

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

1. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας που:
 - α) Διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$, $B(4,3)$
 - β) Διέρχεται από τα σημεία $A(-1,3)$, $B(-1,4)$
 - γ) Διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία $2x - y + 3 = 0$.
 - δ) Διέρχεται από το σημείο $A(0,4)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $x - 3y + 1 = 0$.
2. Θεωρούμε την ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(-1,2)$. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ε σε κάθε μια από τις περιπτώσεις :
 - α) Η ε διέρχεται και από το $B(2,3)$
 - β) Η ε διέρχεται και από το $\Gamma(-1,3)$
 - γ) Διέρχεται από το σημείο A και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha} = (-2,2)$
 - δ) Διέρχεται από το σημείο A και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\beta} = (0,2)$
 - ε) Διέρχεται από το σημείο A και σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα γωνία 135° .
3. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): y = (2\lambda - 1)x + 2 \quad \lambda \in \mathbb{R}$
Να προσδιοριστεί η παράμετρος $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε:
 - α) Η ευθεία να διέρχεται από το σημείο $A(2,-1)$
 - β) Η ευθεία να είναι παράλληλη στην $(\eta): y = 5x + 7$
 - γ) Η ευθεία να είναι κάθετη στην $(\kappa): 3 \cdot y = -2x + 7$
 - δ) Η ευθεία να σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα γωνία 135°
 - ε) Η ευθεία να είναι παράλληλη του x-άξονα.
4. Θεωρούμε την ευθεία $(\varepsilon_1): y = 3x + 2$.
 - α) Αν $(\varepsilon_2): y = 5x + 6$ να βρεθεί το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2)
 - β) Να βρείτε τα σημεία που η (ε_1) τέμνει τους άξονες.
 - γ) Ανήκει το σημείο $H(-1,2)$ στην (ε_1) ;
 - δ) Να βρεθεί το $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο $Z(\mu + 1, \mu + 4)$ να ανήκει στην (ε_1)
5. Δίνονται τα σημεία $A(-5,4)$, $B(2,3)$ και $\Gamma(-3,-2)$.
 - α) Να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι κορυφές τριγώνου.
 - β) Να βρεθούν οι εξισώσεις δύο υψών του και οι συντεταγμένες του ορθοκέντρου του.
 - γ) Να βρεθούν οι εξισώσεις δύο διαμέσων του και οι συντεταγμένες του βαρυκέντρου του.
 - δ) Να βρεθούν οι εξισώσεις δύο μεσοκαθέτων και οι συντεταγμένες του περικέντρου του.
 - ε) Να βρεθούν οι εξισώσεις δύο διχοτόμων και οι συντεταγμένες του εγκέντρου του.
6. Δίνεται η ευθεία ε με εξίσωση $y = -x + 1$
 - α) Να βρεθεί η προβολή του σημείου $P(2,3)$ πάνω στην ε .
 - β) Να βρεθεί το συμμετρικό του $P(2,3)$ ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία ε .
7. Να βρεθεί το συμμετρικό του $A(1,-4)$ ως προς την ευθεία $3x - 5y + 11 = 0$.
[A'(-5,6)]
8. Σε τρίγωνο ABΓ δίνονται η κορυφή $A(7,1)$ η εξίσωση της διαμέσου ΓΜ: $2x - 5y + 8 = 0$ και του ύψους ΒΔ: $6x - y - 23 = 0$ Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ.
[B(5,7), Γ(1,2)]

9. Σε τρίγωνο ABΓ δίνονται η κορυφή $A(1,3)$ και οι εξισώσεις των μεσοκαθέτων της AB, $\varepsilon_1: 3x - 2y + 16 = 0$ και της ΑΓ $\varepsilon_2: 2x - 3y + 20 = 0$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των Β και Γ.
 $[B(-5,7), \Gamma(-3,9)]$
10. Στο παραλληλόγραμμο ABΓΔ δίνονται οι εξισώσεις των διαγωνίων ΑΓ : $x - 2y + 2 = 0$ και ΒΔ: $3x + 4y - 34 = 0$ και το μέσο $M(3,5)$ της ΒΓ. Να βρεθούν οι κορυφές του. $[A(8,5), B(2,7), \Gamma(4,3), \Delta(10,1)]$.
11. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(1,3)$ και σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.
12. Να βρεθεί εξίσωση ευθείας ε, που διέρχεται από το $P(2,0)$ και τέμνει τις $\varepsilon_1: y = -x + 4$ και $\varepsilon_2: y = -x + 6$ στα σημεία Α και Β έτσι ώστε $(AB) = 2$
13. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών, που διέρχονται από την αρχή των αξόνων Ο και απέχουν από το σημείο $A(-1,3)$ απόσταση ίση με 1.
14. Οι δύο πλευρές ορθογωνίου παραλληλογράμμου βρίσκονται στις ευθείες με εξισώσεις $y = -2x + 3$ και $y = \frac{1}{2}x + 5$ και μια κορυφή του είναι το σημείο $A(4,1)$. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι άλλες δύο πλευρές.
15. Έστω παραλληλόγραμμο ABΓΔ. Αν η κορυφή Α έχει συν/νες $(6,4)$ και δύο πλευρές του βρίσκονται πάνω στις ευθείες με εξισώσεις $y = 2x - 3$ και $4y = 3x - 7$ να βρείτε τις συν/νες των κορυφών Β, Γ, Δ.
16. Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό λ η εξίσωση $x + 2y - 5 + \lambda(x - 3y) = 0$ παριστάνει ευθεία που διέρχεται από σταθερό σημείο.
17. Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α η εξίσωση $(\alpha^2 + 1)x + (\alpha - 1)y - 3\alpha^2 + \alpha - 4 = 0$ παριστάνει ευθεία που διέρχεται από σταθερό σημείο.
18. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in R$ η εξίσωση $(\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y + \lambda - 4 = 0$ παριστάνει ευθεία. Επίσης να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η ευθεία αυτή
 α) Είναι παράλληλη στον x'x άξονα
 β) Είναι κάθετη στον x'x άξονα
 γ) Διέρχεται από το σημείο $A(4,1)$
 δ) Έχει συντελεστή διεύθυνσης 2
 ε) Σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα γωνία 45°
19. Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό λ η εξίσωση $x + (\lambda - 5)y - \lambda + 8 = 0$ παριστάνει ευθεία που διέρχεται από σταθερό σημείο. Για ποια τιμή του λ η ευθεία αυτή απέχει από την αρχή των αξόνων την μεγαλύτερη δυνατή απόσταση;
20. Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματική τιμή του λ οι ευθείες $\varepsilon_1: \lambda x + (2\lambda + 1)y = \lambda - 1$ και $\varepsilon_2: (\lambda - 1)x + (2\lambda - 1)y = \lambda$ έχουν μοναδικό σημείο τομής Μ. Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Μ καθώς το λ μεταβάλλεται;
21. Να αποδειχθεί ότι η παρακάτω εξίσωση παριστάνει δύο κάθετες μεταξύ τους ευθείες
 $x^2 - y^2 + 2x + 4y - 3 = 0$

22. Να αποδειχθεί ότι η παρακάτω εξίσωση παριστάνει δύο παράλληλες μεταξύ τους ευθείες

$$4x^2 + y^2 - 4xy + 8x - 4y + 3 = 0$$

23. Να αποδειχθεί ότι η παρακάτω εξίσωση παριστάνει δύο παράλληλες μεταξύ τους ευθείες

$$2x^2 - 2y^2 + 3xy + 5x + 5y + 3 = 0$$

24. Να αποδειχθεί ότι για κάθε τιμή της πραγματικής παραμέτρου λ οι ευθείες $\varepsilon_1 : (2\lambda - 1)x + (\lambda - 3)y - \lambda^2 - 2\lambda = 0$ και $\varepsilon_2 : (\lambda + 2)x + (\lambda + 1)y - \lambda = 0$ τέμνονται στη διχοτόμο της δεύτερης γωνίας των αξόνων.

25. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in R$ για τις οποίες οι ευθείες $\varepsilon_1 : (\lambda - 1)x + \lambda y + 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : (\lambda + 2)x + (1 - \lambda^2)y + 4 = 0$ είναι κάθετες.

26. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : \lambda x + (\lambda - 1)y - 1 = 0$ και $\varepsilon_2 : 4x + \lambda y + \lambda - 2 = 0$. Να βρεθεί για ποια τιμή του $\lambda \in R$ ισχύει :

α) $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ β) $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$

27. Να βρεθεί η οξεία γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους οι ευθείες :

$$\varepsilon_1 : -\sqrt{3}x + y + 2 = 0 \text{ και } \varepsilon_2 : -x + \sqrt{3}y - 1 = 0.$$

28. Να βρεθεί η οξεία γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους οι ευθείες :

$$\varepsilon_1 : 5x - y + 3 = 0 \text{ και } \varepsilon_2 : 3x + 2y - 5 = 0.$$

29. Να βρεθεί η οξεία γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους οι ευθείες :

$$\varepsilon_1 : 2\lambda x - (\lambda + 1)y + 2\kappa = 0 \text{ και } \varepsilon_2 : (3\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y - \rho = 0.$$

30. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στην $\varepsilon_1 : 3x + 4y + 5 = 0$ και απέχει από το σημείο $M(-2, 1)$ απόσταση ίση με 1.

31. Να βρεθεί η μεσοπαράλληλος των ευθειών $\varepsilon_1 : 3x - y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2 : 6x - 2y - 8 = 0$.

32. Να βρεθούν οι εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες $\varepsilon_1 : x + 3y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2 : 3x + y - 8 = 0$. Ποια είναι η διχοτόμος της οξείας γωνίας;

33. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων :

α) $A(2\lambda - 1, \lambda + 2)$, $\lambda \in R$ β) $B(\lambda - 1, \lambda + 3)$, $\lambda \in R$
γ) $\Gamma(1 - \lambda, 3)$, $\lambda \in R$ δ) $\Delta(\sin \vartheta, \eta \mu \vartheta)$, $\vartheta \in R$
ε) $E(2\eta \mu \omega + 1, 3\sigma \upsilon \nu \omega)$, $\omega \in R$
ζ) $Z\left(\frac{\lambda + 3}{\lambda - 1}, \frac{5 - \lambda}{1 - \lambda}\right)$, $\lambda \in R$

34. Να αποδειχθεί ότι οι γεωμετρικοί τόποι των σημείων $M(3\lambda - 2, 2\lambda + 1)$ και $A(6\lambda - 5, 4\lambda - 3)$, $\lambda \in R$ είναι δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους. Να προσδιοριστεί η μεσοπαράλληλος των δύο παραπάνω ευθειών.

35. Οι συντεταγμένες δύο πλοίων Π1, Π2 είναι $\Pi_1(t - 1, t + 2)$ και $\Pi_2(3t, 6t - 1)$ για κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$.
α) Όταν το Π1 έχει συντεταγμένες (1, 4) ποιες είναι οι συντεταγμένες του Π2 ;
β) Να δείξετε ότι τα δύο πλοία κινούνται πάνω σε ευθείες των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει περίπτωση να συναντηθούν οι πορείες των πλοίων .

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει περίπτωση τα δύο πλοία να συγκρουστούν.

ε) Να βρεθεί η απόσταση των δύο πλοίων τη χρονική στιγμή $t = 3$.

36. Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα αξόνων Oxy ένα πλοίο ξεκινά από ένα λιμάνι A και κατευθύνεται στο λιμάνι O . Το ραντάρ θέσης για κάθε χρονική στιγμή t δίνει συντεταγμένες για το πλοίο $(2t - 40, t - 30)$, $t \geq 0$.

α) Πού βρίσκεται στο χάρτη το λιμάνι A ;

β) Πόσο απέχει το λιμάνι A από το O ;

γ) Είναι σωστή η πορεία του πλοίου; Ποια είναι η εξίσωσή της;

37. Έστω ένα τρίγωνο $AB\Gamma$. Δίνεται η κορυφή $A(1, 1)$, η εξίσωση της διαμέσου $\mu_1 : \psi = -x + 1$ και του ύψους $\upsilon_\beta : \psi = 2$.

Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών B και Γ .

38. Να υπολογίσετε το εμβαδό του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ του οποίου οι τρεις κορυφές είναι τα σημεία $A(-2, 3)$, $B(4, -5)$, $\Gamma(-3, 1)$.

39. Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1: x + 3y + 1 = 0$ και $\epsilon_2: 3x + y + 5 = 0$.

α) Αποδείξτε ότι οι ϵ_1 , ϵ_2 τέμνονται .

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ϵ_1 , ϵ_2 .

40. Έστω τα σημεία $A(1, 1)$, $B(5, 5)$ και η ευθεία $\epsilon: x - 2y - 1 = 0$. Να βρείτε σημείο Γ της ευθείας ϵ , ώστε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ να είναι 4.

41. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες στην ευθεία $(\epsilon): 6x + 8y - 5 = 0$ και απέχουν από το σημείο $A(-1, 2)$ απόσταση $d = 4$.

42. Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$, $B(-4, 3)$ και $\Gamma(3, -5)$.

α) Να αποδειχθεί ότι τα παραπάνω σημεία αποτελούν κορυφές τριγώνου.

β) Να βρεθεί που κινούνται τα σημεία $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $(MB\Gamma) = 2(AB\Gamma)$