

1. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω F αρχική της f με $F(1) = 0$ για τις οποίες ισχύει:

$$f(x) = 2x^2 - 2 + \frac{F(x)}{x+1} \quad \text{για κάθε } x > 0$$

- α) Να υπολογίσετε το $f(1)$.
β) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 6x - 2$.
γ) Να βρείτε τον τύπο της f .
δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M\left(\frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$.

2. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 + ax - 1 - \eta\mu 2x$$

για την οποία ισχύει $f'(0) = 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι $a = 2$.
β) Να εξετάσετε αν η f έχει ακρότατο στο 0.
γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{2017 + \eta\mu 2x}{x^2 + 2} = x$ έχει μοναδική ρίζα στο \mathbb{R} .

3. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει $e^2 f\left(\frac{1}{e}\right) + f(e) = 0$ και:

$$f'(x)x - f(x) = 2x - x^2 - 1 \quad \text{για κάθε } x > 0$$

- α) Να βρείτε τον τύπο της f .
β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
γ) Να λύσετε την εξίσωση $x = e^{\frac{x^2-1}{x}}$.
δ) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x \cdot \ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}$$

για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.