ΘΕΜΑΤΑ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να υπολογιστεί το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a}\cdot\vec{\beta}$ δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ αν:

ι) $|\vec{a}|=5, |\vec{\beta}|=7, (\vec{a},\vec{\beta})=\frac{\pi}{6}$, ιι) $|\vec{a}|=\sqrt{5}, |\vec{\beta}|=\frac{2}{3}, (\vec{a},\vec{\beta})=\frac{5\pi}{6}$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνονται διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν : $|\vec{\alpha}|=\sqrt{12}$, $|\vec{\gamma}|=5$, $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=12$, $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{\pi}{6}$ και $(\vec{\beta},\vec{\gamma})=\frac{2\pi}{3}$.Να βρείτε :

i)Το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$

ii) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Δίνονται διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$,με $|\vec{\alpha}|=4$ και $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{\pi}{3}$.Αν ισχύει $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})=28$ να βρείτε ::

i) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

ii) Το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$

iii) το εσωτερικό γινόμενο $(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})\cdot(2\vec{\alpha}+\vec{\beta})$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα του επιπέδου με $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$ και $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{2\pi}{3}$. Αν $\vec{v}=3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$, να υπολογίσετε: **α)** Το $|\vec{v}|$ **β)** Τις γωνίες $(\vec{\alpha},\vec{v})$ και $(\vec{v},\vec{\beta})$.

ΑΣΚΗΣΗ 5

. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, με μέτρα $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$, που σχηματίζουν γωνία $\varphi = \frac{2\pi}{3}$

Αν $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$, να βρεθούν τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$ και η μεταξύ τους γωνία

ΑΣΚΗΣΗ 6

. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ *και* $\vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = 45°$,

να υπολογιστεί η γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\alpha} - \vec{\beta}}\right)$.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x, -1)$, $\vec{\beta} = (2, y)$ και $\vec{\gamma} = (x-5, 3)$, για τα οποία ισχύει ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$.

i) Να βρείτε τις τιμές των x,y

ii)Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in R$ ισχύει $(\lambda\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\beta} - \vec{\gamma}) = 38$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Δίνονται διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$ και $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |4\vec{\beta} - 5\vec{\alpha}|$.
Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$, $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -54$ και $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + 4\vec{\gamma} = \vec{0}$.

i) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}| = 4$

ii) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$

ΑΣΚΗΣΗ 10

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=3$, $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{2\pi}{3}$ και $|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|=7$.

i)Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=3$

ii)Να βρείτε το $|4\vec{\alpha}+3\vec{\beta}|$

ΑΣΚΗΣΗ 11

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=4$ και $|4\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|$.

i)Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=3$

ii)Να βρείτε το $|3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|$

ΑΣΚΗΣΗ 12

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\perp\left(\vec{\alpha}-4\vec{\beta}\right)$ και

$|2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}|=5$

i)Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}|=2$ και $|\vec{\beta}|=1$

ii)Να βρείτε το $|3\vec{\alpha}+8\vec{\beta}|$

ΑΣΚΗΣΗ 13

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{2\pi}{3}$, $\vec{\alpha}+\vec{\beta}\perp\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $\left|3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right|=7$. Να υπολογιστούν τα $|\vec{\alpha}|,|\vec{\beta}|$.

ΑΣΚΗΣΗ 14

Αν για τα διανύσματα $\vec{a},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ισχύει: $\vec{a}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $\frac{|\vec{a}|}{2}=\frac{|\vec{\beta}|}{3}=\frac{|\vec{\gamma}|}{5}$, να δείξετε ότι: το $\vec{a}$ είναι ομόρροπο του $\vec{\beta}$, και ότι: το διάνυσμα $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπο του $\vec{\gamma}$.

/

ΑΣΚΗΣΗ 15

Δίνονται διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$, με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\gamma}| = 7$, $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = -19$ και $2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} - \vec{\gamma} = \vec{0}$.

i) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\beta}| = 3$.

ii) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 4$.

iii) Να βρείτε το $|4\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}|$

iv) Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in R$ είναι: $(\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}) \perp (8\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta})$

ΑΣΚΗΣΗ 16

Αν για τα μη παράλληλα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \left(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}}\right) = 60°$

και $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$, $|\vec{\gamma}| = 4$, να βρεθεί το μέτρο του $3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + \vec{\gamma}$.

Δίνονται διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 1$, $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = 60°$ και:

$(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (5\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$

α) Να βρείτε το $|\vec{\beta}|$

β) Αν $\vec{\gamma} = -2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, να βρείτε τη γωνία: $\varphi = \left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\gamma}}\right)$

ΑΣΚΗΣΗ 17

Δίνονται μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, καθώς και τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$, για τα οποία ισχύουν: $2\vec{u} + \vec{v} = 4\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{v} - \vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ και $(\vec{u}, \vec{v}) = 60°$

α) Να γράψετε καθένα από τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

β) Να βρείτε τη γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right)$

ΑΣΚΗΣΗ 18

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 5$, $|\vec{\gamma}| = 7$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$. Να βρεθεί η γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right)$ και η τιμή της παράστασης $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 2\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} + 3\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$.

ΑΣΚΗΣΗ 19

. Δίνονται διανύσματα α και β, με $|\vec{\alpha}|=6$, $|\vec{\beta}|=4$, για τα οποία ισχύει ότι:

$(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})=-24$

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$

β) Θεωρούμε διάνυσμα $\vec{\gamma}$ τέτοιο, ώστε: $\vec{\gamma}\,//\,(2\vec{\alpha}+\sqrt{3}\cdot\vec{\beta})$ και $(\vec{\gamma}+3\vec{\beta})\perp(4\sqrt{3}\cdot\vec{\alpha}-9\vec{\beta})$

i) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των α και β.

ii) Να βρείτε τη γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}}\right)$.

ΑΣΚΗΣΗ 20

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, με μέτρα $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=5$ Να υπολογίσετε:

α) Το συνημίτονο της γωνίας των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

β) Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{u}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$ *και* $\vec{v}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$

γ) Τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{u}$ *και* $\vec{v}$

ΑΣΚΗΣΗ 21

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}=(1,2)$ και $\vec{\beta}=(2,3)$.

α. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}=5\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$

β. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το $\vec{\gamma}$ με τον άξονα x΄x .

γ. Να βρείτε τον αριθμό $k\in R$,ώστε το διάνυσμα $\vec{u}=(k^2-k,k)$ να είναι κάθετο στο $\vec{a}$

ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

ΘΕΜΑ 1

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\overrightarrow{AB}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=-3\vec{\beta}$, όπου $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{2\pi}{3}$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$, $(4\vec{\beta}+2\vec{\alpha})^2$, $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$.

β) Αν Μ είναι το μέσον της πλευράς ΒΓ:

i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

ii) Να βρείτε τη γωνία των $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

ΘΕΜΑ 2

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$.

Έστω τα διανύσματα $\vec{u}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε :

i)το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

ii)τα μέτρα $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$

iii) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u}\cdot\vec{v}$

iv)το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$

ΘΕΜΑ 3

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις $2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}=(4,-2)$ και $\vec{\alpha}-3\vec{\beta}=(-7,8)$

i)να δείξετε ότι $\vec{\alpha}=(-1,2)$ και $\vec{\beta}=(2,-2)$.

ii)να βρεθεί ο κ ∈R ,ώστε τα διανύσματα $\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$ να είναι κάθετα

iii)να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\gamma}=(3,-1)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες ,από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο είναι : $|\overrightarrow{AB}| = 4$, $|\overrightarrow{A\Gamma}| = 6$ και η γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ *και* $\overrightarrow{A\Gamma}$ *είναι* $\frac{\pi}{3}$. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, τότε :

i) να υπολογίσετε το $|\overrightarrow{AM}|$

ii) να αποδείξετε ότι η προβολή του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ πάνω στο διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ είναι το διάνυσμα $\frac{14}{19}\overrightarrow{AM}$

ΘΕΜΑ 5

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{u} = \vec{a} - \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $(\alpha, \beta) = 120^0$

Β 1. Να αποδείξετε ότι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\frac{1}{2}$

Β 2. Να αποδείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$ είναι $|\vec{u}| = \sqrt{3}$

Β 3. Να υπολογίσετε την γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{u}$

Β 4. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ αν $\vec{a} \perp (\vec{a} + \lambda\vec{\beta})$

ΘΕΜΑ 6

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^0$. Δίνεται επίσης το τρίγωνο ΑΒΓ για το οποίο είναι $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$, $\overrightarrow{B\Gamma} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$. Να δείξετε ότι:

Α. Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι : $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 1$.

Β. Αν Μ το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ, τότε:

β_1) Να δείξετε ότι: $\overrightarrow{AM} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

β_2) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AM}$.

Γ. Να αποδείξετε ότι η γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AM}$ είναι 120^0.