Τα παράδοξα του Ζήνωνα

Συμβολή σε μιαν ατελείωτη συζήτηση.

ΔΙΟΝΥΣΗΣ ΜΕΝΤΖΕΝΙΩΤΗΣ

Ο Δ. Μετζενιώτης σπουδάζει φιλοσοφία στο Λονδίνο. Το άρθρο πού δημοσιεύουμε γράφτηκε ειδικά για την **« Εποπτεία».**

Ο. *Πρόλογος*

0.1, ΣΤΟ ΔΟΚΙΜΙΟ αυτό θα ασχοληθούμε με τα τέσσερα παράδοξα —γνωστά σαν «παράδοξα της κίνησης»— του Ζήνωνα του Ελεάτη (490-430 π.Χ.). Με τα παράδοξα αυτά ο Ζήνωνας υπερασπιζόταν την Παρμενίδια θέση, ότι η κίνηση είναι αδύνατη.
0.2. Στην εισαγωγή του παρόντος δοκιμίου θα δώσουμε μια μικρή περίληψη της Ελεατικής φιλοσοφίας, και κατόπιν —στα επόμενα κεφάλαια— θα ασχοληθούμε με κάθε ένα από τα παράδοξα, ξεχωριστά. Επί πλέον, θα προσπαθήσουμε να δείξουμε ότι —προς μεγάλη ικανοποίηση του Ζήνωνα— τα παράδοξα αυτά δεν έχουν βρη ακόμα μια ικανοποιητική λύση.
0.3. Τέλος, θα θέλαμε να εκφράσουμε τις ευχαριστίες μας προς το μαθηματικό κ. Μάριο Γεωργάκη, στις σημαντικές παρατηρήσεις του οποίου πολλά οφείλει το παρόν. Φυσικά για μας κρατάμε την περίεργη ικανοποίηση του ότι τα λάθη πού ενδεχομένως υπάρχουν εδώ, είναι δικά μας.

1. *Εισαγωγή*

1.1. ΑΝ ΠΑΡΟΥΜΕ την ιστορία των Ελληνικών μαθηματικών (του 5ου αιώνα π.Χ.), θα δούμε ότι οι Έλληνες μαθηματικοί ασχολήθηκαν —μεταξύ άλλων— και με τα προβλήματα του απείρως μικρού (ή απείρως μεγάλου) καθώς και με τα προβλήματα της συνέχειας και της ασυνέχειας.
Τα τελευταία αυτά προβλήματα μπορούν να τεθούν με τον ακόλουθο τρόπο: «Θα έπρεπε να υποθέσουμε ότι ένα μέγεθος είναι απείρως διαιρετό ή ότι —αντίθετα— είναι μία σύνθεση από πολύ μικρά αδιαίρετα μέρη;»
1.2. Υπάρχουν στοιχεία ότι στην Ελληνική αρχαιότητα, τουλάχιστον δύο σχολές σκέψης είχαν αναπτυχθή χρησιμοποιώντας μία από τις δύο αυτές υποθέσεις.
Μία από τις σχολές αυτές εκπροσωπείται από την πλατωνική σχολή και δέχεται την ιδέα της άπειρης διαιρετότητας των μεγεθών. Μία άλλη σχολή είναι η σχολή του Δημόκριτου του Αβδηρίτη (460-370 π. Χ) και των μαθητών του. Αυτή η σχολή απορρίπτει την ιδέα της συνεχείας και βασίζεται στην περίφημη θεωρία των «ατμήτων», (ατόμων).
1.3. Αλλά ποια είναι η θέση των «εκκεντρικών» Ελεατών σ’ αυτή την διαμάχη; Τί δέχονται; Συνέχεια ή ασυνέχεια; Τίποτα απ’ αυτά, γιατί γι’ αυτούς το πρόβλημα «συνέχεια ή ασυνέχεια» είναι ένα ψευδοπρόβλημα. Για τους Ελεάτες το πρόβλημα αυτό

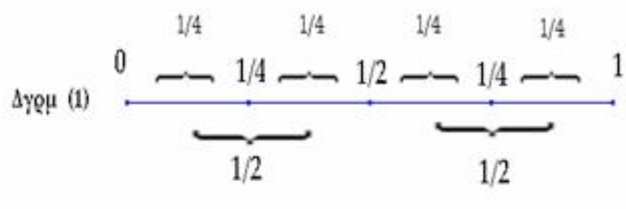
είναι χωρίς νόημα (meaningless) γιατί αναφέρεται στον σφαλερό κόσμο της εμφάνισης και όχι στο «όντως όν».
Σύμφωνα με τους Ελεάτες, όχι μόνο ο κόσμος φαίνεται να είναι διαφορετικός απ' ό,τι είναι, αλλά και ο κόσμος που φαίνεται είναι άλλος από τον κόσμο που είναι. Έτσι, θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο Παρμενίδης (540-475 π.Χ.) και οι μαθητές του είναι οι πρώτοι στην ιστορία της δυτικής φιλοσοφίας πού διαχωρίζουν μεταξύ εμφάνισης και πραγματικότητας.
Κατά την άποψη τους, το «όντως ον» είναι αναλλοίωτο. Το να σκέφτεται κανείς ότι τα πράγματα αλλάζουν πράγματι, θα ήταν σαν να σκεφτόταν ότι αυτό το όποιο δεν είναι είναι· γιατί γι' αυτούς το «είναι» έχει την πολύ δυνατή σημασία του «είναι ότι είναι το να είναι». Αν, π.χ., μιλάνε για το τί είναι ξύλο, μιλάνε —στην πραγματικότητα— για το τί είναι το να είναι κάτι ξύλο, δηλαδή αναφέρονται στην ίδια τη φύση του ξύλου. Και το να είναι κάτι η ίδια η φύση του ξύλου σημαίνει το να είναι αυτό το κάτι ξύλο με όλους τους τρόπους και πάντοτε.
Έτσι, αν το ξύλο άλλαζε με κάποιο τρόπο, δεν θα ήταν πλέον ξύλο, και —κατ' αυτόν τον τρόπο— αυτό που είναι ξύλο θα αποδεικνυόταν ότι δεν είναι ξύλο. Αλλά αυτό είναι σαν να ισχυριζόμαστε ότι το «είναι» και το «μη - είναι» είναι το ίδιο. Αυτό όμως είναι μία λογική αντίφαση. Έτσι, για τους Ελεάτες, τα πράγματα δεν αλλάζουν επί πλέον δε, όταν παρατηρούμε κάποια αλλαγή είμαστε ακόμα στο βασίλειο της πλάνης και της εμφάνισης.
Από την άλλη, οι Ελεάτες πίστευαν ότι το «Όν» δεν έχει «μέρη», αφού ένα «μέρος» δεν είναι ό,τι είναι το να είναι κάτι «Όλον». Έτσι, φαίνεται πως κατέληξαν στο δόγμα: «Εν το παν», (δες: Nehamas, (1981)).
1.4. Τα παράδοξα του Ζήνωνα σκόπευαν στην υπεράσπιση του παρμενιδίου δόγματος ότι η πραγματικότητα (το όντως ον) είναι αναλλοίωτη. Στο πρώτο παράδοξο (της διχοτομίας) η κίνηση είναι αδύνατη· στο δεύτερο (του Αχιλλέα και της χελώνας), ο Αχιλλέας αποτυγχάνει να φτάση μια προπορευόμενη χελώνα. Στο τρίτο παράδοξο, (παράδοξο του Βέλους), ένα κινούμενο βέλος είναι στην πραγματικότητα ακίνητο. Τέλος, στο τέταρτο παράδοξο, (το παράδοξο του Σταδίου), ο Ζήνωνας δείχνει ότι ο χώρος και ο χρόνος δεν αποτελούνται από ελάχιστα, αδιαίρετα στοιχεία.
Στα δύο πρώτα παράδοξα, ο Ζήνωνας χρησιμοποιεί τις ιδέες του απείρου και του συνεχούς. Έτσι, απ' αυτή την άποψη, όπως γράφει ο B. Russell «Τα επιχειρήματα του Ζήνωνα, σε κάποια τους μορφή, έχουν δώσει τις βάσεις για όλες σχεδόν τις θεωρίες του χώρου και του απείρου που έχουν προταθή από την εποχή του, έως τις ημέρες μας».
Φαίνεται ότι ο Ζήνων, στα δύο πρώτα παράδοξα, χρησιμοποιεί την θεωρία του Αναξαγόρα (500; - 428 π. Χ) για το συνεχές. Για τον Αναξαγόρα, το πιο ουσιαστικό χαρακτηριστικό του συνεχούς μπορεί να περιγραφή με τον ακόλουθο τρόπο: «Μεταξύ των μικρών, δεν υπάρχει το ελάχιστο, αλλά —πάντα— κάτι μικρότερο. Γιατί ό,τι είναι δεν παύει να είναι όσες φορές και αν υποδιαιρεθή». (H. Weyl, (1963)).
Κατά την άποψη μας, αυτή η περιγραφή είναι όμοια με τον χαρακτήρα του συνεχούς πού θα εξετάσουμε στην §2.1. του παρόντος. Και αυτό γιατί θεωρούμε ότι η πρόταση: «Μεταξύ των μικρών δεν υπάρχει το ελάχιστο, αλλά —πάντα— κάτι μικρότερο...» υπονοεί την ιδιότητα της πυκνότητας που αποδίδεται στη σύγχρονη ιδέα για το συνεχές.
Μπορεί να ειπωθή ότι η διαφορά μεταξύ του Ζήνωνα και των επικριτών του έχει τις ρίζες της ακριβώς στην θέση του Αναξαγόρα για το συνεχές. Γιατί, για τον Ζήνωνα, το να λέμε ότι: «... ό,τι είναι δεν παύει να είναι, όσες φορές και αν υποδιαιρεθή...» είναι το ίδιο με το να λέμε ότι ή ακολουθία των υποδιαιρέσεων είναι απέραντη.

Έχει προταθή (δες Eves (1953)), ότι η πρώτη ουσιαστική απάντηση που δόθηκε στα πρώτα δύο παράδοξα, ήταν αυτή που έδωσε η Πλατωνική σχολή. Αυτή είναι η περίφημη «μέθοδος της εξάντλησης» που συνήθως αποδίδεται στον Εύδοξο (408 — 355 π.Χ.). Η μέθοδος αυτή δέχεται την ιδέα της άπειρης διαιρετότητας των μεγεθών και έχει σα βάση της την πρόταση: «Αν από κάποιο μέγεθος αφαιρεθή ένα μήκος όχι μικρότερο από το μισό του, από το υπόλοιπο άλλο μέρος όχι μικρότερο από το μισό του, κ.ο.κ., θα μείνη τελικά ένα μέγεθος μικρότερο από κάθε προκαθορισμένο μέγεθος του ιδίου είδους». Κατά την άποψη μας, αυτό που εννοεί ο Εύδοξος είναι ότι μέσω της διαδικασίας των αφαιρέσεων ή υποδιαιρέσεων ενός δεδομένου μεγέθους μπορούμε να «εξαντλήσουμε» αυτό το μέγεθος. Επιπλέον, θεωρούμε ότι η «μέθοδος της εξάντλησης» είναι ο πρόδρομος της σύγχρονης θεωρίας των ορίων. Είναι δε αυτή η τελευταία θεωρία πού χρησιμοποιείται από τους σύγχρονους μαθηματικούς για να διαφωτισθούν τα δύο πρώτα παράδοξα του Ζήνωνα.
Στις σελίδες που ακολουθούν θα παρουσιάσουμε κάθε ένα από τα παράδοξα του Ζήνωνα καθώς και μερικές προσπάθειες πού έχουν γίνει για την λύση τους. Τελικά σε κάθε ένα από αυτά θα εκφράσουμε την άποψη μας για τις προσπάθειες αυτές και θα βγάλουμε τα συμπεράσματα μας.

2. Το Παράδοξο της διχοτομίας

2.1. ΣΤΗΝ ΜΟΝΤΕΡΝΑ φιλοσοφία, τόσο το παράδοξο της διχοτομίας όσο και αυτό του Αχιλλέα και της χελώνας, θεωρούνται ότι αποτελούν πρόκληση για την σύγχρονη μαθηματική φυσική και ιδιαίτερα, για το ότι αυτή θεωρεί τα χωρικά και χρονικά διαστήματα σαν να είναι μαθηματικά γραμμικά συνεχή σημείων. Στην μοντέρνα φυσική, ένα ευθύγραμμο χωρικό διάστημα είναι ένα γραμμικό μαθηματικό συνεχές σημείων, το κάθε ένα από τα όποια έχει μηδενικό μήκος και, ένα χρονικό διάστημα θεωρείται ότι είναι ένα γραμμικό μαθηματικό συνεχές στιγμών, η κάθε μία από τις όποιες έχει διάρκεια μηδέν.
Τα βασικά χαρακτηριστικά του συνεχούς είναι τα ακόλουθα: (α): η ιδιότητα της πυκνότητας: (δηλ: δεχόμαστε ότι μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων του συνεχούς υπάρχει μια πυκνή απειρία άλλων σημείων (β): δεχόμαστε ότι για κάθε σημείο του συνεχούς δεν υπάρχει επόμενο σημείο· και (γ): ιδιαίτερα, όταν αναφερόμαστε σε χρονικό διάστημα, δεχόμαστε ότι κάθε στιγμή αυτού του διαστήματος είναι δυνάμει ο χρόνος ενός φυσικού συμβάντος.
Η ιδιότητα της πυκνότητας, που αποδίδεται σε ένα διάστημα, μας επιτρέπει να πούμε ότι μία ακολουθία υποδιαστημάτων φθίνοντος μεγέθους, τείνει στο μηδέν. Από την άλλη, στην περίπτωση που ο χώρος και ο χρόνος είναι κβαντισμένα μεγέθη (δηλ. όταν δεχόμαστε ότι υπάρχουν ελάχιστα και αδιαίρετα στοιχεία (κβάντα του χώρου και του χρόνου), η διαδικασία των υποδιαιρέσεων ενός μεγέθους σύντομα φθάνει σε ένα τέλος με το φτάσιμο στο κβάντο αυτού του μεγέθους.
Και τώρα μετά από αυτές τις παρατηρήσεις για το συνεχές, θα παρουσιάσουμε δύο εκδοχές του παραδόξου της διχοτομίας.
2.2.α. Εάν ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι απείρως διαιρετό τότε η κίνηση είναι αδύνατη, γιατί για να διανύση ένας δρομέας ένα μοναδιαίο ευθύγραμμο τμήμα, πρέπει πρώτα να

πέραση από το μέσο του, αλλά πριν το κάνει αυτό, πρέπει πρώτα να περάσει από το μέσο του μέσου, και για να το κάνει αυτό πρέπει πρώτα να περάσει από το μέσο του μέσου του μέσου, κ.ο.κ., επ' άπειρον. Από αυτό συνεπάγεται ότι ή κίνηση δεν αρχίζει ποτέ». [Eves. (1953)].



Η πρώτη εκδοχή του παραδόξου μας φέρνει αντιμέτωπους με μία παλινδρόμηση επικαλυπτόμενων υποδιαστημάτων φθίνοντος μεγέθους:

$$\left\{ \cdots, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}, \cdots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right\}$$
$$\text{όπου} \quad n = \cdots, 3, 2, 1$$

Η ακολουθία αυτών των υποδιαστημάτων έχει τελευταίο, αλλά δεν έχει πρώτο μέλος δηλ., είναι μία απέραντη ακολουθία.
Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο συνολικός χρόνος, που απαιτείται για την διάνυση του μοναδιαίου διαστήματος, είναι ένα λεπτό. Επί πλέον, αν υποθέσουμε α) ότι ο χρόνος που αντιστοιχεί για την διάνυση του υποδιαστήματος που έχει μήκος 1/2 είναι 1/2 min, και β) ότι ο χρόνος που αντιστοιχεί για τη διάνυση του υποδιαστήματος μήκους 1/4, είναι 1/4 min, κ.ο.κ., μπορούμε να σχηματίσουμε την παρακάτω ακολουθία των χρονικών υποδιαστημάτων (τα οποία είναι φθίνοντος μεγέθους):

$$\left\{ \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right\}$$
$$\text{όπου} \quad n = \cdots, 3, 2, 1$$

και αυτή η ακολουθία δεν έχει πρώτο μέλος, δηλ: είναι και αυτά μία απέραντη ακολουθία. Έτσι, το πρόβλημα πού τίθεται εδώ είναι πώς μπορούμε να φτάσουμε στο σημείο του προ ορισμού μας (το όποιο - εδώ - είναι το σημείο Ω του ευθυγράμμου

τμήματος πού παριστάνεται στο Δγρ. 1) μέσω της απέραντης ακολουθίας των υποδιαστημάτων του χώρου και του χρόνου.
Τώρα, θα παρουσιάσουμε την δεύτερη εκδοχή του παραδόξου της διχοτομίας.

2.2.b. Σύμφωνα μ' αυτή την εκδοχή, αν ο δρομέας πρόκειται να διανύση το μοναδιαίο ευθύγραμμο τμήμα (βλ. δγρ. 1), πρέπει πρώτα να φτάση το μέσο του, μετά θα πρέπη να φτάση το μέσο του υπολοίπου τμήματος, και μετά το μέσον του υπολοίπου, κ.ο.κ, επ' άπειρον. Δηλαδή: ο δρομέας, για να διανύση το μοναδιαίο ευθύγραμμο τμήμα, πρέπει —μεταξύ άλλων— να διανύση διαδοχικά μια πρόοδο μή-επικαλυπτόμενων χωρικών υποδιαστημάτων, τα μήκη των οποίων είναι:

$$\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots \right\}$$
$$\text{όπου} \quad n = 1, 2 \cdots$$

Από αυτό συμπεραίνουμε ότι ο δρομέας δεν θα φτάση ποτέ το σημείο του προορισμού του [δηλ. το σημείο 1 του ευθυγράμμου τμήματος (Δγρμ. 1)].
Η δεύτερη μορφή του παραδόξου μας φέρνει αντιμέτωπους με μία πρόοδο μή-επικαλυπτόμενων υποδιαστημάτων φθίνοντος μεγέθους. Αυτή η πρόοδος έχει ένα πρώτο αλλά όχι και τελευταίο μέλος., δηλ.: είναι μία απέραντη ακολουθία.
Ας υποθέσουμε ότι ο ολικός χρόνος πού απαιτείται για την διάνυση του ολικού διαστήματος είναι ένα λεπτό. Υιοθετώντας τις ίδιες υποθέσεις για τον χρόνο που χρειάζεται για την διάνυση κάθε ενός από τα χωρικά υποδιαστήματα —όπως στην πρώτη εκδοχή του παραδόξου— αποκτούμε την παρακάτω ακολουθία των χρονικών υπόδιαστημάτων:

$$\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots \right\}$$
$$\text{όπου} \quad n = 1, 2, 3 \cdots$$

Η ακολουθία αυτή δεν έχει τελευταίο μέλος. Το πρόβλημα που τίθεται εδώ είναι πώς μπορούμε να φτάσουμε το σημείο του προορισμού μας [δηλ.: το σημείο 1 δγρμ.(I)] μέσω των απέραντων ακολουθιών των χωρικών και χρονικών υποδιαστημάτων.
Κατ' αυτόν τον τρόπο, θεωρούμε ότι είναι, ουσιατικά, το ίδιο πρόβλημα που τίθεται από την πρώτη και την δεύτερη εκδοχή του παραδόξου.
Και τώρα θα προσπαθήσουμε να παρουσιάσουμε διάφορες προσπάθειες πού έχουν γίνει για να δοθή μία λύση σ' αυτό το παράδοξο.
2.3. Έχει υποστηριχθή, [βλ. μεταξύ άλλων: Whitrow (1961)] ότι στην πρώτη εκδοχή του παραδόξου της διχοτομίας, ο Ζήνωνας ισχυρίζεται ότι αν ο δρομέας είχε φτάσει το σημείο του προορισμού του [σημείο 1, δγρμ. (1)], θα είχε απαιτηθή *άπειρος παρελθόντας χρόνος,* ενώ —στην δεύτερη εκδοχή του παραδόξου— ισχυρίζεται ότι ο δρομέας, αν πρέπει να διανύση την πρόοδο των υποδιαστημάτων στον απαιτούμενο χρόνο, θα απαιτηθή *άπειρος μελλοντικός χρόνος.*
Έτσι, κατά τον Whitrow, ο δρομέας ποτέ δεν φτάνει στον προορισμό του.

Ο Whitrow φτάνει σ' αυτό το συμπέρασμα επειδή ταυτίζει την διάνυση των υποδιαστημάτων της απέραντης ακολουθίας από τον δρομέα, με την προσπάθεια του δρομέα (ή την δική μας) να θεώρηση ένα -προς- ένα (δηλ.: να αρίθμηση) όλα τα υποδιαστήματα που ανήκουν σ' αυτή την ακολουθία, διαδοχικά. Και φαίνεται ότι για τον Whitrow, ενώ αυτά τα χωρικά υποδιαστήματα είναι φθίνοντος μεγέθους, τα υποδιαστήματα του χρόνου πού απαιτείται για την 1-1 θεώρηση των χωρικών υποδιαστημάτων δεν είναι φθίνοντος μεγέθους διότι υπάρχει ένα κάτω φράγμα στην διάρκεια των νοητικών μας πράξεων (δηλ. υπάρχουν ανθρώπινα minima perceptibilia) [βλ. Grónbaum (1968)]. Αυτό, μαζί με το γεγονός ότι η ακολουθία των νοητικών μας πράξεων είναι απέραντη (αφού η ακολουθία των χωρικών υποδιαστημάτων είναι απέραντη) οδήγησαν τον Whitrow στο συμπέρασμα ότι ο ολικός χρόνος που απαιτείται για την επιτυχή ένα-πρός-ένα θεώρηση των χωρικών υποδιαστημάτων, πρέπει να είναι άπειρος. Πρέπει, δε, ο χρόνος αυτός να είναι άπειρος αφού είναι το άθροισμα των απείρων ορών μιας απέραντης ακολουθίας θετικών διαρκειών, που δεν τείνει στο μηδέν. Από αυτά, ο G.J. Whitrow συμπεραίνει ότι η πυκνότητα που αποδίδεται στον φυσικό χρόνο οδηγεί σε λογικές αντινομίες.

2.4. Σύμφωνα με τον Grónbaum (1968), η άποψη του Whitrow είναι λανθασμένη. Κατά τον Grónbaum, αυτό που γεννά τις λογικές αντινομίες δεν είναι η πυκνότητα του φυσικού χρόνου. Το λάθος του Whitrow βρίσκεται στην —από μέρους του Whitrow, ατυχή ταύτιση της διάνυσης των υποδιαστημάτων από τον δρομέα με την προσπάθεια του τελευταίου (ή την δική μας) να μέτρηση ενα-πρός-ενα τα υποδιαστήματα της απέραντης ακολουθίας. Με την υπόθεση του αυτή, ο Whitrow, παραδέχεται σιωπηρά ότι η διακριτή χρονική τάξη των γεγονότων (ή οποία αναδύεται από τα minima perceptibilia του ανθρώπου) είναι κανονιστική για την θεωρητική κατανόηση των φυσικών συμβάντων.

Σύμφωνα με τον Grónbaum, όταν βασιζόμαστε στα ανθρώπινα minima perceptibilia, δεν είμαστε μετρικά δίκαιοι σχετικά με την πραγματική διάρκεια του χρόνου πού απαιτείται για την διάνυση κάθε ενός από τα υποδιαστήματα.

Η άποψη του είναι ότι η πυκνότητα του φυσικού χρόνου και χώρου μας επιτρέπει να πούμε ότι ο δρομέας διανύει ολοένα μικρότερα διαστήματα χώρου σε ανάλογα ολοένα μικρότερο χρόνο. Αυτό σημαίνει ότι τόσο ή ακολουθία των χωρικών υποδιαστημάτων, όσο και η ακολουθία των υποδιαστημάτων του χρόνου, τείνουν στο μηδέν με τον τρόπο μιας φθίνουσας γεωμετρικής προόδου: π.χ.:

$$\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \quad \dots, \quad \frac{1}{2^n}, \dots \right\}$$
$$\text{όπου} \quad n = 1, 2 \cdots$$

Έτσι, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον standard μαθηματικό οριακό ορισμό του αθροίσματος των όρων της άπειρης ακολουθίας των υποδιαστημάτων για να βρούμε το μήκος της ένωσης αυτών των ύποδιαστημάτων που είναι ίση με το μήκος του ολικού διαστήματος. Στην περίπτωση του μοναδιαίου διαστήματος του δγρμ. (1) και της άπειρης ακολουθίας των υποδιαστημάτων του

$$\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots \right\}$$
$$(n = 1, 2 \cdots)$$

το άθροισμα Sn των απείρων ορών της φθίνουσας γεωμετρικής προόδου, δίδεται από τον τύπο:

$$S_n = \frac{\alpha}{1-\omega} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$$

[;οπου: S = α, αω, $\alpha\omega^2$,..., $\alpha\omega^{n-1}$,... είναι μία γεωμετρική πρόοδος και Sn = είναι το αριθμητικό άθροισμα αυτής της προόδου όταν /ω/ < 1 . (βλ. Σαραντόπουλος: (1956)].

Ο αριθμός 1 πού έχουμε βρει αντιπροσωπεύει (α): το μήκος του ολικού διαστήματος, και (β): το τελικό σημείο της κίνησης του δρομέα.
Ο Grónbaum επισημαίνει ότι ο δρομέας φτάνει το τελικό σημείο 1 της κίνησης του, μετά την πρόοδο των υποδιαστημάτων, γιατί αυτό το τελικό σημείο δεν ανήκει σε κανένα από τα υποδιαστήματα της προόδου, αφού πρόκειται περί μιας απέραντης προόδου πογ δεν έχει τελευταίο ορό. Επίσης ό Grónbaum σημειώνει οτι «για καθαρά λογικούς λόγους δεν μπορούμε ποτέ να βρούμε την τελική στιγμή της κίνησης σε κανένα υποδιάστημα στο οποίο αυτή δεν ανήκει, και αυτό ισχύει για όλα τα υποδιαστήματα της προόδου» [Grónbaum (1968)]. Από την άλλη, κατά την άποψη του, δεν μπορούμε από αυτό να συμπεράνουμε ότι ο δρομέας δεν μπορεί ποτέ να φτάση το τελικό σημείο της κίνησης του [το όποιο εδώ είναι το σημείο 1, δγρμ. (1)] επειδή μπορεί να υπάρχει μια στιγμή αργότερα (μετά) από όλα τα υποδιαστήματα της προόδου, πού είναι ή τελευταία της κίνησης.
Αλλά, κατά την άποψη μας, αυτό που φαίνεται να λέει ο Grónbaum είναι ότι ο δρομέας λογικά «υπερβαίνει» μια πρόοδο την οποία λογικά δεν μπορεί να ύπερβή αφοϋ είναι μία απέραντη πρόοδος. Και, κατ' αυτόν τον τρόπο, χρησιμοποιεί ένα λογικό παράδοξο για να διαφώτιση μια ασυμφωνία πού υπάρχει μεταξύ της εμπειρίας μας και της μαθηματικής κατανόησης αυτής της εμπειρίας.
2.5. Και τώρα θα εκθέσουμε τις δικές μας σκέψεις γι' αυτό το παράδοξο. Για μας, αυτό πού λέει ο Ζήνωνας είναι ακριβώς ότι είναι λογικά αδύνατο να βρούμε την τελική στιγμή της κίνησης σε ένα από τα υποδιαστήματα της απέραντης προόδου πού σχηματίζουν. Αυτό σημαίνει ότι μιας και ο δρομέας είναι παγιδευμένος στην διαδικασία του να φτάση το σημείο του προορισμού του [σημείο 1, δγρμ(1)] με το να κινείται κάθε φορά το μισό της απόστασης πού απομένει, δεν θα φτάση σ' αυτό το σημείο 1. Γιατί, για να φτάση στο σημείο 1 του προορισμού του, πρέπει να «ύπερβή» την πρόοδο των ύποδιαστημάτων αλλά αυτό είναι κάτι πού δεν μπορεί να το κάνει, αφού αυτή ή πρόοδος είναι απέραντη (ατελείωτη). Έτσι, αυστηρά λογικά μιλώντας, ο δρομέας δεν θα φτάση στο τέλος της κούρσας του, γιατί οσοδήποτε «κοντά» και να είναι αυτό το «τέλος», στην πραγματικότητα δεν είναι ποτέ «εκεί» [Te Hennepe (1963)]. 'Αφού δε, δεν μπορεί να πάη σ' αυτό το «τέλος», χρειάζεται άπειρο χρόνο να πάη, υπό την έννοια ότι αν κανείς δεν

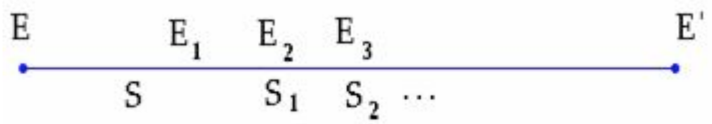
πάει σ’ ένα μέρος Α, μπορεί να πή ότι θέλει άπειρο χρόνο να πάη στο Α, (πού είναι το ίδιο σαν να λέει ότι δεν πάει στο Α).
Νομίζουμε ότι τα παραπάνω υπονοούνται στον τρόπο πού ορίζουμε τα όρια σήμερα. Γιατί όταν λέμε ότι το lim l/n = 0, εννοούμε οτι το l/n μπορεί να πλησίαση στο μηδέν τόσο κοντά όσο είναι επιθυμητό με το να αυξάνουμε τον θετικό ακέραιο n . Αυτό σημαίνει οτι το μηδέν δεν ανήκει στο σύνολο S = {l/n, neN} (δηλ..: S = { l/l, 1/2, 1/3,...}). Πιο ποιητικά, το l/n έχει όλη την θέληση να γίνη μηδέν, αλλά τί κρίμα! παρά τίς προσπάθειες του παραμένει πάντα ένα απλό l/n.
Αυτές οι σκέψεις οδηγούν στο συμπέρασμα ότι είναι πιο παράδοξο να πούμε ότι κάποιος χρειάζεται έναν πεπερασμένο χρόνο για να πάη κάπου, οπού —στην πραγματικότητα— δεν πηγαίνει (πράγμα πού υπονοείται στην λύση του Grónbaum), παρά το να πούμε ότι κάποιος χρειάζεται άπειρο χρόνο για να πάη κάπου, οπού —στην πραγματικότητα— δεν μπορεί να πάη.
Επί πλέον, νομίζουμε ότι τα προειδοποιητικά μαθήματα πού υπονοούνται από το παράδοξο της διχοτομίας είναι: (α): το άπειρο είναι ένα δόλιο είδος τέρατος. Συχνά «χτυπά» όταν δεν το περιμένουμε. Έτσι πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στον τρόπο πού το χρησιμοποιούμε, (β): ή ερώτηση του Ζήνωνα, πού —κατά την άποψη μας είναι: «Πώς μπορούμε να υπερβούμε» το πεπερασμένο και να πάμε στο άπειρο;» δεν έχει βρή ακόμη μια ικανοποιητική απάντηση, και (γ): ποιο γενικά: όταν λέμε ότι αυτή ακριβώς ή ουσία ενός πράγματος μπορεί να μετασχηματισθή στην ουσία ενός άλλου, βρισκόμαστε μπροστά στην ερώτηση: «Μα πώς μπορεί να γίνη αυτό;» Πώς είναι ή αλλαγή λογικά δυνατή; «Πώς μπορεί να αλλάξη ένα πράγμα χωρίς να χάνη την ταυτότητα του; "Αν μένει το ίδιο, δεν αλλάζει· αλλά αν χάνει την ταυτότητα του, τότε δεν είναι πια το ίδιο πράγμα πού έχει αλλάξει». [Poper, (1972)].

3. *Ο Αχιλλέας και η Χελώνα*

3.1 ΤΟ ΠΑΡΑΔΟΞΟ αυτό λέει: «Αν ο Αχιλλέας αφήσει μια χελώνα να ξεκινήσει από ένα σημείο που βρίσκεται πιο μπροστά απ’ αυτόν, τότε —αν και ξεκινούν την ίδια χρονική στιγμή— ο Αχιλλέας δεν φτάνει ποτέ την χελώνα. Και αυτό γιατί: πρέπει πρώτα να φτάση το μέρος απ' οπού ξεκίνησε ή χελώνα. Κατά τον χρόνο αυτό, όμως, η χελώνα θα έχει πάει σε ένα άλλο σημείο, πιο μπροστά. Ο Αχιλλέας τότε θα πρέπη να πάη σ’ αυτό το σημείο, αλλά πάλι ή χελώνα θα έχη πάη πιο μπροστά. Έτσι, ο Αχιλλέας θα πρέπει πάντα να πηγαίνει πρώτα στο σημείο από το όποιο ή χελώνα μόλις έφυγε, και κατ' αυτόν τον τρόπο, πάντα ή χελώνα θα προπορεύεται. Μ’ αυτόν τον τρόπο, οι προσπάθειες του Αχιλλέα θα σημαδεύονται πάντα από ταπεινωτικές αποτυχίες.
3.2. Εδώ, θα παρουσιάσουμε την άποψη του Β. Russell για το παράδοξο, [βλ.: Β. Russell: (1965), (1938)]. Το κύριο σημείο του επιχειρήματος του Russell είναι ή ένα προς ένα αντιστοίχηση των θέσεων του Αχιλλέα και της χελώνας στην ίδια στιγμή της κίνησης τους. Σέ κάθε στιγμή της κίνησης τους, ο Αχιλλέας είναι κάπου και ή χελώνα είναι επίσης κάπου· δεν είναι, δε, δυνατόν για κανένα τους να βρίσκεται ποτέ δύο φορές στο ίδιο μέρος κατά την διάρκεια της κούρσας. Έτσι, ο αριθμός των σημείων οπού πηγαίνει ο Αχιλλέας, είναι ίσος με τον αριθμό των σημείων οπού πηγαίνει ή χελώνα, διότι: ο καθένας είναι σ’ ένα μέρος την μια στιγμή, και σε άλλο μέρος σε μίαν άλλη). Αν

ο Αχιλλέας πρόκειται να φτάση την χελώνα, τότε ο αριθμός των σημείων απ' οπού πέρασε ο Αχιλλέας θα ήταν μεγαλύτερος από τον αριθμό των μερών απ’ οπού πέρασε ή χελώνα. Αυτό δε, πρέπει πράγματι να συμβαίνει αφού ο Αχιλλέας έχει να διανύση μεγαλύτερη απόσταση από την χελώνα. Έτσι —κατά τον Russell—, ο Ζήνωνας μας φέρνει αντιμέτωπους με το έξης παράδοξο: ό αριθμός των μερών από τα όποια έχει περάσει ο Αχιλλέας είναι ίσος με τον αριθμό των μερών απ' οπού έχει πέραση ή χελώνα, και —την ίδια στιγμή (στην περίπτωση που ο Αχιλλέας φτάνει την χελώνα) ο αριθμός των μερών πού πέρασε ο Αχιλλέας είναι μεγαλύτερος από αυτόν των μερών πού πέρασε ή Χελώνα. Αυτό όμως είναι μία αντίφαση. Εν τούτοις, τα δύο σύνολα των σημείων έχουν άπειρα μέλη, και όπως ο Cantor έχει δείξει, αυτό είναι ή χαρακτηριστική ιδιότητα των απειροσυνόλων, ότι δηλ. τα μέρη τους —αν όχι ίσα— είναι ισοδύναμα με το «όλον». Έτσι, η εκδοχή αυτού του παραδόξου μπορεί να θεωρηθή ότι έχει διαφωτισθή.

3.3 Θα παρουσιάσουμε τώρα μια δεύτερη εκδοχή του παραδόξου.
Ας υποθέσουμε ότι: (1) ο Αχιλλέας είναι στο σημείο ε· (2): ή χελώνα είναι στο σημείο Ε,· (3) ή απόσταση μεταξύ Ε και Ε, είναι S [βλ. δγρμ (1)].



Δγρμ 1

(4): ό Αχιλλέας φτάνει την χελώνα στό σημείο Ε'- (5): ό Αχιλλέας τρέχει μέ μιά ταχύτητα Uΰ καί ή χελώνα μέ μιά ταχύτητα Ux μικρότερη από την Uΰ

$$\left(\mathbf{\delta\eta\lambda} : \mathrm{U}_X < \mathrm{U}_\Lambda = \frac{\mathrm{U}_X}{\mathrm{U}_\Lambda} < 1\right)$$

Ό Αχιλλέας χρειάζεται ένα χρόνο Τ, για την διάνυση του πρώτου διαστήματος S, και κατ' αυτόν τον χρόνο Τ, ή χελώνα διανύει διάστημα S, (πηγαίνει δηλ.: από το Ε, στο Ε,). Ενώ ό Αχιλλέας πάει στο Ε,, ή χελώνα πάει στο Ε, (και E_2E, = S,), κ.ο.κ. Έτσι, ό Αχιλλέας,

για να φτάση την χελώνα στο σημείο Ε', πρέπει να διανύση μιαν πρόοδο μη επικαλυπτομένων διαστημάτων: { S, S,, S,..., Sn..} δπου n = 1,2,3,..., τα όποια είναι φθίνοντος μεγέθους αφού τα μήκη τους S, S,, S,,... ava. S, S (ux/ua), S $(U_X/U_A)^2$, ... και ux/ua < 1 (βλέπε Grónbaum (1968)).
Είναι καθαρό ότι αυτό οδηγεί στα προβλήματα πού έχουν συζητηθή στη § 2.4 και § 2.5. του παρόντος (στο παράδοξο της διχο-τομίας). "Ετσι, δεν πρόκειται να επανέλθουμε εδώ. Θα θέλαμε όμως να προσθέσουμε δτι ό Η. Weyl έχει αρχίσει μια συζήτηση του παραδόξου, πού αναφέρεται στο πρόβλημα των «ά-πειρομηχανών» (δηλ.: μηχανικών για τίς οποίες μπορεί να είπωθή δτι κάνουν άπειρο αριθμό έργων). Για τον Η. Weyl, αν δεχτούμε οτι ό Αχιλλέας μπορεί να διανύσει δλα τα ύποδιαστήματα μιας απέραντης ακολουθίας «τότε δεν υπάρχει λόγος μια μηχανή να μην μπορεί να φέρει σε πέρας μιαν άπειρη ακολουθία διακριτών πράξεων από' φανσης μέσα σε ένα πεπερασμένο χρόνο...» Στήν περίπτωση, όμως, αυτή, πρέπει να ποϋμε ότι ή λειτουργία μιας «άπειρομηχανής προϋποθέτει ότι το άπειρο πράγματι υπάρχει, και ότι δεν είναι μόνο μια ιδέα στα μυαλά των μαθηματικών, όμως φαίνεται ότι καμμία παρατήρηση δεν μπορεί εϊτε να διάψευση ή να επαλήθευση ότι το άπειρο πράγματι υπάρχει (ότι, δηλαδή, ή φύση είναι πράγματι άπειρη).

4. Το παράδοξο του βέλους

4.1 συμφωνα με τον Gr. Vlastos [βλ. το Gr. Vlastos: (1966)], το παράδοξο του βέλους μπορεί να διατυπωθή ως ακολούθως: 1]. Ένα κινούμενο βέλος κινείται: εϊτε στον τόπο πού δεν βρίσκεται, ή στον τόπο πού βρίσκεται. 2]. Άλλα, δεν θα μπορούσε να κινηθή ούτε στον τόπο πού δεν βρίσκεται,
3]. ούτε στον τόπο πού βρίσκεται, 3.1]. γιατί αυτός ό τόπος είναι ίσος με τον εαυτό του.
4]. Και κάθε τί, είναι πάντα σε ηρεμία, για κάθε στιγμή (μηδενικής διάρκειας), στην οποία καταλαμβάνει ένα τόπο ϊσο με αυτό το ϊδιο. 5] *Συμπέρασμα:* Άφοΰ ή 4 είναι αληθής για κάθε στιγμή, ακολουθεί ότι το βέλος δεν κινείται ποτέ.
4.2. "Εχει προταθή [βλ.: Grónbaum (1968), Russell (1932) και (1965)], ότι το παράδοξο αυτό βασίζεται στην υπόθεση δτι υπάρχουν διαδοχικές χρονικές στιγμές. Με βάση την υπόθεση αυτή, ή περίοδος κατά την διάρκεια της οποίας ένα βέλος κινείται, συνίσταται από 'έναν αριθμό διαδοχικών χρονικών στιγμών. Σέ κάθε μία από τίς στιγμές αυτές, το βέλος εΐναι εκεί πού είναι, αν και την επόμενη στιγμή είναι κάπου άλλου. Πότε κινήθηκε; "Ας παραθέσουμε τον Β. Russell πού λέει: «... Δεν κινείται ποτέ, αλλά κατά ένα θαυματουργό τρόπο ή αλλαγή πρέπει να γίνη μεταξύ των χρονικών στιγμών, δηλαδή, «σε κανένα χρόνο». "Ετσι, για τον Β. Russell, ό
πυρήνας του παραδόξου είναι ότι ή αλλαγή της θέσης πρέπει να συμβαίνει έξω από τον χρόνο. (δηλ. σε κανένα χρόνο»). Το συμπέρασμα αυτό στηρίζεται στην υπόθεση ότι ή χρονική τάξη είναι διακριτή. "Ετσι, σύμφωνα με τον Russell, ή λύση βρίσκεται στην θεωρία του συνεχούς χρόνου. Έχουμε δει, (§2.1.) ότι αν ένα χρονικό διάστημα είναι ένα μαθηματικό γραμμικό συνεχές σημείων (στιγμών), τότε για κάθε στιγμή του συνεχούς δεν υπάρχει επόμενη στιγμή. Για τον Russell [στο (1922)] «...από την στιγμή πού αυτό αναγνωρίζεται ή δυσκολία "εξαφανίζεται».

Εν τούτοις, ή γνώμη μας είναι ότι και στην περίπτωση ενός πυκνού χρόνου, το παράδοξο δεν εξαφανίζεται· γίνεται, μάλλον, πιο καλυμέ-νο. Γιατί, αν μετά την στιγμή π.χ. ti, το βέλος κατέχει ένα τόπο στον οποίο δεν κινείται, και σε μία άλλη στιγμή t2 κατέχει ένα άλλο τόπο στον οποίο δεν κινείται, τότε για κάθε μία και για όλες τίς άπειρες (λόγω της πυκνότητας) ενδιάμεσες στιγμές (στο ti και *M2),* το βέλος καταλαμβάνει αντίστοιχους άπειρους τόπους, οπού —πάλι— είναι ακίνητο. Έτσι, για δλο το συνεχές χρονικό διάστημα στο όποιο ένα βέλος κινείται, είναι —στην πραγματικότητα— ακίνητο.

4.3. Νομίζουμε ότι μια πιο ικανοποιητική απάντηση σ' αυτό το παράδοξο, έχει δόσει ό Gr. Vlastos (1966). Κατά την άπρψή του, το λάθος του Ζήνωνα βρίσκεται στην τέταρτη προκείμενη του παραδόξου, ή οποία λέει ότι: «κάθε τι πάντα είναι σε κατάσταση ηρεμίας, για κάθε στιγμή (μηδενικής διάρκειας), στην οποία καταλαμβάνει ένα τόπο ϊσο με τον εαυτό του». Κατά τον Vlastos δεν έχει νόημα να λέμε δτι κάτι ηρεμεί σε μία χρονική στιγμή μηδενικής διάρκειας. "Οταν λέμε ότι ένα σώμα είναι σε κατάσταση ηρεμίας εννοούμε ότι ή ταχύτητα του U είναι μηδέν και δτι το σώμα αυτό δεν διανύει κανένα διάστημα S. "Αν πούμε ότι το σώμα αυτό ηρεμεί σε μία στιγμή t (μηδενικής διάρκειας), τότε θα έχουμε $U = S/t = 0/0$, το όποιον είναι απροσδιόριστο (ή όπως λέει ό Vlastos λανθασμένα, χωρίς νόημα). Ένα σώμα ηρεμεί κατά την διάρκεια μιας χρονικής περιόδου, οσοδήποτε μικρής. Οί ιδέες της κίνησης και της ηρεμίας εφαρμόζονται σε δτι συμβαίνει όχι σε μία στιγμή, αλλά, σε ένα χρονικό διάστημα, όπως ακριβώς ή καμπυλότητα είναι μια ιδιότητα γραμμών και επιφανειών, και δχι των σημείων από τα όποια αποτελείται ή γραμμή (ή ή επιφάνεια). Ως εκ τούτου, για να ορίσουμε την κίνηση χρειαζόμαστε ένα χρονικό διάστημα. Αυτό δε πού μπορεί να λεχθή, παραπέρα, για την κίνηση είναι: «ή κίνηση συνίσταται μόνο από το γεγονός ότι τα σώματα είναι μερικές φορές σε ένα μέρος και μερικές φορές σ' ένα άλλο». [Russell: (1965)].

Εν τούτοις, παρά τίς παραπάνω αναλύσεις, πιστεύουμε ότι ή ουσιαστική ερώτηση πού υπονοείται από το παράδοξο, δεν έχει άπαντηθή. Είναι χωρίς αξία, το να λέμε ότι δεν υπάρχει επόμενη στιγμή (βλ. λύση του Russell), ή, το να λέμε ότι δεν μπορούμε να μιλάμε για κίνηση σε μία χρονική στιγμή (βλ. λύση του Vlastos). Το λέμε δε αυτό, γιατί ενώ μπορούμε να ποῦμε δτι ένα σώμα βρίσκεται σε ένα μέρος σε μία στιγμή και σε ένα άλλο μέρος σε μία άλλη στιγμή, εν τούτοις, είναι αδύνατο για μας να πούμε πώς έγινε ή αλλαγή της θέσης. Πιο γενικά, δεν μπορούμε να πούμε τί σημαίνει «αλλαγή». Και αυτό είναι το ερώτημα πού υπονοείται από το παράδοξο αυτό του Ζήνωνα.

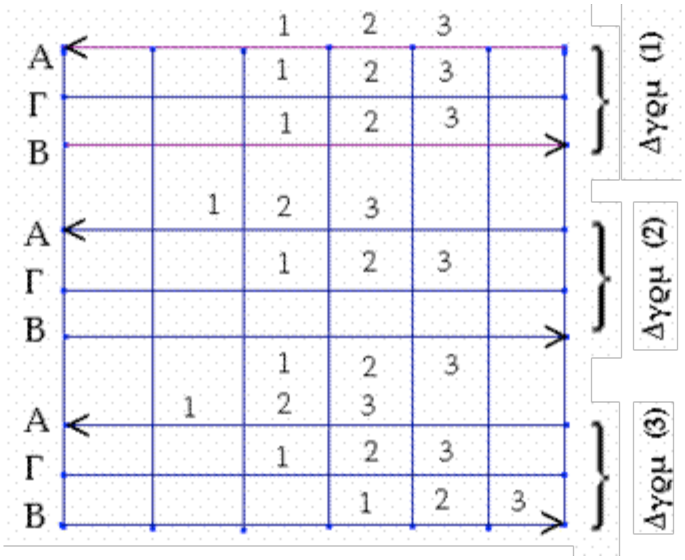
Έχει προταθή ['Από Russell και Braithwaite, βλ. στο Gale (1968)], δτι αυτό πού εννοούμε με την «αλλαγή» ενός πράγματος, πού συμβαίνει σε ένα χρονικό διάστημα, είναι μία ακολουθία διαδοχικών συμβάντων, πού όλα είναι καταστάσεις του 'ίδιου πράγματος.

'Αλλά αυτό μόνο ισχυροποιεί την άποψη του Παρμενίδη και του Ζήνωνα, ότι, δηλαδή, μας είναι αδύνατο να συλλάβουμε την κίνηση· και την αλλαγή με την βοήθεια της λογικής μας, γιατί ή λογική μας αντιλαμβάνεται την κίνηση σε ορούς ακινησίας.

5. Το παράδοξο του Σταδίου

5.1 Το ΠΑΡΑΔΟΞΟ αυτό θεωρείται ότι αναφέρεται εναντίον της υπόθεσης ότι υπάρχουν ελάχιστες αποστάσεις («όδόνια» ή «τοπόνια») και χρόνοι («χρονόνια»). "Ενα «όδό-νιο»

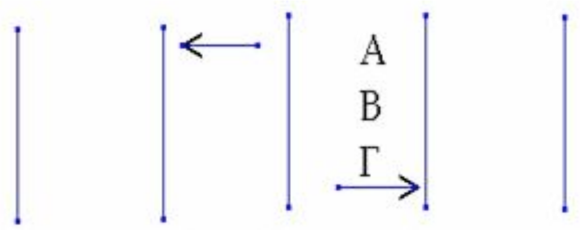
είναι το ελάχιστο διάστημα του χώρου και ένα «χρονόνιο» είναι το ελάχιστο διάστημα του χρόνου. Τόσο τα «όδόνια», όσο και τα «χρονόνια» είναι αδιαίρετα.
Το παράδοξο διατυπώνεται ως έξης: "Ας φανταστούμε τρεις παράλληλες σειρές σημείων, Α,Β και Γ. (Δγρμ 1).



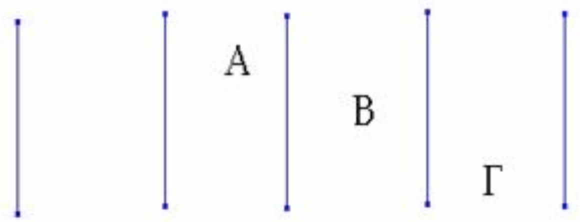
Οί αποστάσεις μεταξύ των καθέτων γραμμών παριστάνουν χωρικά ελάχιστα (δηλ.: «όδόνια»). Ή σειρά Γ είναι ακίνητη, ενώ οί δύο άλλες σειρές κινούνται με αντίθετες ταχύτητες. Ή σειρά Α περνά το Γ κινούμενη με την ταχύτητα του ενός «όδονίου» ανά «χρονόνιο», και ή σειρά Β κινείται με αντίθετη ταχύτητα από αυτήν της σειράς Α. Κατά την πρώτη στιγμή πού θεωρούμε τίς τρεις σειρές, το Α, είναι ευθυγραμμισμένο και τα Γ, και Β, [Δγρμ. 1)]. Την επόμενη στιγμή ακριβώς, το Β, είναι ευθυγραμμισμένο με το Α, και το $Γ_2$. [Δγρμ (3)]. Τώρα, σύμφωνα με τον Ζήνωνα, καθώς οί σειρές Α και Β

κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις, πρέπει να ύπάρχη μία χρονικά ενδιάμεση στιγμή στην οποία το Β, είναι ευθυγραμμισμένο με το Α-, [Δγρμ. (2)]. "Αν δε το Α, και το Β, έχουν συναντηθή, τότε αυτό πρέπει να συνέβη σ' ένα χρόνο ϊσο με το μισό του χρονόνι-ου. Από αυτό, ό Ζήνωνας συμπεραίνει δτι: «το μισό ενός δεδομένουχρόνου ισούται με το διπλό αυτού του χρόνου», πράγμα πού είναι παράλογο. "Αρα δεν μπορούμε να μιλάμε για κβαντισμένο χρόνο και χώρο.
5.2 Ό A'rpβd Szabσ (1966) μας έχει δόση μία Ιστορική ερμηνεία γΓ αυτό το παράδοξο. Κατά τον Szabσ, ό Ζήνωνας είχε υποστήριξη ότι το «μισό ενός δεδομένου χρόνου ισούται με το διπλάσιο του», γιατί —γΓ αυτόν— τόσο ό «μισός χρόνος», οσο και ό «ολόκληρος χρόνος» ήσαν άπειροσύνολα. Όπως δε, έχουμε δει, στην §3.2., δύο άπειροσύνολα, αν όχι εντελώς «ϊσα», είναι —εν τούτοις— ισοδύναμα στην μοντέρνα συνολοθεωρία. Έτσι, για τον Szabσ, αυτός ήταν ό λόγος γιατί ό Ευκλείδης περιέλαβε το αξίωμα «το δλο είναι μεγαλύτερο από το μέρος» στα «Στοιχεϊα» του. Γιατί ήθελε να περιοριστή σε πεπερασμένα σύνολα. Κατά την άποψη μας, το αξίωμα ότι «το όλον είναι μεγαλύτερο του μέρους», σχετίζεται και με το παράδοξο του Αχιλλέα και της χελώνας. 'Επί πλέον δε, είναι αυτό το αξίωμα πού βρίσκεται στίς ρίζες του παραδόξου (βλ. § 3.2.).

5.3. Εδώ, θα παρουσιάσουμε μία λύση του παραδόξου πού έχει δοθή από τους G.I Whitrow (1961), Β. Russell (1938) και M.Evellin [βλ. Rόssel: (1938)].
Σύμφωνα μ' αυτούς, σ' goto το παράδοξο, ό Ζήνων είναι ένοχος ενός λογικού σφάλματος, γιατί ένψ αξιώνει την ασυνέχεια, (ενψ δηλ.:, έχει υποθέσει ότι τα «όδόνια» και τα «χρονόνια» είναι αδιαίρετα), λέει ότι τα Β, και Α, συναντώναι, πράγμα πού υπονοεί ότι σιωπηλά επικαλείται ένα αξίωμα συνέχειας. "Ετσι, σύμφωνα με τον Μ. Evellin, τα Α, και Ε, δεν συναντώνται καθόλου. Το μόνο πού συμβαίνει είναι ότι, την μία στιγμή, το Α, είναι ευθυγραμμισμένο με το Β, και την επόμενη ακριβώς στιγμή, το Β, είναι ευθυγραμμισμένο με το Α,: και τίποτε δεν έχει συμβή μεταξύ των στιγμών.
Κατά την άποψη μας, στην περίπτωση του διαγράμματος (2), (οπού το Α, και το Β, συναντώνται μεταξύ των καθέτων γραμμών), ό Μ. Evellin δικαιώνεται. 'Αλλά, απ' την άλλη, ή λύση του Evellin υπονοεί ότι μετά από ένα «χρονόνιο», το Β, εμφανίζεται στο «τέλος» ενός διαστήματος του χώρου πού είναι πολλαπλάσιο ενός «όδονίου». Αυτή δε, ή παραδοχή, οδηγεί· σε 'ένα πρόβλημα πού άφορα την διαπερατότητα των υλικών σωμάτων. Γιατί, αν δεχτούμε ότι το χωρικό διάστημα πού διανύθηκε σ' ένα «χρονόνιο» είναι ένα πεπερασμένο πολλαπλάσιο ενός «όδονίου», τότε οποιοδήποτε εμπόδιο και αν τοποθε-τηθή μέσα σ' αυτό το διάστημα δε θα πρέπει να έμποδίζη την διέλευση του κινουμένου σώματος. 'Απ' όσα ομως γνωρίζουμε, το τελευταίο άφορα μία επίσημη ιδιότητα των φαντασμάτων!
5.4. Για να κάνουμε πιο σαφές το τί εννοούμε εδώ, θα έπαναδιατυπώσουμε το παράδοξο με τον ακόλουθο τρόπο. (Δργμ. 4 και 5).



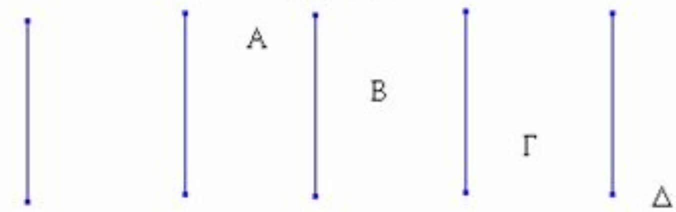
Δγρμ (4) στιγμή t



Δγρμ (5) στιγμή t

Στά διαγράμματα (4) και (5), οί αποστάσεις μεταξύ των καθέτων γραμμών αντιπροσωπεύουν «όδόνια». Εδώ, το Β δεν κινείται, και τα Α και Γ κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις και με την ϊδια ταχύτητα του ενός «όδονίου» ανά «χρονόνιο». Κατά την στιγμή t [Δγρμ. (1)], το Α είναι ευθυγραμμισμένο με τα Β και Γ. Μετά από ένα «χρονόνιο», το Α, το Β και το Γ, κατέχουν τίς θέσεις πού σημειώνονται στο διάγραμμα (5), οπού: (1): ή απόσταση του Α από το Β είναι ένα «όδόνιο», (2): ή απόσταση του Β από το Γ είναι ένα «όδόνιο», και (3): ή απόσταση του Γ από το Α είναι δύο «όδόνια». Το ϊδιο ομως αποτέλεσμα μπορούμε να έχουμε και στην περίπτωση οπού: (1): Το Α δεν κινείται, (2) το Β κινείται σε σχέση με το Α με ταχύτητα ενός «όδονίου» ανά «χρονόνιο» και προς την ϊδια κατεύθυνση πού κινείται το Γ, και (3): Το Γ κινείται σε σχέση με το Β, με την ταχύτητα τοο ενός «όδουίου» ανά «χρονόνιο», και προς την ϊδια κατεύθυνση με το Β. Έτσι, αν τα Α,Β και Γ είναι ευθυγραμμισμένα κατά την στιγμή t, θα καταλαμβάνουν τίς θέσεις του σχήματος (5) μετά από 'ένα «χρονόνιο». "Αν, δε, έχουμε περισσότερα σώματα, έστω τα Α, Β, Γ και Δ, τα όποια κατά την στιγμή t είναι ευθυγραμμισμένα [Δγρμ. (6)], τότε --με βάση την υπόθεση της σχετικής κίνησης πού χρησιμοποιήσαμε παραπάνω— την επόμενη ακριβώς στιγμή τα Α, Β,Γ και Δ, θα καταλαμβάνουν τίς θέσεις πού δείχνει το διάγραμμα (7), οπού ή απόσταση του Δ από το Α είναι τρία «όδόνια».

Δγρμ (6)



Δγρμ (7)

Κατά τον τρόπο αυτό, το Δ (σε σχέση με το Α) διανύει τρία «όδόνια» ανά «χρονόνιο». Έτσι ένα σώμα μπορεί να διανύση ένα πεπερασμένο πολλαπλάσιο «όδονίων» ανά «χρονόνιο». Αυτό δε, το πεπερασμένο πολλαπλάσιο των «όδονίων» μπορεί να είναι ένα αισθητό διάστημα, πράγμα πού μας έπιτρέ[1] πει να τοποθετήσουμε
το προαναφερθέν εμπόδιο μέσα σ' αυτό το διάστημα.

5.5 Στό τμήμα αυτό, θα συζητήσουμε την άποψη του Α. Grónbaum για το παράδοξο του σταδίου. Ό Α. Grónbaum (1968), πιστεύει οτι υπάρχει ένα προειδοποιητικό μάθημα για

μας, στο παράδοξο αυτό του Ζήνωνα. Το μάθημα αυτό είναι ή εξάρτηση του κύρους των γεγονότων (event - status) από την σχετική κίνηση. Κατά τον Grónbaum, το κατά πόσο οί ευθυγραμμίσεις των Α,—Β, και Α,—Β, [βλ. δγρμ.: (1), (2), (3)], μπορούν να χαρακτηρίζονται σαν γεγονός ή όχι, εξαρτάται από το μέγεθος της σχετικής ταχύτητας των δύο σειρών. "Ετσι, αν ή ταχύτητα είναι δύο «άλματα» (δηλ. δύο «όδόνια» ανά «χρονόνιο»), τότε ή ευθυγράμμιση δεν χαρακτηρίζεται σαν γεγονός. Από την άλλη, αν ή ταχύτητα αυτή είναι ένα «άλμα», τότε ή ευθυγράμμιση χαρακτηρίζεται σαν γεγονός. Κατά τον τρόπο αυτό, ή ευθυγράμμιση του Β, με το Α, δεν είναι γεγονός (αφού ή σχετική ταχύτητα του.Β, σε σχέση με το Α, είναι δύο «άλματα»): από την άλλη μεριά, ή ευθυγράμμιση του Α, με το Γ, είναι ένα γεγονός (αφού, εν σχέσει με το Γ,, ή ταχύτητα του Α, είναι «ένα άλμα») [βλ. Δγρμ (3)].
Κατά την άποψη μας, όταν λέμε —μαζί με τον Μ. Evellin— οτι το A_2 και το Β, δεν συναντώνται καθόλου, είναι το ϊδιο με το να λέμε —μαζί με τον Α. Grónbaum— οτι ή κάθετη ευθυγράμμιση των A_2 και Β, δεν είναι γεγονός. Έτσι, ή ερμηνεία του Grónbaum, οδηγεί στο πρόβλημα της διαπερατότητας των υλικών σωμάτων, πού συζητήσαμε στίς §5.3 και §5.4. του παρόντος.

6. Συμπέρασμα

Σ' ΑΥΤΟ το δοκίμιο προσπαθήσαμε να δείξουμε οτι τα παράδοξα του Ζήνωνα δεν έχουν βρει ακόμα μία ικανοποιητική λύση. Αυτός ό οξύς και γνήσιος στοχαστής παίζει ακόμη τον ρόλο του φιλοσοφικού κριτή τόσο για τους σύγχρονους μαθηματικούς, όσο και για τους σύγχρονους φυσικούς.
Μας έδωσε μία κριτική της άπειρης γεωμετρικής προόδου, προτείνοντας τα γνωστά παράδοξα της διχοτομίας και του Αχιλλέα, και συνεχίζει κρίνοντας την έννοια του ορίου. Το κύριο σημείο δε, της ερευνάς του είναι όχι το πότε, αλλά το πώς φτάνει ό Αχιλλέας τη χελώνα το πώς μπορεί να γίνη ή υπέρβαση του πεπερασμένου προς το άπειρο.
Στό παράδοξο του βέλους μας έδειξε οτι ή λογική μας δεν μπορεί να μας βοηθήση στην προσπάθεια πού κάνουμε να κατανοήσουμε λογικά την κίνηση και την αλλαγή. Μέσω της λογικής μας συλλαμβάνουμε την κίνηση σαν να εΐναι μία σύνθεση από ακινησίες. Έτσι, το παράδοξο αυτό είναι μία πρόκληση γι' αυτήν ακόμη τη λογική μας.
Όσον άφορα το παράδοξο του Σταδίου, νομίζουμε οτι οί λύσεις πού προσφέρθηκαν, οδήγησαν —στην πραγματικότητα αυτό το παράδοξο στην τελειότητα. Γιατί, τώρα φαίνεται πιο παράδοξο αφού συνεπάγεται την διαπερατότητα των υλικών σωμάτων.
Πιστεύουμε λοιπόν, δτι ό Ζήνωνας είναι ακόμη ζωντανός και μας κεντρίζει με τα παράδοξα του. Υπάρχει δε ακόμη πολύ μελέτη πού πρέπει να γίνη, για να βρεθή κάποτε μία ικανοποιητική λύση σ' αυτά τα παράδοξα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

H. Eves, (1953): "An introduction to *the* history *of mathematics",* (3rd edition, Holt, Rinehart and Winston).
R. M. Gale, (1968): *"The language of Time",* London, Routledge and Kegan Paul.
A. Grunbaum (1968): *"Modern Science und* Zeno's paradoxes", (George Allen and Unwin, London).

H.A. Fraenkel: "Abstract set *theory",* (3rd revised edition, North - Holland publishing Co., Amsterdam).
A. Nehamas (1981): "On Parmenides three ways of inquiry", περιοδικό: «Δευκαλίων», τ. 35/34, Αθήνα.
K.R. Popper (1972): "Conjectures and *Re futations",* (Routledge and Kegan Paul).
B. Russell (1965) "Mysticism and Logic", (Unwin Books, London).
B. Russell (1938): *"The principles of* Mathematics", (2rd edition, N.Y.: W.W. Norton and Company).
B. Russell (1922): "Our Knowledge of the external World", (Allen and Unwin, Ltd, London).
Σ. Σαραντόπουλος (1956): *«Διαφορικός Λογισμός»,* Αθήνα.
A. Szabσ (1966): *"The Origins of Euclidean Axiomatics",* (Lectures given at the University of London).
E. Te Hennepe (1963): "Language *Reform* and *Philosophical Imperialism: Another Round with Zeno",* Analysis, T. 23.
O. Testudo (1981): "Space for Zeno", Δευκαλίων, τ. 33/34.
Θ. Βέικος (1974): «Τα παράδοξα του Ζήνωνα και οί Καντιανές αντινομίες», Δευκαλίων, τ. Π.
Gr. Vlastos (1966) "A note on Zeno's Arrou/', Phronesis, t. 11).
H. Weyl (1963): *"Philosophy of Mathematics and natural Science",* (N.Y.: Atheneum).
G.J. Whitrow (1961): "The natural *Philosophy of time".* (London: Thomas Nelson and Sons, Ltd).