

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΥΚΛΟΥ

1. Θεωρούμε την ευθεία $(\varepsilon): \psi = \lambda \cdot x$ και τον κύκλο

$$x^2 + \psi^2 - 6x + 1 = 0. \text{ Να υπολογίσετε την τιμή του } \lambda, \text{ ώστε η ευθεία :}$$

- α) να τέμνει τον κύκλο
- β) να εφάπτεται στον κύκλο
- γ) να μην έχει κοινά σημεία με τον κύκλο

2. Θεωρούμε τον κύκλο $(C): x^2 + \psi^2 + 6x + 2\psi = 0$ και το σημείο

$A(-2,0)$ να βρείτε:

- α) Το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου
- β) Την εξίσωση της ευθείας που ορίζει στον κύκλο χορδή με μέσο το A

3. Δίνεται η εξίσωση $(C): x^2 + \psi^2 - 4x + 2\psi + 3 = 0$ και το σημείο

$A(2,1)$. α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(2,-1)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$.
β) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου που διέρχονται από το σημείο $A(2,1)$

4.

Δίνεται ο κύκλος $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

A) 1. Να γράψετε τον κύκλο στη μορφή $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

2. Να δείξετε ότι ο κύκλος εφάπτεται του xx' άξονα.

B) 1. Να βρεθεί το συμμετρικό σημείο P, του κέντρου του κύκλου ως προς την ευθεία $y=x$.

2. Αν $P(2,1)$ το προηγούμενο σημείο, δείξετε ότι το P είναι εσωτερικό του κύκλου.

Γ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνάει από το σημείο $P(2,1)$ και τέμνει τον κύκλο στα A,B ώστε το P να είναι μέσο της χορδής AB.

5. Ένας κύκλος C έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται στην ευθεία $(\varepsilon): x + \psi - 4 = 0$. Να βρείτε:

- α) Την εξίσωση του κύκλου και το σημείο επαφής.
- β) Την άλλη εφαπτομένη ζ του κύκλου που είναι παράλληλη με την ε.

6.

Εστω ο κύκλος $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ και το σημείο $A(4,-6)$.

- α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση του σημείου από τον κύκλο
- β) Αν M,N δύο τυχαία σημεία του κύκλου, να αποδείξετε ότι $|\overline{MN}| \leq 6$.
- γ) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση του κύκλου από την ευθεία $\varepsilon: 3x + 4y + 25 = 0$.

7. Δίνεται η εξίσωση $(C): x^2 + \psi^2 - 6x + 8\psi + 16 = 0$

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο.
- β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου.
- γ) Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου, οι οποίες είναι παράλληλες προς την ευθεία $(\eta): 3x + 4\psi - 5 = 0$.

8. Να βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων οι οποίοι εφάπτονται στους θετικούς O x , O y και την ευθεία $(\varepsilon): 3x + 4\psi - 12 = 0$.

9. Να βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων οι οποίοι διέρχονται από τα σημεία $A(2,3)$, $B(3,6)$ και εφάπτονται στην ευθεία $(\varepsilon): 2x + \psi - 2 = 0$.

10. Δίνεται η εξίσωση $(C): x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. β) Να εξετάσετε αν ο C διέρχεται από το σημείο $A(-5, 1)$. γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο A.

11. Θεωρούμε την εξίσωση $(C): x^2 + y^2 + 2y + 1 + 2\lambda(x - y - 1) = 0$ με $\lambda \neq 0$. Να αποδείξετε ότι :

- α) Η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο C για κάθε $\lambda \neq 0$, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
β) Ο κύκλος C διέρχεται από σταθερό σημείο Σ καθώς το λ μεταβάλλεται στο R^* .
γ) Το κέντρο του κύκλου C κινείται σε μια ευθεία, καθώς το λ μεταβάλλεται στο R^* .
δ) Ο κύκλος C εφάπτεται στην ευθεία $(\varepsilon): x - y - 1 = 0$ στο σημείο Σ για κάθε $\lambda \neq 0$.

12. Δένουμε μια πέτρα με σκοινί και την περιστρέφουμε ώστε να διαγράφει κύκλο κέντρου $O(0, 0)$. Στο σημείο $P(4, 3)$ το σκοινί σπάει και η πέτρα κινούμενη ευθύγραμμα και κάθετα προς το σκοινί OP συναντάει έναν τοίχο, αποτυπώνεται στο καρτεσιανό με την ευθεία $(\varepsilon): y = x + 12$. Να βρείτε:

- α) Την εξίσωση της κυκλικής τροχιάς της πέτρας
β) Την ευθύγραμμη τροχιά της πέτρας όταν σπάσει το σκοινί OP.
γ) Σε ποιο σημείο θα συναντήσει η πέτρα τον τοίχο;
δ) Ποιο σημείο της κυκλικής τροχιάς της πέτρας απέχει την μεγαλύτερη απόσταση από τον τοίχο και ποιο την μικρότερη;

13. Δύο παιδιά Π_1 και Π_2 κάνουν πατινάζ σε μία πίστα πάγου. Η τροχιά που διαγράφουν τα παιδιά ορίζεται από το γεγονός ότι κάθε σημείο της M έχει συντεταγμένες $(1 + \sqrt{5}\sin\phi, 1 + \sqrt{5}\eta\mu\phi)$, $\phi \in R$. α) Να γράψετε την εξίσωση της τροχιάς που διαγράφουν τα δύο παιδιά.

β) Όταν τα δύο παιδιά Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία $A(2, -1)$ και B της τροχιάς αντίστοιχα, χάνουν την ισορροπία τους, πέφτουν και γλιστρώντας ακολουθούν πορείες ευθύγραμμες και κάθετες. Αν η πορεία του Π_1 εφάπτεται της τροχιάς που διέγραφαν αρχικά και τα παιδιά θα συγκρουστούν στο σημείο $(4, 0)$ τότε:

- i) Να βρείτε την εξίσωση της πορείας των παιδιών Π_1 και Π_2 όταν αυτά γλιστρούν πεσμένα στον πάγο.
ii) Να αποδείξετε ότι η πορεία του παιδιού Π_2 εφάπτεται στην τροχιά που διαγράφουν πριν πέσουν.
iii) Να βρείτε το σημείο στο οποίο έπεσε το παιδί Π_2 .
iv) Να υπολογίσετε την απόσταση που διένυσε το κάθε παιδί από τη στιγμή της πτώσης τους μέχρι τη στιγμή της σύγκρουσής τους.

14. Θεωρούμε τον κύκλο $(C): x^2 + y^2 = 6$ και τα σημείο $A(2, 2)$.

- α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που διέρχονται από το σημείο A.
β) Να υπολογίσετε την οξεία γωνία των δύο εφαπτομένων.
γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = x$ είναι η διχοτόμος της αμβλείας γωνίας των δύο εφαπτομένων.

15. Θεωρούμε έναν πληθυσμό από 1999 μυρμηγκία. Κάθε μυρμηγκί χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό $n=1,2,3,4,\dots,1999$ και κινείται επάνω στο καρτεσιανό επίπεδο $Ox\psi$ διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση

$$(x-1)^2 + \psi^2 = 2n(x + \psi - 1)$$

Να αποδείξετε ότι :

- Η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του.
- Κατά την κίνηση τους όλα τα μυρμηγκία διέρχονται από ένα σταθερό σημείο A (που είναι η φωλιά τους). Ποιες οι συντεταγμένες του σημείου A ;
- Οι τροχιές όλων των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας $x + \psi - 1 = 0$ στο σημείο A .

(εξετάσεις 1999)

16. Δίνεται η εξίσωση :

$$x^2 + \psi^2 - 2x\cos\theta - 2\psi\eta\mu\theta - 1 = 0 \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

- Να αποδείξετε ότι για κάθε θ η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο, του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του.
- Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο $M(1,2)$.
- Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του θ τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

(εξετάσεις 2002)

17. Θεωρούμε την εξίσωση :

$$x^2 + \psi^2 - 2\alpha x + 4\psi + 2\alpha = 0 \quad \text{όπου } \alpha \text{ πραγματικός αριθμός}$$

- Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο για κάθε πραγματικό αριθμό α .
- Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α έτσι ώστε η ακτίνα του κύκλου αυτού να είναι ίση με 2.
- Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α έτσι ώστε το κέντρο του κύκλου να βρίσκεται στην ευθεία με εξίσωση $(\varepsilon): 5x + 3\psi + 1 = 0$.
- Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α ώστε ο κύκλος να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(εξετάσεις 2000)

18. Δίνεται ο κύκλος $(C): x^2 + \psi^2 - 2x + 4\psi + \lambda = 0$ με ακτίνα $\rho=2$.

- Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ και το κέντρο του κύκλου C .
- Να βρεθεί η θέση του σημείου $A(4,-1)$ ως προς τον κύκλο C .

19. Δίνεται ένα τρίγωνο με κορυφές $A(2\lambda - 1, 3\lambda + 2)$, $B(1,2)$ και $\Gamma(2,3)$ όπου λ είναι πραγματικός αριθμός με $\lambda \neq -2$.

- Να αποδείξετε ότι το σημείο A κινείται σε ευθεία, καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$.
- Αν $\lambda = 1$ να βρείτε:
 - Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

β) Την εξίσωση του κύκλου, που έχει κέντρο την κορυφή $A(1,5)$ και εφάπτεται στην ευθεία $BΓ$.

(εξετάσεις 2003)

20. i) Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu \cdot x + 8\lambda y = 0$, όπου μ, λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή των μ, λ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή O των αξόνων.

ii) Εστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς μ, λ ισχύει η σχέση $3\mu + 2\lambda = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu \cdot x + 8\lambda y = 0$ για τις διάφορες τιμές των λ, μ έχουν τα κέντρα τους σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Να βρείτε τα μ, λ έτσι ώστε αν A, B είναι τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία

$(\varepsilon): x + y + 2 = 0$ να ισχύει $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$.

γ) Για τις τιμές των μ, λ που βρήκατε στο ερώτημα (β) να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου AOB .

(εξετάσεις 2001)