

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΙΨΗ

- 1^η/ Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης όταν
- Έχει εστία $F(-4,0)$ και μήκος μεγάλου άξονα 20
 - $F(0,2)$
 - $F(4,0)$ και εκκενρότητα $\frac{1}{2}$
 - Αν $a=2b$ και διέρχεται στο $\omega(6,4)$
 - Έχει μεγάλο άξονα στον $x'x$ και διέρχεται από τα $M(3,-4)$ και $N(-6,2)$
 - Έχει μεγάλο άξονα στον $y'y$, διέρχεται στο $\omega(\sqrt{2},2)$ και έχει εστιακή απόσταση $F'F=4$.

- 2^η/ Δίνεται η έλλειψη $4x^2 + 25y^2 = 100$.
 Να βρεθούν: α) τα μήκη των αξόνων
 β) οι εστίες
 γ) Η εκκενρότητα

- 3^η/ Να βρεθεί η εκκενρότητα και οι εστίες και δευτερεύουσες από τις ελλείψεις:
- $x^2 + 16y^2 = 9$
 - $x^2 + 2y^2 = 1$
 - $4x^2 + 25y^2 = 16$
 - $4x^2 + 3y^2 = 7$

- 4^η/ Δίνεται η έλλειψη: (c) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
 και το σημείο $M(4,4)$
- Να δείξετε ότι το M είναι εσωτερικό σημείο της έλλειψης
 - Να βρείτε την εξίσωση της χορδής της έλλειψης που έχει μέσο το M .

- 5^η/ Έστω F και F' οι εστίες της έλλειψης $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ και M σημείο της. Αν $(MF) = 1$, να βρεθεί το μήκος MF'

6^η/ Αν ένα γηείο M της ελλείψης $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ απέχει από την μια εστία S , να βρείτε ποσο απέχει από την άλλη εστία.

7^η/ Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ) που τέμνει την ελλείψη σε δύο σημεία K, Λ έτσι ώστε το $K\Lambda$ να έχει ως μέσο το $M(1, -1)$

8^η/ Δίνεται η ελλείψη $(C): x^2 + 2y^2 = 4$, και η ευθεία $2x - y + 1 = 0$ (ϵ)

α) Δείξτε ότι η ευθεία (ϵ) τέμνει την ελλείψη σε δύο σημεία K, Λ .

β) Να υπολογιστούν οι ω/νεις του μέσου της χορδής $K\Lambda$.

γ) Να υπολογιστεί το $\vec{OK} \cdot \vec{O\Lambda}$, όπου O το κέντρο της ελλείψης

9^η/ Να βρεθούν οι εφανατομένες της ελλείψης $9x^2 + 16y^2 = 144$ που είναι παράλληλες στην $(\epsilon): x + y = 0$.

10^η/ Έστω η ελλείψη $x^2 + 2y^2 = 9$ (C) . Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το $M(-1, 1)$, τέμνει την ελλείψη σε δύο σημεία Γ και Δ ώστε το M να είναι το μέσο της χορδής $\Gamma\Delta$.

11^η/ Δίνεται η ελλείψη $(C): \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$. Να βρεθεί η εξίσωση εφανατομένης της C τέτοιας ώστε να σχηματίζει με τους άξονες ημιάξονες Ox και Oy ισόσκελες τρίγωνο.

12^η/ Να βρεθούν τις εφανατομένες της ελλείψης $x^2 + 3y^2 = 3$ (C) οι οποίες. (α) Είναι παράλληλες στην $y = 4x - 5$ (ϵ)
(β) Είναι κέντρο της $x - 4y + 7 = 0$ (γ)

13^η/ Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ (C_1) και η ελλείψη
 $3x^2 + y^2 = 6$ (C_2)

- α) Να βρεθούν τα κοινά τους σημεία
 β) Να εφετασθεί αν η εφαπτομένη της ελλείψης στο $P(-1, \sqrt{3})$ εφάπτεται και του κύκλου.
 γ) Να δείξετε ότι τα κοινά τους σημεία είναι μετρώσιμα ορθογώνια παραλληλογράφικα.

14^η/ Να βρεθεί η εξίσωση της ελλείψης C που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων, διέρχεται στο το κέντρο του κύκλου (C_1): $4x^2 + 4y^2 - 8x - 4\sqrt{3}y + 3 = 0$ και την εστία της παραβολής (C_2): $y^2 = 8x$

15^η/ Ο κύκλος με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα θ διέρχεται στο ως εστία της ελλείψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$
 Να βρεθεί η ευμενότητα της ελλείψης.

16^η/ Έστω η ελλείψη (C): $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4+1} = 1$
 α) Να βρεθεί το λ ώστε η C να παριστάνει ελλείψη με εστία στο $y'y$
 β) Να βρεθεί το λ ώστε η ελλείψη C να έχει εστία τα σημεία $E(0, 2\sqrt{2})$, $E'(0, -2\sqrt{2})$

17^η/ Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της ελλείψης (C): $4x^2 + y^2 = 20$ οι οποίες
 α) είναι παράλληλες στην (E): $4x + y + 7 = 0$
 β) είναι κάθετες στην (γ): $x + 4y - 3 = 0$

18^η/ Να βρεθούν οι εφαπτομένες της ελλείψης (C): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ που αγγίζουν στο το σημείο $M(3, 5)$

19^η/ Να βρεθεί η εφασπτική της (C): $x^2 + 4y^2 = 10$
 που: α) Έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{3}{2}$
 β) Διέρχονται στο $\omega(4, 1)$

20^η/ Δίνεται η (C): $9x^2 + 4y^2 = 36$ να δείξετε
 ότι η $y = 2x + 5$ (E) εφαπτόμενη της ελλειψης

21^η/ Να βρεθεί η εφασπτική της (C): $3x^2 + 8y^2 = 45$
 που οδηγεί στο την αρχή των αξόνων ονόματι ω για
 με $3k$.

22^η/ Δίνεται η ελλειψη (C): $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
 και η εφασπτική (E) της ελλειψης στο τυχαίο
 σημείο M. Η (E) τέμνει την εφασπτική της (C)
 στο A στο σημείο P. Να δείξετε ότι $OP \parallel A'M$

23^η/ Να αποδείξει ότι το γινόμενο των αποστάσεων
 των εσσιών F και F' μιας ελλειψης στο κάθε
 εφασπτική της είναι σταθερό

24^η/ Η εφασπτική της ελλειψης (C): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
 σε ένα τυχαίο σημείο της M
 τέμνει την (D): $x = \frac{a^2}{\gamma}$ στο P. Να δείξετε ότι $\widehat{MP} = 90^\circ$

25^η/ Έστω η ελλειψη (C): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
 και η εφασπτική της ελλειψης στο σημείο M
 διαφορετικά από τις κορυφές της. Έστω M' η προβολή
 του M στον x-αξονα. Αν η (E) και η καθετή αυτής
 στο M τέμνουν τον x-αξονα στα K και Λ ν.δ.ο
 α) $(OK) \cdot (OL) = \gamma^2$ β) $\frac{(OM')}{(ON')} = \frac{a^2}{b^2}$