

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$i. 2\log(2x-1) - \log(3x-2x^2) = \log(4x-3) - \log x \quad ii. \ln x - \ln(2x-2) = \ln 2e - 1$$

$$iii. \frac{1}{2}\log(x+2) + \log\sqrt{x-3} = 1 + \log\sqrt{3} \quad iv. \ln\sqrt{x} = \ln^2 x \quad v. \ln 2^{x-1} = x + 1$$

$$vi. 2\log^2 x + 5\log x - 3 = 0 \quad vii. \ln^2 x - (e + e^2)\ln x + e^3 = 0$$

$$viii. \ln(e^x + 9 - e) = 1 - x + \ln 9 \quad ix. 5^{\ln x} - 3^{\ln x-1} = 3^{\ln x+1} - 5^{\ln x-1}$$

$$x. x^{\ln^2 x} = \frac{x^3}{e^2} \quad xi. x^{\ln x} = e^3 \cdot x^2 \quad xii. (4x)^{\ln 2 + \ln \sqrt{x}} = e^2 \quad xiii. x + \log(1+2^x) = x\log 5 + \log 6$$

$$xiv. 4^{\ln x} - 2^{\ln x} - e^{2\ln \sqrt{2}} = 0 \quad xv. 100^{1+\frac{1}{2}\log x} + 1000^{\frac{1}{3}\log(x-1)-1} = 1 \quad xvi. \ln(e^x - 3) + x = 2\ln 2$$

$$xvii. 4^{\ln x} - 9 \cdot x^{\ln 2} + 8 = 0 \quad xviii. \ln(e^{2x} + 2) = x + \ln 3 \quad ix. x + \ln(e^x - 1) = \ln 20$$

$$xx. x(1 - \log 5) = \log(4^x - 12) \quad xxi. 2^{2x-1} + 3^x + 4^{x+\frac{1}{2}} - 9^{\frac{x}{2}+1} = 0$$

$$xxii. \log(3^x + 2) = 100^{\log \sqrt{2}} \cdot \log 3 \cdot x \quad xxiii. 5^{2\log x} = 5 - 4 \cdot x^{\log 5}$$

2. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \ln\left(\frac{5-x}{x-3}\right)$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να λύσετε την εξίσωση: $f(\ln x) = 0$

γ. Να λύσετε την ανίσωση: $f(\ln^2 x) > f(\ln x)$

3. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$i. f(x) = \ln \frac{x+1}{2-x} \quad ii. f(x) = \ln \frac{e^{2x}-1}{e^x+2} \quad iii. f(x) = \ln \frac{e^x-1}{e-e^x} \quad iv. f(x) = \log \frac{x^2-4}{9-x^2}$$

$$v. f(x) = \sqrt{\ln x - 1} \quad vi. f(x) = \sqrt{3^x - 2} \quad vii. f(x) = \sqrt{\ln^2 x - 3\ln x + 2} \quad viii. f(x) = \sqrt{\frac{\ln x - 2}{3 - \ln x}}$$

$$ix. f(x) = \ln(e^{2x} - 4e^x + 3) \quad x. f(x) = \sqrt{\ln(\ln(x^2 - (2+e)x + 3e))}$$

4. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

$$i. -2\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} + 3\left(\frac{1}{5}\right)^x - 1 \leq 0 \quad ii. \log^2 x \geq 3\log x - 2 \quad iii. \ln^2 x \leq 2 - \ln x$$

$$iv. (4x)^{\log 2 + \log \sqrt{x}} > 100 \quad v. \left(\frac{1}{2}\right)^{\log^2 x - 5\log x + 6} > 1 \quad vi. 5 \cdot 25^x - 2 \cdot 5^{x+1} - 5^x + 2 > 0$$

5. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(5-3^x)$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii. Να βρείτε τα κοινά σημεία της με τους άξονες.

iii. Να λύσετε την ανίσωση: $f(3x) > 0$.

6. Έστω η συνάρτηση: $f(x) = \ln(\ln(x-1))$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- ii. Να βρείτε τα σημεία τομής με τον $x\chi'$.
- iii. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) < 0$.

7. Έστω η συνάρτηση $f(x) = (2\ln a - 1)^x$

- i. Να βρείτε για ποιες τιμές του a η συνάρτηση ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.
- ii. Να βρείτε το a ώστε η συνάρτηση να είναι γνήσια αύξουσα.
- iii. Για $a=e^4$, να λύσετε την ανίσωση: $f(2x) < \frac{1}{49}$

8. Έστω η συνάρτηση: $f(x) = \ln(e^x - 3^{x-1})$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = x - 2\ln 2$

9. Έστω η συνάρτηση: $f(x) = x^{\ln x}$

- i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x^2 \cdot e^3$
- ii. Να αποδείξετε ότι: $f(2\theta) > \theta^{\ln 4}$ όπου $\theta > 0$.

10. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$i. \begin{cases} \ln x + \ln y = 2 \\ \ln x \cdot \ln y = -8 \end{cases} \quad ii. \begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ 9^{x-2y} \cdot 3^y = 81 \end{cases} \quad iii. \begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 20 \\ \log \sqrt{xy} = 1 \end{cases}$$

11. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.
- β. Να αποδείξετε ότι: $f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = f(x) + f(y)$
- γ. Να λυθεί η εξίσωση: $f(x) + \ln 9 = f(-x)$

12. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \ln(e^x - e)$

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, καθώς και τα σημεία τομής της με τους άξονες - αν υπάρχουν.
- β. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική της παράσταση βρίσκεται «κάτω» από τον $x\chi'$.
- γ. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\ln 2)$ και $\ln(f(2))$

13. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = (e^{2a} - a^{e^2})x^3 + (\ln^2 a - 2\ln a)x^2 + (a^2 - (1+e^2)a + e^2)x + \ln a - 2$$

- α. Βρείτε το a ώστε το $P(x)$ να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

β. Για την τιμή του a που βρήκατε, να λύσετε την ανίσωση: $x^{a-e^2+3} - 7x^{\frac{1}{2}\ln a} + 3\ln a \leq 0$