \varphi=4 \text{ ή } \varphi=-2 \\ \omega=2-\varphi \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} (\varphi,\omega)=(4,-2) \\ \text{ή} \\ (\varphi,\omega)=(-2,4) \end{array}\right\}.$$

Επειδή πρέπει $\omega=y^2>0$, δεκτή είναι μόνο η λύση $(\varphi,\omega)=(-2,4)$, οπότε οι τιμές των x,y θα βρεθούν από το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} xy=-2 \\ y^2=4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} xy=-2 \\ y=2 \text{ ή } y=-2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow (x,y)=(-1,\ 2) \text{ ή } (x,y)=(1,-2).$$

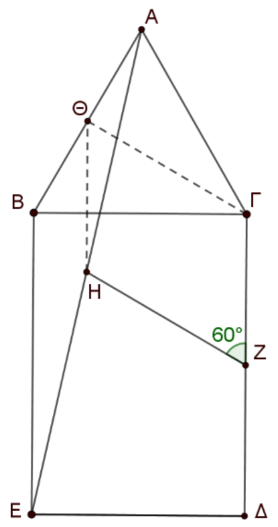
Πρόβλημα 3

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει η κορυφή Α κατασκευάζουμε ορθογώνιο ΒΓΔΕ. Αν Η είναι το μέσο του ΑΕ και Ζ είναι το μέσο του ΓΔ, να αποδείξετε οι ευθείες ΑΒ και ΖΗ είναι κάθετες και να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\Gamma\hat{Z}H$.

Λύση

Έστω Θ το μέσο της πλευράς ΑΒ. Τότε στο τρίγωνο ΑΒΕ η ΘΗ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του, οπότε είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΕ και ίση με το μισό της, δηλαδή $\text{ΘΗ} = \frac{\text{ΒΕ}}{2}$. Επειδή το τετράπλευρο ΒΓΔΕ είναι ορθογώνιο, έχει ίσες τις απέναντι πλευρές του, οπότε $\text{ΒΕ} = \text{ΓΔ}$. Επομένως τα ευθύγραμμα τμήματα ΘΗ και ΓΖ είναι ίσα και παράλληλα, οπότε το τετράπλευρο ΓΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο. Τότε θα είναι και $\text{ΖΗ} \parallel \text{ΓΘ}$. Όμως η ΓΘ είναι κάθετη προς τη ΑΒ (ως διάμεσος του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ είναι και ύψος), οπότε θα είναι και $\text{ΖΗ} \perp \text{ΑΒ}$.

Επιπλέον οι γωνίες $\text{Γ}\hat{\text{Ζ}}\text{Η}$ και $\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Γ}$ είναι οξείες και έχουν πλευρές ανά δύο κάθετες, οπότε είναι ίσες, δηλαδή $\text{Γ}\hat{\text{Ζ}}\text{Η} = \text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Γ} = 60^0$.



Σχήμα 4

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R} - \{3\}$ για τις οποίες οι λύσεις της εξίσωσης

$$(\lambda - 3)x^2 + (\lambda^2 + 1)x - (11\lambda - 18) = 0$$

είναι τα μήκη των δύο καθέτων πλευρών ορθογώνιου τριγώνου με υποτείνουσα μήκους $\sqrt{17}$.

Λύση

Αν β, γ είναι οι ρίζες της εξίσωσης , τότε πρέπει:

$$\beta^2 + \gamma^2 = \left(\sqrt{17}\right)^2 = 17. \qquad (1)$$

Με τον περιορισμό $\lambda \neq 3$, οι ρίζες της εξίσωσης ικανοποιούν τους τύπους Vieta:

$$\beta + \gamma = -\frac{\lambda^2 + 1}{\lambda - 3},\ \beta\gamma = -\frac{11\lambda - 18}{\lambda - 3} \qquad (2)$$

Επομένως η σχέση (1) γίνεται:

$$\beta^2 + \gamma^2 = 17 \Leftrightarrow (\beta + \gamma)^2 - 2\beta\gamma = 17 \Leftrightarrow \frac{(\lambda^2 + 1)^2}{(\lambda - 3)^2} + \frac{2(11\lambda - 18)}{\lambda - 3} - 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2 + 1)^2 + 2(11\lambda - 18)(\lambda - 3) - 17(\lambda - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^4 + 7\lambda^2 - 44 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{-7 + \sqrt{225}}{2} = 4 (\text{η άλλη ρίζα είναι αρνητική και απορρίπτεται}) \Leftrightarrow \lambda = \pm 2.$$

Για $\lambda = 2$ η εξίσωση γίνεται: $-x^2 + 5x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 4$, ενώ για $\lambda = -2$ η εξίσωση γίνεται: $-5x^2 + 5x + 40 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 8 = 0$ με ρίζες ετερόσημες, οπότε δεν μπορεί η μία από αυτές να είναι το μήκος πλευράς τριγώνου. Επομένως η μόνη αποδεκτή τιμή για την παράμετρο λ είναι το 2.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης

$$108(x-2)^4+(4-x^2)^3=0 \ .$$

Λύση

Η εξίσωση γράφεται:

$$108(x-2)^4+(4-x^2)^3=0 \Leftrightarrow 108(x-2)^4+(2-x)^3(2+x)^3=0$$

$$\Leftrightarrow 108(x-2)^4-(x-2)^3(2+x)^3=0 \Leftrightarrow (x-2)^3\left[108(x-2)-(x+2)^3\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^3\left(108x-216-x^3-6x^2-12x-8\right)=0 \Leftrightarrow (x-2)^3\left(-x^3-6x^2+96x-224\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^3\left(x^3+6x^2-96x+224\right)=0 \Leftrightarrow (x-2)^3=0 \text{ ή } x^3+6x^2-96x+224=0$$

$$\Leftrightarrow x=2 \,(\text{τριπλή ρίζα}) \text{ ή } x^3+6x^2-96x+224=0.$$

Η εξίσωση $x^3+6x^2-96x+224=0$ έχει πιθανές ακέραιες ρίζες, όλους τους διαιρέτες του 224. Με το σχήμα Horner διαπιστώνουμε εύκολα ότι μία ακέραια ρίζα της είναι το 4 με παραγοντοποίηση:

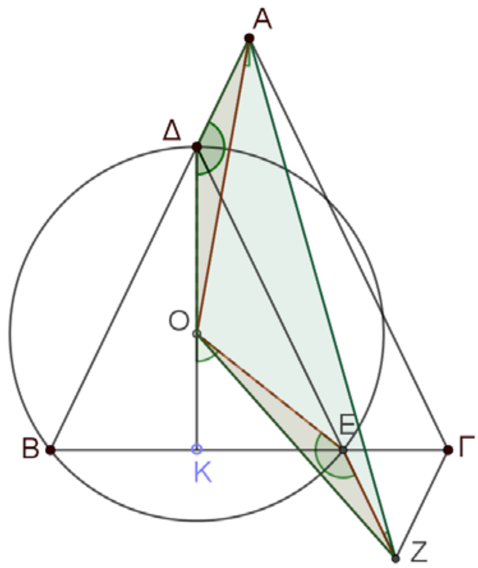
$$x^3+6x^2-96x+224=(x-4)\left(x^2+10x-56\right)=(x-4)^2(x+14).$$

Επομένως η εξίσωση έχει τις λύσεις: 2 (τριπλή), 4 (διπλή) και -14.

Πρόβλημα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Παίρνουμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά ΑΒ και σημείο Ε πάνω στην πλευρά ΒΓ έτσι ώστε οι ευθείες ΔΕ και ΑΓ να είναι παράλληλες. Στην προέκταση της ΔΕ προς το μέρος του Ε παίρνουμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΕΖ = ΑΔ. Αν Ο είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΔΒΕ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Ο, Ζ, Α και Δ ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Λύση



Σχήμα 5

Παρατηρούμε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές, αφού από την παραλληλία $\Delta E \parallel A\Gamma$ έπεται ότι $A\hat{E}B = A\hat{\Gamma}B = A\hat{B}\Gamma$. Επομένως η ευθεία ΟΑ είναι μεσοκάθετη της πλευρά ΒΕ και διχοτόμος της γωνίας $B\hat{\Delta}E$, οπότε $O\hat{\Delta}E = O\hat{\Delta}B$.
Παρατηρούμε τώρα ότι τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΖΕ έχουν από τις υποθέσεις δύο πλευρές τους ίσες, ΑΔ = ΕΖ και ΟΔ = ΟΕ. Επιπλέον, έχουμε

$$O\hat{E}Z = 180^0 - O\hat{E}\Delta = 180^0 - O\hat{\Delta}E = 180^0 - \frac{B\hat{\Delta}E}{2} = 180^0 - O\hat{\Delta}B = O\hat{\Delta}A.$$

Επομένως τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΖΕ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $\Delta\hat{A}O = O\hat{Z}E = O\hat{Z}\Delta$, δηλαδή οι κορυφές Α και Ζ του τετραπλεύρου ΟΖΑΔ βλέπουν την πλευρά ΑΟ υπό ίσες γωνίες, οπότε τα σημεία Ο, Ζ, Α και Δ ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Πρόβλημα 3

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα: $\begin{Bmatrix} xy^3 = -108 \\ (x+y)y = -3 \end{Bmatrix}$.

Λύση (1ος τρόπος)

Πρέπει $xy \neq 0$, αφού διαφορετικά δεν μπορεί να αληθεύει το σύστημα, το οποίο γράφεται:

$$\begin{Bmatrix} xy^3 = -108 \\ (x+y)y = -3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} xy\cdot y^2 = -108 \\ xy + y^2 = -3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} (-3-y^2)\cdot y^2 = -108 \\ xy = -3-y^2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y^4 + 3y^2 - 108 = 0 \\ x = \dfrac{-3-y^2}{y} \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y^2 = \dfrac{-3\pm\sqrt{441}}{2} \\ x = -\dfrac{3+y^2}{y} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y^2 = \dfrac{-3\pm 21}{2} \\ x = -\dfrac{3+y^2}{y} \end{Bmatrix} \overset{y^2\geq 0}{\Leftrightarrow} \begin{Bmatrix} y^2 = 9 \\ x = -\dfrac{3+y^2}{y} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = 3 \\ x = -4 \end{Bmatrix} \text{ ή } \begin{Bmatrix} y = -3 \\ x = 4 \end{Bmatrix}.$$

2ος τρόπος

Πρέπει $xy \neq 0$, αφού διαφορετικά δεν μπορεί να αληθεύει το σύστημα, το οποίο γράφεται:

$$\begin{Bmatrix} xy^3 = -108 \\ (x+y)y = -3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} xy\cdot y^2 = -108 \\ xy + y^2 = -3 \end{Bmatrix}.$$

Αν θέσουμε: $xy = \varphi,\ y^2 = \omega > 0$, τότε με αγνώστους φ και ω προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{Bmatrix} \varphi\omega = -108 \\ \varphi + \omega = -3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \varphi\omega = -108 \\ \omega = -3-\varphi \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \varphi(-3-\varphi) = -108 \\ \omega = -3-\varphi \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \varphi^2 + 3\varphi - 108 = 0 \\ \omega = -3-\varphi \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \varphi = \dfrac{-3\pm\sqrt{441}}{2} \\ \omega = -3-\varphi \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \varphi = \dfrac{-3\pm 21}{2} \\ \omega = -3-\varphi \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \varphi = 9 \text{ ή } \varphi = -12 \\ \omega = -3-\varphi \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} (\varphi,\omega) = (9,-12) \\ \text{ή} \\ (\varphi,\omega) = (-12,9) \end{Bmatrix}.$$

Επειδή πρέπει $\omega = y^2 > 0$, δεκτή είναι μόνο η λύση $(\varphi,\omega) = (-12,9)$, οπότε οι τιμές των x, y θα βρεθούν από το σύστημα:

$$\begin{Bmatrix} xy = -12 \\ y^2 = 9 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} xy = -12 \\ y = 3 \text{ ή } y = -3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow (x,y) = (-4,\ 3) \text{ ή } (x,y) = (4,-3).$$

Πρόβλημα 4

Με κ διαφορετικά χρώματα θέλουμε να χρωματίσουμε τους αριθμούς 2, 3, 4,…,1024 έτσι ώστε κανένας αριθμός να μην έχει το ίδιο χρώμα με οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του. Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή του κ.

Λύση

Παρατηρούμε ότι κάθε αριθμός της μορφής 2^κ είναι πολλαπλάσιο όλων των δυνάμεων του 2 με μικρότερο θετικό εκθέτη. Έτσι καθένας από τους αριθμούς

$$2,\ 4=2^2,\ 8=2^3,\ 16=2^4,\ 32=2^5,\ 64=2^6,\ 128=2^7, 256=2^8, 512=2^9, 1024=2^{10}$$

είναι πολλαπλάσιο όλων των προηγουμένων του, εκτός του πρώτου, οπότε όλοι πρέπει να έχουν διαφορετικά χρώματα. Επομένως ο αριθμός των χρωμάτων που θα χρειαστούμε είναι $\kappa \geq 10$.

Θα αποδείξουμε ότι με τα 10 χρώματα, έστω X_i, για τον αριθμό 2^i, $i=1,2,3,...,10$ μπορούμε να χρωματίσουμε όλους τους υπόλοιπους έτσι ώστε να μην υπάρχει το ίδιο χρώμα μεταξύ ενός αριθμού και κάποιου πολλαπλασίου του. Πράγματι, αρκεί να κάνουμε την αντιστοίχιση:

$$X_i \to \left\{2^i, 2^i+1, ..., 2^{i+1}-1\right\},\ i=1,2,...,9 \text{ και } X_{10} \to 2^{10}=1024.$$

Επομένως η ελάχιστη δυνατή τιμή είναι $\kappa_{\min}=10$.