

ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

(2^ο Μάθημα κύκλου)

Εξίσωση κύκλου: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ **(1)**

Στην μορφή αυτή το κέντρο είναι : $K(x_0, y_0)$ και η ακτίνα του ρ

Εξίσωση	Κέντρο - ακτίνα
$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 3$	$K(-1,2)$, $\rho = \sqrt{3}$
$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = 5$	$K\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$, $\rho = \sqrt{5}$
$(x+4)^2 + (y-1)^2 = 1$	$K(-4,1)$, $\rho = 1$
$(x-5)^2 + (y+2)^2 = 25$	$K(5,-2)$, $\rho = 5$
Κέντρο - ακτίνα	Εξίσωση
$K(2,1)$, $\rho = 2$	$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$
$K(-1,0)$, $\rho = 4$	$(x+1)^2 + y^2 = 16$
$K\left(-1, \frac{3}{2}\right)$, $\rho = 6$	$(x+1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 36$
$K\left(\frac{-1}{3}, 1\right)$, $\rho = 7$	$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + (y-1)^2 = 49$

Παράδειγμα 1: Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2x - y - 1 = 0$ να εξεταστεί αν είναι εξίσωση κύκλου και να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του.

α τρόπος

$$x^2 + y^2 + 2x - y - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + y^2 - y - 1 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \text{ άρα έχουμε}$$

εξίσωση κύκλου με κέντρο $K\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{3}{2}$

β τρόπος

Η εξίσωση έχει $A=2$ $B=-1$ $\Gamma=-1$

$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 2^2 + (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 9 > 0$ άρα έχουμε εξίσωση κύκλου με κέντρο

$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ δηλ $K\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma} = \frac{\sqrt{9}}{2} = \frac{3}{2}$

Παράδειγμα 2: Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 3x + y + 5 = 0$ να εξεταστεί αν είναι εξίσωση κύκλου και να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του.

α τρόπος

$$x^2 + y^2 + 3x + y + 5 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x + y^2 + y + 5 = 0$$

$$x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 5 = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{10}{4} \text{ άρα δεν}$$

έχουμε εξίσωση κύκλου

β τρόπος

Η εξίσωση έχει $A=3$ $B=1$ $\Gamma=5$

$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 3^2 + 1^2 - 4 \cdot 5 = -10 < 0$ άρα δεν έχουμε εξίσωση κύκλου

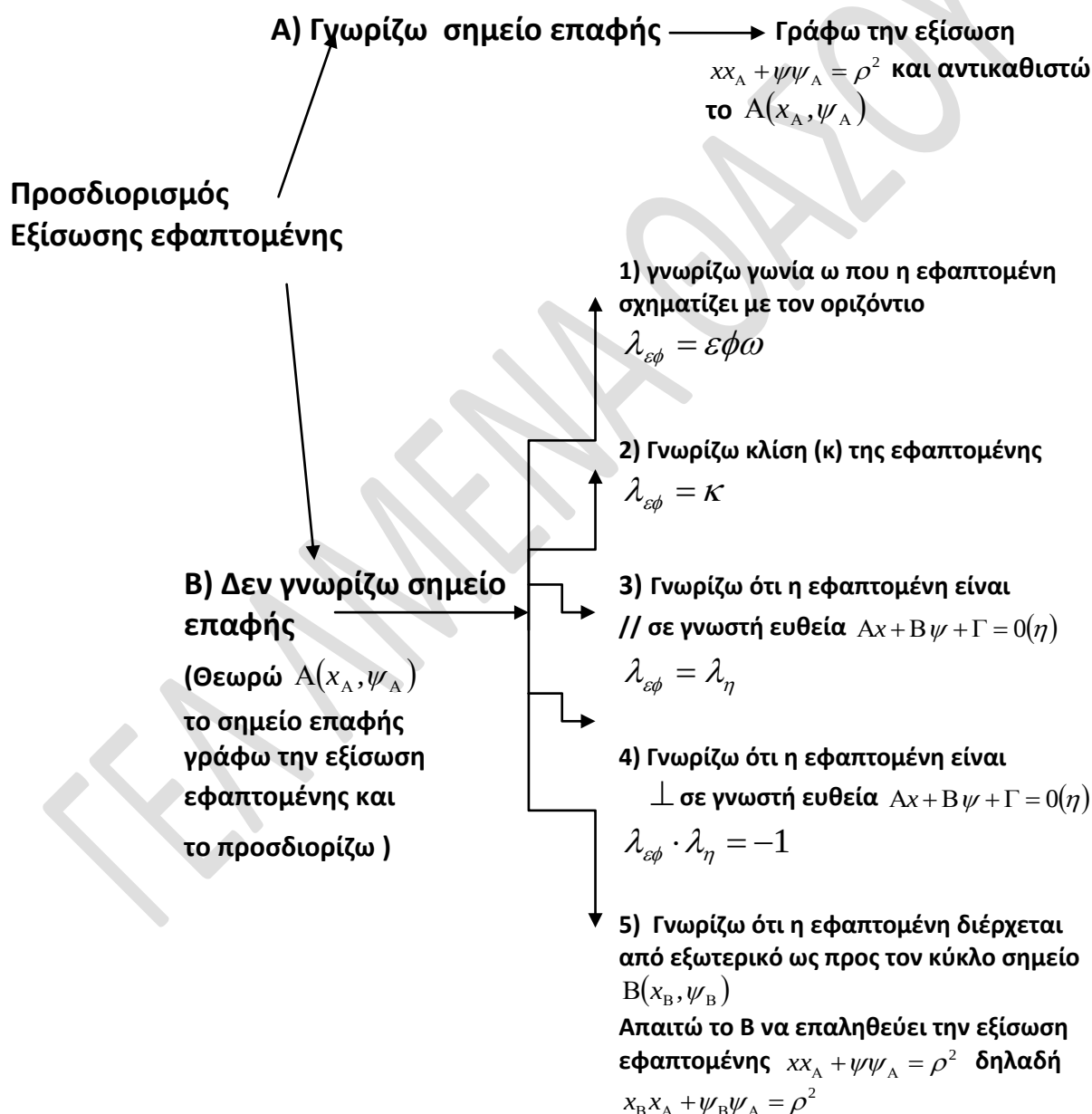
ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΚΥΚΛΟΥ

Όταν ο κύκλος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ δηλ. η εξίσωση του έχει την μορφή: $x^2 + \psi^2 = \rho^2$ $[(x-0)^2 + (\psi-0)^2 = \rho^2]$

Η εφαπτομένη του δίνεται από τον τύπο:

$$xx_A + \psi\psi_A = \rho^2 \quad (\text{ο τύπος είναι εξίσωση ευθείας})$$

$$x_A x + \psi_A \psi - \rho^2 = 0 \quad \text{με συντελεστή διεύθυνσης} \quad \lambda_{\epsilon\phi} = -\frac{x_A}{\psi_A} \quad)$$



(Η σχέση που προκύπτει από τα B1 έως B5 μαζί με το στοιχείο ότι το σημείο A είναι σημείο του κύκλου άρα επαληθεύει την εξίσωσή του δημιουργεί ένα σύστημα)

ΑΣΚΗΣΗ 1 (Α) : Να προσδιοριστεί η εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ στο σημείο του $A(1, -2)$.

Το $A(1, -2)$ είναι σημείο επαφής αφού επαληθεύει την εξίσωση του $1^2 + (-2)^2 = 5$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση εφαπτομένης θα είναι:

$$xx_A + yy_A = \rho^2 \Rightarrow x \cdot 1 + y \cdot (-2) = 5 \Rightarrow x - 2y - 5 = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 2 (Β1) : Να προσδιοριστεί η εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 2$ που σχηματίζει γωνία $\omega = 135^\circ$ με τον οριζόντιο άξονα.

Έστω $A(x_A, y_A)$ σημείο επαφής τότε η εξίσωση εφαπτομένης σ' αυτό θα είναι:

$$xx_A + yy_A = 2(\epsilon\phi) \quad (1)$$

$$\lambda_{\epsilon\phi} = \epsilon\phi\omega \Rightarrow -\frac{x_A}{y_A} = \epsilon\phi 135^\circ \Rightarrow -\frac{x_A}{y_A} = -1 \Rightarrow x_A = y_A \quad (2)$$

Όμως το σημείο $A(x_A, y_A)$ είναι σημείο του κύκλου $x^2 + y^2 = 2$ άρα επαληθεύει την εξίσωσή του: $x_A^2 + y_A^2 = 2 \quad (3)$

Οι σχέσεις (2) και (3) δημιουργούν ένα μη γραμμικό σύστημα αντικαθιστώντας την (2)

στην (3) έχουμε: $x_A^2 + x_A^2 = 2 \Rightarrow 2x_A^2 = 2 \Rightarrow x_A = \pm 1$

➤ Για $x_A = 1$ από την (2) $y_A = 1$ και η εξίσωση εφαπτομένης από την σχέση (1) γράφεται: $x \cdot 1 + y \cdot 1 = 2 \Rightarrow x + y - 2 = 0$

➤ ια $x_A = -1$ από την (2) $y_A = -1$ και η εξίσωση εφαπτομένης από την σχέση (1) γράφεται: $x \cdot (-1) + y \cdot (-1) = 2 \Rightarrow -x - y - 2 = 0 \Rightarrow x + y + 2 = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 3 (Β2) : Να προσδιοριστεί η εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 2$ που έχει κλίση $\kappa = -1$.

Έστω $A(x_A, y_A)$ σημείο επαφής τότε η εξίσωση εφαπτομένης σ' αυτό θα είναι:

$$xx_A + yy_A = 2(\epsilon\phi) \quad (1)$$

$$\lambda_{\epsilon\phi} = \kappa \Rightarrow -\frac{x_A}{y_A} = -1 \Rightarrow x_A = y_A \quad (2)$$

Όμως το σημείο $A(x_A, y_A)$ είναι σημείο του κύκλου $x^2 + y^2 = 2$ άρα επαληθεύει την εξίσωσή του: $x_A^2 + y_A^2 = 2 \quad (3)$

Οι σχέσεις (2) και (3) δημιουργούν ένα μη γραμμικό σύστημα αντικαθιστώντας την (2)

στην (3) έχουμε: $x_A^2 + x_A^2 = 2 \Rightarrow 2x_A^2 = 2 \Rightarrow x_A = \pm 1$

➤ Για $x_A = 1$ από την (2) $y_A = 1$ και η εξίσωση εφαπτομένης από την σχέση (1) γράφεται: $x \cdot 1 + y \cdot 1 = 2 \Rightarrow x + y - 2 = 0$

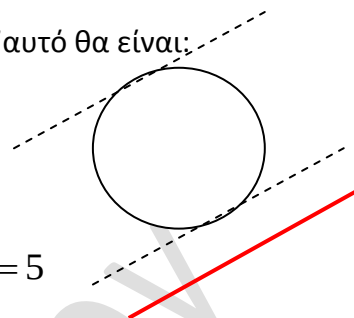
➤ ια $x_A = -1$ από την (2) $y_A = -1$ και η εξίσωση εφαπτομένης από την σχέση (1) γράφεται: $x \cdot (-1) + y \cdot (-1) = 2 \Rightarrow -x - y - 2 = 0 \Rightarrow x + y + 2 = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 4 (B3) : Να προσδιοριστεί η εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $x - 2y + 3 = 0$ (η).

Έστω $A(x_A, y_A)$ σημείο επαφής τότε η εξίσωση εφαπτομένης σ' αυτό θα είναι:

$$xx_A + yy_A = 5 \quad (1)$$

$$\lambda_{\epsilon\phi} = \lambda_{\eta} \Rightarrow -\frac{x_A}{y_A} = \frac{1}{2} \Rightarrow -2x_A = y_A \Rightarrow y_A = -2x_A \quad (2)$$



Όμως το σημείο $A(x_A, y_A)$ είναι σημείο του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$

$$\text{άρα επαληθεύει την εξίσωσή του: } x_A^2 + y_A^2 = 5 \quad (3)$$

Οι σχέσεις (2) και (3) δημιουργούν ένα μη γραμμικό σύστημα αντικαθιστώντας την (2) στην (3) έχουμε: $x_A^2 + (-2x_A)^2 = 5 \Rightarrow 5x_A^2 = 5 \Rightarrow x_A = \pm 1$

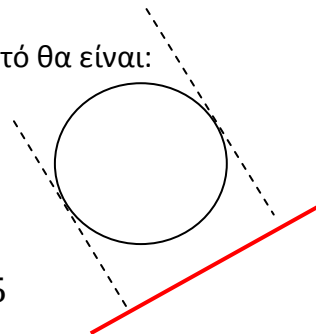
- Για $x_A = 1$ από την (2) $y_A = -2$ και η εξίσωση εφαπτομένης από την σχέση (1) γράφεται: $x \cdot 1 + y \cdot (-2) = 5 \Rightarrow x - 2y - 5 = 0$
- ια $x_A = -1$ από την (2) $y_A = 2$ και η εξίσωση εφαπτομένης από την σχέση (1) γράφεται: $x \cdot (-1) + y \cdot 2 = 5 \Rightarrow -x + y - 5 = 0 \Rightarrow x - y + 5 = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 5 (B4) : Να προσδιοριστεί η εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $2x + y + 3 = 0$ (η).

Έστω $A(x_A, y_A)$ σημείο επαφής τότε η εξίσωση εφαπτομένης σ' αυτό θα είναι:

$$xx_A + yy_A = 5 \quad (1)$$

$$\lambda_{\epsilon\phi} \cdot \lambda_{\eta} = -1 \Rightarrow \left(-\frac{x_A}{y_A}\right) \cdot 2 = -1 \Rightarrow -2x_A = y_A \Rightarrow y_A = -2x_A \quad (2)$$



Όμως το σημείο $A(x_A, y_A)$ είναι σημείο του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$

$$\text{άρα επαληθεύει την εξίσωσή του: } x_A^2 + y_A^2 = 5 \quad (3)$$

Οι σχέσεις (2) και (3) δημιουργούν ένα μη γραμμικό σύστημα αντικαθιστώντας την (2) στην (3) έχουμε: $x_A^2 + (-2x_A)^2 = 5 \Rightarrow 5x_A^2 = 5 \Rightarrow x_A = \pm 1$

- Για $x_A = 1$ από την (2) $y_A = -2$ και η εξίσωση εφαπτομένης από την σχέση (1) γράφεται: $x \cdot 1 + y \cdot (-2) = 5 \Rightarrow x - 2y - 5 = 0$
- ια $x_A = -1$ από την (2) $y_A = 2$ και η εξίσωση εφαπτομένης από την σχέση (1) γράφεται: $x \cdot (-1) + y \cdot 2 = 5 \Rightarrow -x + y - 5 = 0 \Rightarrow x - y + 5 = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 6 (B5) : Να προσδιοριστεί η εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ που διέρχεται από το σημείο $B(0,5)$

Έστω $A(x_A, y_A)$ σημείο επαφής τότε η εξίσωση εφαπτομένης σ' αυτό θα είναι:

$$xx_A + yy_A = 5 \quad (1)$$

Το B είναι σημείο της εφαπτομένης άρα επαληθεύει την εξίσωσή της

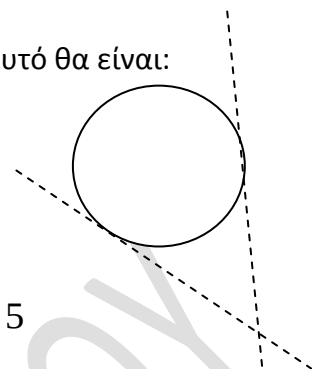
$$x_B x_A + y_B y_A = 5 \Rightarrow 5y_A = 5 \Rightarrow y_A = 1 \quad (2)$$

Όμως το σημείο $A(x_A, y_A)$ είναι σημείο του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$

$$\text{άρα επαληθεύει την εξίσωσή του: } x_A^2 + y_A^2 = 5 \quad (3)$$

Οι σχέσεις (2) και (3) δημιουργούν ένα μη γραμμικό σύστημα αντικαθιστώντας την (2) στην (3) έχουμε :

- Για $x_A = 2$ και $y_A = 1$ η εξίσωση εφαπτομένης από την σχέση (1) γράφεται :
 $x \cdot 2 + y \cdot 1 = 5 \Rightarrow 2x + y - 5 = 0$
- Για $x_A = -2$ και $y_A = 1$ και η εξίσωση εφαπτομένης από την σχέση (1) γράφεται :
 $x \cdot (-2) + y \cdot 1 = 5 \Rightarrow -2x + y - 5 = 0 \Rightarrow 2x - y + 5 = 0$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1: Να προσδιοριστεί η εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 10$ στο σημείο του $A(-1,-3)$.

ΑΣΚΗΣΗ 2: Να προσδιοριστεί η εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 2$ που σχηματίζει γωνία $\omega = 45^\circ$ με τον οριζόντιο άξονα.

ΑΣΚΗΣΗ 3: Να προσδιοριστεί η εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ που έχει κλίση $k=1$.

ΑΣΚΗΣΗ 4: Να προσδιοριστεί η εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $2x + y + 3 = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 5: Να προσδιοριστεί η εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $2x - y + 3 = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 6 : Να προσδιοριστεί η εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ που διέρχεται από το σημείο $B(-1,3)$