

ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

(3^ο Μάθημα κύκλου)

Εξίσωση κύκλου: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ **(1)**

Στην μορφή αυτή το κέντρο είναι : $K(x_0, y_0)$ και η ακτίνα του ρ

Εξίσωση	Κέντρο - ακτίνα
$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3$	$K(1, -2)$, $\rho = \sqrt{3}$
$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = 2$	$K\left(\frac{3}{2}, 1\right)$, $\rho = \sqrt{2}$
$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 1$	$K(4, -3)$, $\rho = 1$
$(2x - 5)^2 + (2y + 2)^2 = 25$	$K\left(\frac{5}{2}, -1\right)$, $\rho = \frac{5}{2}$
Κέντρο - ακτίνα	Εξίσωση
$K(2, 1)$, $\rho = 2$	$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$
$K(-1, 0)$, $\rho = 4$	$(x + 1)^2 + y^2 = 16$
$K\left(-1, \frac{3}{2}\right)$, $\rho = 6$	$(x + 1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 36$
$K\left(\frac{-1}{3}, 1\right)$, $\rho = 7$	$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + (y - 1)^2 = 49$

Παράδειγμα 1: Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 4x - y - 1 = 0$ να εξεταστεί αν είναι εξίσωση κύκλου και να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του.

α τρόπος

$$x^2 + y^2 + 4x - y - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + y^2 - y - 1 = 0$$

$$x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 1 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{21}{4} \quad \text{άρα έχουμε}$$

εξίσωση κύκλου με κέντρο $K\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{21}}{2}$

β τρόπος

Η εξίσωση έχει $A=4$ $B=-1$ $\Gamma=-1$

$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 4^2 + (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 21 > 0$ άρα έχουμε εξίσωση κύκλου με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ δηλ $K\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma} = \frac{\sqrt{21}}{2}$

Παράδειγμα 2: Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 3x + y + 5 = 0$ να εξεταστεί αν είναι εξίσωση κύκλου και να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του.

α τρόπος

$$x^2 + y^2 + x + y + 5 = 0 \Rightarrow x^2 + x + y^2 + y + 5 = 0$$

$$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 5 = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{9}{2} \quad \text{άρα}$$

δεν έχουμε εξίσωση κύκλου

β τρόπος

Η εξίσωση έχει $A=1$ $B=-1$ $\Gamma=+5$

$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 1^2 + (-1)^2 - 4 \cdot 5 = -18 < 0$ άρα έχουμε δεν έχουμε εξίσωση κύκλου

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΚΥΚΛΟΥ ΙΙ

Όταν ο κύκλος δεν έχει κέντρο την αρχή των αξόνων δηλ. η εξίσωση του έχει την μορφή:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

Δεν υπάρχει στο σχολικό βιβλίο ο τύπος που δίνει την εφαπτομένη και για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούμε άλλες τεχνικές

Προσδιορισμός Εξίσωσης εφαπτομένης

A) Γνωρίζω σημείο επαφής $A(x_A, y_A)$

Θεωρώ $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της εφαπτομένης και χρησιμοποιώ το δεδομένο ότι η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ακτίνα ΟΑ
Δηλ. ότι

B) Δεν γνωρίζω σημείο επαφής

1) **Γνωρίζω ότι η εφαπτομένη είναι // σε γνωστή ευθεία** $Ax + By + \Gamma = 0(\eta)$

Γράφω την γενική μορφή όλων των παράλληλων προς την (η) ευθειών που έχουν μορφή $Bx - Ay + \lambda = 0(\varepsilon)$ και προσδιορίζω το λ από το στοιχείο ότι το κέντρο του κύκλου Κ απέχει από την (ε) απόσταση ίση με την ακτίνα του κύκλου.

$$d(K, \varepsilon) = \rho$$

3) **Γνωρίζω ότι η εφαπτομένη είναι $\perp$ σε γνωστή ευθεία** $Ax + By + \Gamma = 0(\eta)$

Γράφω την γενική μορφή όλων των κάθετων προς την (η) ευθειών που έχουν μορφή $Ax + By + \lambda = 0(\varepsilon)$ και προσδιορίζω το λ από το στοιχείο ότι το κέντρο του κύκλου Κ απέχει από την (ε) απόσταση ίση με την ακτίνα του κύκλου.

$$d(K, \varepsilon) = \rho$$

4) **Γνωρίζω ότι η εφαπτομένη διέρχεται από εξωτερικό ως προς τον κύκλο σημείο** $B(x_B, y_B)$

Γράφω το σύνολο όλων των ευθειών που διέρχονται από το εξωτερικό σημείο $B(x_B, y_B)$ και αυτές είναι :

- Η κατακόρυφη ευθεία $x = x_B$
- Οι ευθείες της μορφής $y - y_B = \lambda(x - x_B)$, $\lambda \in R$

Εξετάζω αν η πρώτη αποτελεί εφαπτομένη του κύκλου και προσδιορίζω το λ ώστε η δεύτερη να είναι εφαπτομένη του κύκλου. (και τα δύο, εξέταση και προσδιορισμός γίνεται με την βοήθεια του στοιχείου $d(K, \varepsilon) = \rho$).

ΑΣΚΗΣΗ 1 (Α) : Να προσδιοριστεί η εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0 \quad (c) \quad \text{στο σημείο του } A(1, -1).$$

Το σημείο A είναι σημείο του κύκλου γιατί επαληθεύει την εξίσωσή του

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 = 5$$

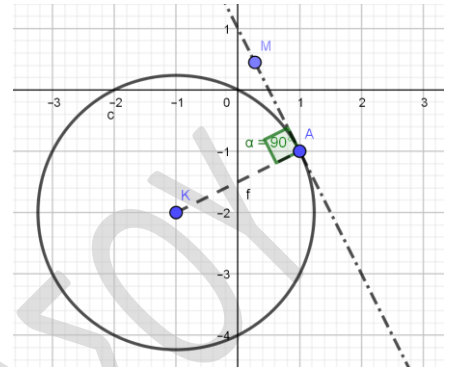
Ο κύκλος έχει κέντρο το $K(-1, -2)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$

Θεωρούμε $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της ζητούμενης εφαπτομένης του κύκλου .

$$\text{Θα ισχύει : } \vec{KA} \cdot \vec{AM} = 0$$

$$\vec{KA} = (1+1, -1+2) = (2, 1) \quad \vec{AM} = (x-1, y+1)$$

$$\vec{KA} \cdot \vec{AM} = 0 \Leftrightarrow 2(x-1) + 1(y+1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 1 = 0$$



ΑΣΚΗΣΗ 5 (Β1) : Να προσδιοριστεί η εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 13 \quad \text{που είναι κάθετη προς την ευθεία } 3x + 2y - 1 = 0 (\eta)$$

Όλες οι ευθείες που είναι κάθετες στην (η) έχουν μορφή $3x + 2y + \lambda = 0 (\varepsilon)$

Για να αποτελούν εφαπτομένη του κύκλου θα πρέπει :

$$d(K, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + \lambda|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \sqrt{13} \Leftrightarrow |\lambda - 4| = 13 \Leftrightarrow \lambda - 4 = \pm 13$$

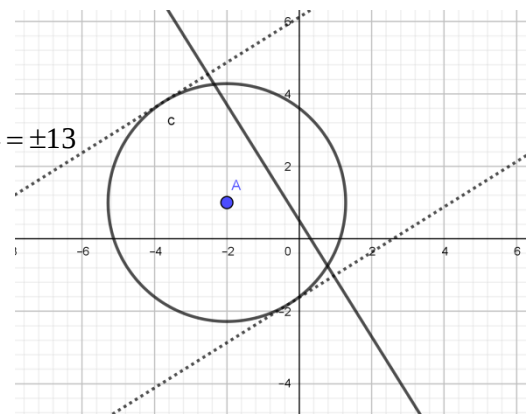
$$\lambda - 4 = 13 \quad \lambda = 17$$

$$\eta \quad \Leftrightarrow \quad \eta$$

$$\lambda - 4 = -13 \quad \lambda = -9$$

Για $\lambda = 17$ έχω την εφαπτομένη : $3x + 2y + 17 = 0 (\varepsilon_1)$

Για $\lambda = -9$ έχω την εφαπτομένη : $3x + 2y - 9 = 0 (\varepsilon_2)$



ΑΣΚΗΣΗ 5 (Β4) : Να προσδιοριστεί η εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου

$(x-1)^2 + y^2 = 4$ που διέρχονται από το σημείο $B(3,3)$.

Το σημείο B δεν ανήκει στον κύκλο αφού δεν επαληθεύει την εξίσωσή του:

$$(x_B - 1)^2 + y_B^2 \neq 4$$

Το σύνολο όλων των ευθειών που διέρχονται από το εξωτερικό σημείο $M(3,3)$ και αυτές είναι :

- Η κατακόρυφη ευθεία $x = 3$ (**ε1**)
- Οι ευθείες της μορφής $y - 3 = \lambda(x - 3)$, (**ε2**) $\lambda \in \mathbb{R}$

Εξετάζω αν η πρώτη αποτελεί εφαπτομένη του κύκλου

$$x = 3 \Rightarrow x + 0y - 3 = 0$$

$$d(K, \varepsilon_1) = \frac{|1 + 0 - 3|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |-2| = 2 = \rho \quad \text{άρα η ευθεία}$$

$x = 3$ (**ε1**) είναι εφαπτομένη του κύκλου.

Για να είναι η $y - 3 = \lambda(x - 3) \Rightarrow \lambda x - y + 3 - 3\lambda = 0$ εφαπτομένη του κύκλου θα πρέπει

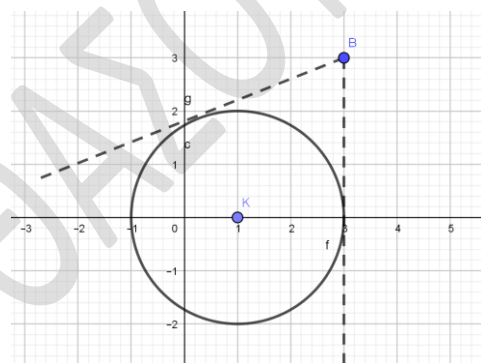
$$d(K, \varepsilon_2) = \rho \Rightarrow \frac{|\lambda \cdot 1 - 0 + 3 - 3\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 2 \Rightarrow |3 - 2\lambda| = 2\sqrt{\lambda^2 + 1}$$

$$|3 - 2\lambda|^2 = (2\sqrt{\lambda^2 + 1})^2 \Rightarrow 12\lambda = 5 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{12}$$

$$\text{Για } \lambda = \frac{5}{12} \text{ η (ε2) γράφεται: } \frac{5}{12}x - y + 3 - 3 \cdot \frac{5}{12} = 0 \Rightarrow 5x - 12y + 21 = 0$$

Άρα οι ευθείες του κύκλου που διέρχονται από το σημείο $M(3,3)$ είναι:

$$x = 3 \text{ ή } 5x - 12y + 21 = 0$$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1: Να προσδιοριστεί η εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5 \quad \text{στο σημείο του } A(-1,-3).$$

ΑΣΚΗΣΗ 2: Να προσδιοριστεί η εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 10 \quad \text{στο σημείο του } A(-2,3).$$

ΑΣΚΗΣΗ 3: Να προσδιοριστεί η εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου

$$(x+3)^2 + (y-4)^2 = 100 \quad \text{που είναι παράλληλη στον } \psi\text{-άξονα}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4: Να προσδιοριστεί η εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου

$$(x-5)^2 + (y+1)^2 = 10 \quad \text{που είναι παράλληλη στην ευθεία}$$

$$x-3y+6=0(\eta) \cdot (x-3y+2=0 \quad x-3y-18=0)$$

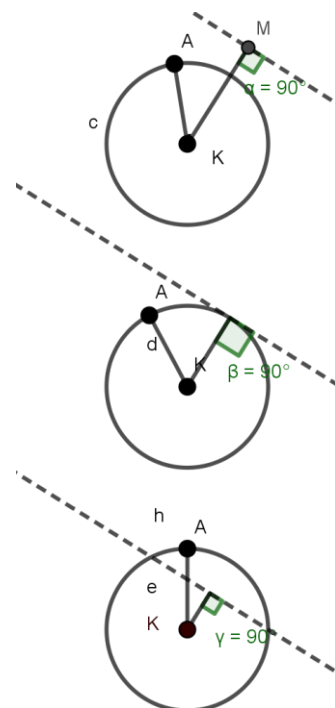
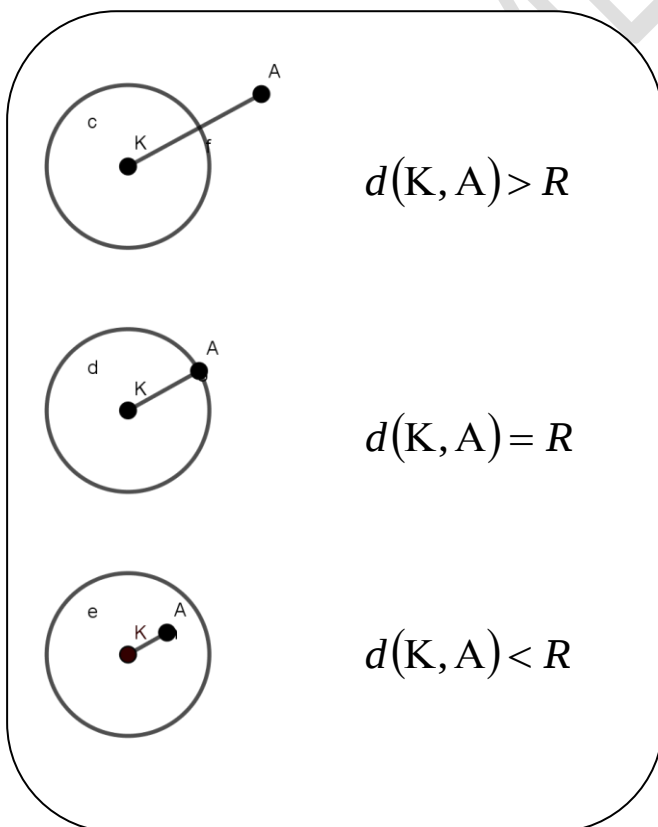
ΑΣΚΗΣΗ 5: Να προσδιοριστεί η εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0 \quad (c) \quad \text{που είναι κάθετη στην ευθεία } 2x + y + 3 = 0(\eta).$$

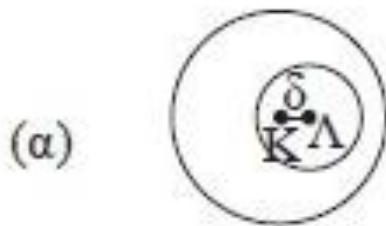
ΑΣΚΗΣΗ 6 : Να προσδιοριστεί η εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου

$$x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0 \quad \text{που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.} \quad (y = \sqrt{3}x \quad y = -\sqrt{3}x)$$

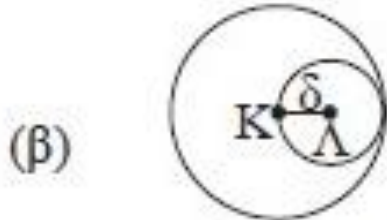
Σχετικές Θέσεις ευθείας κύκλου



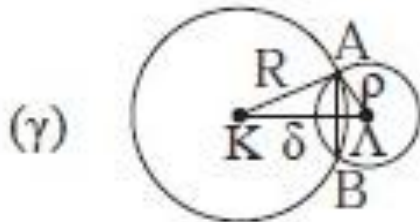
Σχετικές Θέσεις δύο Κύκλων



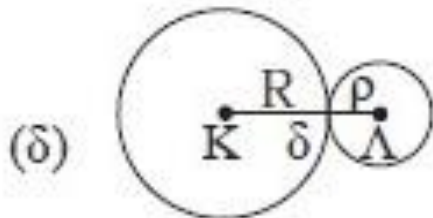
$$\delta = d(K, \Lambda) < R - r$$



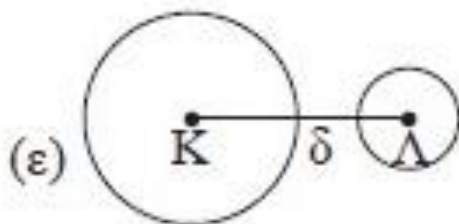
$$\delta = d(K, \Lambda) = R - r$$



$$R + r < \delta = d(K, \Lambda) < R - r$$



$$\delta = d(K, \Lambda) = R + r$$



$$\delta = d(K, \Lambda) > R + r$$