

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΑΝΙΣΩΣΗ

1. Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & x^2 - x - 2 \leq 0 \\ \text{ii)} & x^2 - 3x + 2 > 0 \\ \text{iii)} & x^2 - 6x + 5 \geq 0 \\ \text{iv)} & x^2 - 5x + 6 > 0 \\ \text{v)} & x^2 + x + 6 > 0 \\ \text{vi)} & 2x^2 - 3x + 1 < 0 \end{array}$$

$$[-1,2], \quad (-\infty,1) \cup (2,+\infty), \quad (-\infty,1] \cup [6,+\infty), \quad (-\infty,2) \cup (3,+\infty), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \left(\frac{1}{2},1\right)$$

2. Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & x^2 - 2 \leq 0 \\ \text{ii)} & x^2 - 4 \geq 0 \\ \text{iii)} & x^2 - 6x \geq 0 \\ \text{iv)} & x^2 - 5x < 0 \\ \text{v)} & x^2 + 6 > 0 \\ \text{vi)} & 2x^2 - 8 < 0 \end{array}$$

$$[-\sqrt{2},\sqrt{2}], \quad (-\infty,-2] \cup [2,+\infty), \quad (-\infty,0] \cup [6,+\infty), \quad (-\infty,0) \cup (5,+\infty), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (-2,2)$$

3. Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & -3x^2 + 4x - 1 \leq 0 \\ \text{ii)} & x^2 + x - 2 < 0 \\ \text{iii)} & -x^2 - 3x + 10 \leq 0 \\ \text{iv)} & x^2 - 5x < 0 \\ \text{v)} & 2x^2 + x > 0 \\ \text{vi)} & 2x^2 + 1 < 0 \end{array}$$

$$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup [1,+\infty), \quad (-2,1), \quad (-\infty,-5] \cup [2,+\infty), \quad (0,5), \quad \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [0,+\infty), \quad \text{αδύνατη}$$

4. Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$\begin{array}{ll} \text{α)} & -x^2 + 4x - 4 \leq 0 \\ \text{β)} & x^2 + 2x + 1 \leq 0 \\ \text{γ)} & 9x^2 - 6x + 1 < 0 \\ \text{δ)} & x^2 + 5x + 7 < 0 \\ \text{ε)} & 2x^2 - 3x > 0 \\ \text{στ)} & 2x^2 + x + 1 > 0 \end{array}$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad x = -1, \quad \text{αδύνατη}, \quad \text{αδύνατη}, \quad \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup [0,+\infty), \quad x \in \mathbb{R}$$

5. Για ποιες τιμές του x αληθεύουν ταυτόχρονα οι ανισώσεις:

$$\text{α)} \quad x^2 + x - 2 > 0 \quad \text{και} \quad x^2 + 2x - 8 \leq 0$$

$$\text{β)} \quad x^2 - 3x + 2 > 0 \quad \text{και} \quad 16 - x^2 \geq 0$$

$$\text{γ)} \quad x^2 - x - 2 > 0 \quad \text{και} \quad x^2 - 2x + 1 < 0$$

$$6. \text{ Να λυθεί: } 4x + 4 < x^2 + 7x \leq 4x + 10$$

$$7. \text{ Να λυθεί: } 2x^2 - 8x - 15 < x(x-6) \leq 3x^2 - 4(2x+1)$$

$$8. \text{ Δίνεται το τριώνυμο } f(x) = -x^2 + 3x - 2 \text{ να βρεθούν τα πρόσημα των παραστάσεων: } \text{α)} \quad f\left(\frac{2021}{2020}\right) \quad \text{β)} \quad f(-100)$$

9. Να προσδιοριστεί το πρόσημο της παράστασης:

$$A = \left(\frac{125}{124} + 1\right)^2 - \left(\frac{125}{124} + 1\right) - 2$$

$$10. \text{ Να βρείτε το } \lambda, \text{ ώστε η εξίσωση } (\lambda - 3)x^2 - \lambda x - 1 = 0 \quad \lambda \neq 3 \text{ να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. } \lambda \in (-\infty, -6) \cup (2,3) \cup (3,+\infty)$$

$$11. \text{ Να δείξετε ότι η εξίσωση } x^2 - (\kappa - 1)x - \kappa - 1 = 0 \text{ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε } \kappa \in \mathbb{R}.$$

$$12. \text{ Να βρείτε το } \lambda, \text{ ώστε η εξίσωση } x^2 - (\lambda + 5)x + 3\lambda - 7 = 0 \text{ να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. } \lambda \in (-\infty, -1) \cup (3,+\infty)$$

$$13. \text{ Να βρείτε το } \lambda, \text{ ώστε η εξίσωση } (\lambda - 1)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda - 1 = 0 \text{ να μην έχει πραγματικές ρίζες. } \lambda \in \mathbb{R} - \{1\}$$

14. Να βρείτε το λ , ώστε η εξίσωση $(\lambda+5)x^2 + (\lambda+2)x + 1 = 0$ να έχει πραγματικές ρίζες.
 $\lambda \in (-\infty, -5) \cup (-5, 4) \cup (4, +\infty)$
15. Αν το τριώνυμο $f(x) = x^2 + 4x + \lambda + 3$ είναι μη αρνητικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $\lambda \cdot f(x) = (x^2 + 2)(\lambda - 1)$.
16. Να βρείτε το λ ώστε η ανίσωση $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x + \lambda - 3 > 0$ $\lambda \neq 0$ να αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 $\lambda \in \left(\frac{5 + 2\sqrt{7}}{3}, +\infty \right)$
17. Να βρείτε το λ ώστε η ανίσωση $(\lambda - 1)x^2 - 2(3\lambda - 1)x - 3\lambda + 1 > 0$ $\lambda \neq 1$ να αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 $\lambda \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right)$
18. Να βρείτε το λ ώστε η ανίσωση $4x^2 - 4(2\lambda - 1)x + 4 - 3\lambda \geq 0$ να αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 $\lambda \in \left[-\frac{3}{4}, 1 \right]$
19. Να βρείτε το λ ώστε η ανίσωση $(\lambda - 6)x^2 + (\lambda - 3)x - 1 < 0$ να αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 $\lambda \in (-3, 5)$
20. Να βρείτε το λ ώστε η ανίσωση $(\lambda - 1)x^2 + (\lambda - 1)x + 1 > 0$ να αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
21. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda + 1)x - 3 = 0$
 α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
 β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης να βρεθεί το λ ώστε να ισχύει:
 $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 < (x_1 + x_2)^2$
22. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x - 2 = 0$
 α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
 β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης να βρεθεί το λ ώστε να ισχύει:
 $x_1^2 + x_2^2 + 3x_1 x_2 < \lambda - 3$
23. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x = \lambda + 3$
 α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
 β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης να βρεθεί το λ ώστε να ισχύει:
 $x_1 + x_2 < -2(2x_1 x_2 + 1)$
24. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda = 0$
 α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
 β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης να βρεθεί το λ ώστε να ισχύει:
 $x_1^2 + x_2^2 < -2(2x_1 x_2 + 1)$
25. Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 2x - 8$
 Α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x .
 Β) Αν $\kappa = \frac{-8889}{4444}$ τι συμπέρασμα μπορούμε να βγάλουμε για το πρόσημο της παράστασης $\kappa^2 - 2\kappa - 8$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 Γ) Αν ισχύει $-4 < \mu < 4$ ποιο είναι το πρόσημο της παράστασης:
 $\mu^2 - 2|\mu| - 8$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
26. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x + \lambda - 3 = 0$
 α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
 β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης να βρεθεί το λ ώστε να ισχύει:

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 < 5x_1 x_2$$

γ) Για τις τιμές του λ του προηγούμενου ερωτήματος να απλοποιηθεί η

παράσταση : $A = \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda + 4} + \sqrt{4\lambda^2 - 4\lambda + 1}$

27. Δίνεται το τριώνυμο $-x^2 + 2x + 3$

A) Να βρεθεί το πρόσημο του τριωνύμου

B) Αν για τον αριθμό κ ισχύει ότι $|2\kappa - 1| \leq 1$

i) Να δείξετε ότι $5 \leq \kappa \leq 6$

ii) Να βρεθεί το πρόσημο του αριθμού

$$\mu = 3 + 2(10\kappa - 46) - (10\kappa - 46)^2$$