

ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

(1^ο Μάθημα κύκλου)

Εξίσωση κύκλου: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ **(1)**

Στην μορφή αυτή το κέντρο είναι : $K(x_0, y_0)$ και η ακτίνα του ρ

Εξίσωση	Κέντρο - ακτίνα
$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4^2$	$K(1,2)$, $\rho=4$
$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$	$K(-1,3)$, $\rho=3$
$(x-2)^2 + (y+2)^2 = (-4)^2$	$K(2,-2)$, $\rho=4$
$x^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = 2$	$K\left(0, -\frac{2}{3}\right)$, $\rho=\sqrt{2}$
$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = 5$	$K\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, $\rho=\sqrt{5}$
$(2x+1)^2 + (2y-3)^2 = 9$	$K\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $\rho=\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (2x+1)^2 + (2y-3)^2 = 9 &\Rightarrow \left[2\left(x + \frac{1}{2}\right)\right]^2 + \left[2\left(y - \frac{3}{2}\right)\right]^2 = 9 \Rightarrow 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 9 \\ &\Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Κέντρο - ακτίνα	Εξίσωση
$K(-1,2)$, $\rho=1$	$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$
$K(3,-1)$, $\rho=5$	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$
$K\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\rho=2$	$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 4$
$K(0,1)$, $\rho=5$	$x^2 + (y-1)^2 = 25$

$$(x - x_0)^2 + (\psi - \psi_0)^2 = \rho^2 \Rightarrow x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + \psi^2 - 2\psi\psi_0 + \psi_0^2 = \rho^2$$

$$x^2 + \psi^2 - 2x_0x - 2\psi_0\psi + x_0^2 + \psi_0^2 - \rho^2 = 0$$

Παρατηρούμε ότι οποιαδήποτε εξίσωση της μορφής (1) γράφεται στην μορφή : (2) $x^2 + \psi^2 + Ax + B\psi + \Gamma = 0$

Παράδειγμα: $(x+1)^2 + (\psi-2)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 + \psi^2 - 4\psi + 4 = 1$

$$x^2 + \psi^2 + 2x - 4\psi + 4 = 0$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα δηλ. δεν εκφράζουν όλες οι εξισώσεις $x^2 + \psi^2 + Ax + B\psi + \Gamma = 0$ εξίσωση κύκλου, απαραίτητη προϋπόθεση είναι όπως θα δούμε : $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$

Η παρακάτω εξίσωση έχει $A = 2$ $B = -4$ $\Gamma = 4$

$$2^2 + (-4)^2 - 4 \cdot 4 = 4 > 0$$

$$x^2 + \psi^2 + 2x - 4\psi + 4 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + \psi^2 - 4\psi + 4 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 - 1 + \psi^2 - 4\psi + 4 - 4 + 4 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + (\psi-2)^2 = 1 \quad \text{κύκλος}$$

Ενώ η παρακάτω εξίσωση έχει $A = 2$ $B = -2$ $\Gamma = 6$

$$2^2 + (-2)^2 - 4 \cdot 6 = -20 < 0$$

$$x^2 + \psi^2 + 2x - 2\psi + 6 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + \psi^2 - 2\psi + 6 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 - 1 + \psi^2 - 2\psi + 1 - 1 + 6 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + (\psi-1)^2 = -4 \quad \text{δεν είναι εξ. κύκλου}$$

Η εξίσωση $x^2 + \psi^2 + 6x - 2\psi + 1 = 0$ έχει $A = 6$ $B = -2$ $\Gamma = 1$

$$6^2 + (-2)^2 - 4 \cdot 1 = 36 > 0$$

$$x^2 + \psi^2 + 6x - 2\psi + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + \psi^2 - 2\psi + 1 = 0$$

$$x^2 + 6x + 9 - 9 + \psi^2 - 2\psi + 1 - 1 + 1 = 0 \Rightarrow (x+3)^2 + (\psi-1)^2 = 9 \quad \text{κύκλος}$$

Για ποιόν λόγο θα πρέπει να ισχύει $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ ώστε η εξίσωση $x^2 + \psi^2 + Ax + B\psi + \Gamma = 0$ να είναι εξίσωση κύκλου;

$$x^2 + \psi^2 + Ax + B\psi + \Gamma = 0$$

$$x^2 + Ax + \psi^2 + B\psi + \Gamma = 0 \Rightarrow x^2 + Ax + \left(\frac{A}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2 + \psi^2 + B\psi + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \Gamma = 0$$

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\psi + \frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \Gamma = 0 \Rightarrow$$

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 - \frac{A^2}{4} + \left(\psi + \frac{B}{2}\right)^2 - \frac{B^2}{4} + \Gamma = 0 \Rightarrow$$

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(\psi + \frac{B}{2}\right)^2 - \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(\psi + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4} \quad (\text{σχολικό βιβλίο σελ 84})$$

Από την τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι :

- Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ η εξίσωση παριστάνει εξίσωση κύκλου με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}$
- Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0$ η εξίσωση παριστάνει ένα μόνο σημείο το $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$
- Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma < 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη δηλ. δεν υπάρχουν σημεία $M(x, \psi)$ που να την επαληθεύουν .

Κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής :

$$x^2 + \psi^2 + Ax + B\psi + \Gamma = 0, \text{ με } A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 \text{ και}$$

αντίστροφα κάθε εξίσωση της παραπάνω μορφής παριστάνει κύκλο.

Η παραπάνω θεωρία αποτελεί και τρόπο αντιμετώπισης των αντίστοιχων ασκήσεων.

Παράδειγμα 1: Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$ να εξεταστεί αν είναι εξίσωση κύκλου και να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του.

α τρόπος

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 &= 0 \Rightarrow x^2 + 2x + y^2 - 4y + 4 = 0 \\x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 - 4y + 4 - 4 + 4 &= 0 \Rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 1 \quad \text{άρα έχουμε} \\ \text{εξίσωση κύκλου με κέντρο } K(-1,2) \text{ και ακτίνα } \rho &= 1\end{aligned}$$

β τρόπος

$$\begin{aligned}\text{Η εξίσωση έχει } A=2 \quad B=-4 \quad \Gamma=4 \\ A^2 + B^2 - 4\Gamma = 2^2 + (-4)^2 - 4 \cdot 4 = 4 > 0 \quad \text{άρα έχουμε εξίσωση κύκλου με} \\ \text{κέντρο } K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \text{ δηλ } K(-1,2) \text{ και ακτίνα} \\ \rho = \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2: Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 6 = 0$ να εξεταστεί αν είναι εξίσωση κύκλου και να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του.

α τρόπος

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 2x - 2y + 6 &= 0 \Rightarrow x^2 + 2x + y^2 - 2y + 6 = 0 \\x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 - 2y + 1 - 1 + 6 &= 0 \Rightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = -4 \quad \text{άρα δεν} \\ \text{έχουμε εξίσωση κύκλου}\end{aligned}$$

β τρόπος

$$\begin{aligned}\text{Η εξίσωση έχει } A=2 \quad B=-2 \quad \Gamma=6 \\ A^2 + B^2 - 4\Gamma = 2^2 + (-2)^2 - 4 \cdot 6 = -20 < 0 \quad \text{άρα δεν έχουμε εξίσωση}\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3: Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$ να εξεταστεί αν είναι εξίσωση κύκλου και να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του.

α τρόπος

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0 &\Rightarrow x^2 + 6x + y^2 - 2y + 1 = 0 \\x^2 + 6x + 9 - 9 + y^2 - 2y + 1 - 1 + 1 = 0 &\Rightarrow (x+3)^2 + (y-1)^2 = 9 \text{ άρα έχουμε} \\ \text{εξίσωση κύκλου με κέντρο } K(-3,1) \text{ και ακτίνα } \rho = 3\end{aligned}$$

β τρόπος

$$\begin{aligned}\text{Η εξίσωση έχει } A=6 \quad B=-2 \quad \Gamma=1 \\ A^2 + B^2 - 4\Gamma = 6^2 + (-2)^2 - 4 \cdot 1 = 36 > 0 \text{ άρα έχουμε εξίσωση κύκλου με} \\ \text{κέντρο } K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \text{ δηλ } K(-3,1) \text{ και ακτίνα} \\ \rho = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma} = \frac{\sqrt{36}}{2} = 3\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1: Να προσδιοριστεί το κέντρο και η ακτίνα των παρακάτω κύκλων:

$$\begin{array}{ll}\alpha) (x+1)^2 + (y-2)^2 = 3 & \beta) \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = 5 \\ \gamma) (x+4)^2 + (y-1)^2 = 1 & \delta) (x-5)^2 + (y+2)^2 = 25\end{array}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2: Να προσδιοριστεί η εξίσωση των κύκλων με κέντρο και ακτίνα:

$$\begin{array}{ll}\alpha) K(2,1), \quad \rho = 2 & \beta) K(-1,0), \quad \rho = 4 \\ \gamma) K\left(-1, \frac{3}{2}\right), \quad \rho = 6 & \delta) K\left(\frac{-1}{3}, 1\right), \quad \rho = 7\end{array}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3: Να εξεταστεί ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις είναι εξισώσεις κύκλου να προσδιοριστεί το κέντρο και η ακτίνα και να γραφούν στην μορφή

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2:$$

$$\begin{array}{ll}\alpha) x^2 + y^2 + 2x - y - 1 = 0 & \beta) x^2 + y^2 + 3x + y + 5 = 0 \\ \gamma) x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0 & \delta) x^2 + y^2 + 4x - y - 2 = 0\end{array}$$