

① Δίνεται η παραχωριστή συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & \text{αν } x \leq 1 \\ (x + \alpha)^2, & \text{αν } x > 1 \end{cases} \quad \text{με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε:

α) Τους παραγωγικούς αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$ .

β) Τις εφαπτόμενες της  $C_f$  που διέρχονται από το σημείο  $K(1, -3)$

γ) τα όρια: i)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{\ln(x-1) - x + 2}$  ii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x f(x))$

② Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x+2}{x-2} - e^x$

α) Να βρείτε το π.ο και το β.τ. της συνάρτησης  $f$ .

β) ΝΔΟ η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς δύο ρίζες στο π.ο. της

γ) Αν η  $C_g$  όπου:  $g(x) = (e^x - 1)(x - 2)$  διέρχεται από το σημείο  $A(\alpha, 4)$  με  $\alpha \neq 2$  τότε το  $\alpha$  είναι ρίζα της  $f$ .

δ) ΝΔΟ η  $g$  δεν είναι 1-1.

③ Έστω η παραχωριστή συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύουν:  $f'(x) = 2xe^{-x} - f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$  και  $f(1) = e^{-1}$ .

α) ΝΔΟ η  $f(x) = \frac{x^2}{e^x}, \quad x \in \mathbb{R}$ .

β) Να φελεξώσθε τωv  $f$  ωs ωπος τωv τωv οvαvτωv και νωv αωωδξώσθε όσν τω β.τ. τωs είνωv τω  $[0, +\infty)$ .

δ) ΝΔΟ η εδξωωθω  $x^2 = 2e^{x-2}$  έχωv ακρξωώs τρξs ρξξωs στω είνωθω τωv ωραηατξωώv αρξθωv.

ε) Νω εδωvωξω η  $f$  ωs ωπος τωv κωρτωώv νω φρξωί η εδξωωθω τωs εφωvτωθξωv τωs  $C_f$  στω εφείω τωs  $(-1, f(-1))$  κωv αv.δ.ο. :  
 $f(x) + 2e + 3ex \geq 0 \quad \forall x \leq 0.$

4) Δίνωvαι η συνάρτωθω  $f(x) = (1-\alpha)x^2 + \alpha(1-x)^2, x \in \mathbb{R}$   
 $\alpha \in \mathbb{R}.$

α) ΝΔΟ η  $f$  ωραωωξωξωί έvω ακρώτωω  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

β) Αν τω ακρώτωω είνωv αρητωώv αρξθωώs νδωv  $C_f$  τξτξω τωv αξωωv  $x, x'$  σε έvω τωv έvωθωv εφείω  $x_0 \in (0, 1)$

γ) Νω σωωλωγξωδξωί τω α τω  $\int_{x_0}^1 f'(x) dx = 5$

5) Δίνωvαι η συνάρτωθω  $f(x) = \ln(x+1), x > -1$

α) Νω φρξωί (αν σωωρξωί) η ανώβωρωθω τωs  $f$ .

β) Νω φρξωώv τω εφείω τωθξω τωv  $C_f$  κωv  $C_f^{-1}$  φξ τω  $y=x$

γ) Νω φρξωί τω εφείω τωv τωv χωρξωω ωω ωερξωξωίωv αωώ τωs  $C_f, [C_f^{-1}]$  κωv τωv κωv αωωρωθωv αωίτωτω τωs συνάρτωθωs  $g(x) = \frac{e^x - 1}{x^2 - x}.$