ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\frac{x}{2}+\lambda^2-6\lambda+2$, $x>0$ όπου λ ένας πραγματικός αριθμός.

  Α. α. Να προσδιοριστεί το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα και το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα.

  Μονάδες 6

  β. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα .

  Μονάδες 6

  Β. Θεωρούμε ότι οι τιμές της συνάρτησης f(2), f(4), f(8), f(3) και f(5) είναι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ.

  α. Αν R είναι το εύρος και δ η διάμεσος των παρατηρήσεων, να δειχθεί ότι

  $$R=3+\ln\frac{1}{4} \quad \text{και} \quad \delta=\ln 4+\lambda^2-6\lambda$$

  Μονάδες 7

  β. Έστω ο δειγματικό ςχώρος $\Omega=\{1,2,3,\ldots,100\}$ ο οποίος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Αν το λ παίρνει τιμές στο δειγματικό χώρο Ω, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένο υ

  2009 ΓΕΝ. ΛΥΚ $A=\{\lambda\in\Omega \mid R+\delta< \ 2\}$ **Μονάδες 6**

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\nu^3x+\frac{4}{x^2}$, $x\in(0,1)$, όπου ν ακέραιος αριθμός με ν >2

  Α. α. Να προσδιοριστε ίτο διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα και το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα.

  Μονάδες 8

  β. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα και να δειχθεί ότι $f(x)\geq 3\nu^2$ για κάθε $x\in(0,1)$

  Μονάδες 5

  Β. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο Ω = {1, 2, ..., ν} με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και το ενδεχόμενό του, Α για το οποίο ισχύει

  $$\nu^3 P(A)+\frac{4}{(P(A))^2}-3\nu^2 \quad \text{και} \quad N(A)=\nu^2-9\nu-8$$

  όπου P(A) είναι η πιθανότητα του Α και Ν(Α) το πλήθος των στοιχείων του Α

  α. Να δείξετε ότι $P(A)=\frac{1}{5}$

  Μονάδες 7

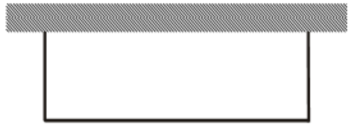
  β. Αν επιπλέον Β είναι ένα ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω με $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$, να υπολογιστεί η πιθανότητα του ενδεχομένου $A'\cup B$

  Μονάδες 5

  2009 ΓΕΝ. ΛΥΚ. ΕΠΑΝΑΛ

- Έχουμε περιφράξει με συρματόπλεγμα μήκους 200 m μια ορθογώνια περιοχή από τις τρεις πλευρές της (Σχήμα 1). Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος.

  Έστω ότι το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι x.

  Σχήμα 1

  α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της περιοχής που περιφράξαμε δίνεται από τον τύπο

  $$f(x) = 100x - \frac{1}{2}x^2 .$$

  Μονάδες 6

  β. Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια που θα μπορούσαμε να περιφράξουμε με το συρματόπλεγμα των 200 m.

  Μονάδες 7

  γ. Να βρείτε τη μέση τιμή των αριθμών f′(100), f′(101), f′(102), f′(103) και f′(104).

  Μονάδες 5

  δ. Έστω CV ο συντελεστής μεταβολής των αριθμών f′(100), f′(101), f′(102), f′(103) και f′(104) και CV′ ο συντελεστής μεταβολής που προκύπτει όταν αυξήσουμε καθέναν από τους αριθμούς αυτούς κατά c, όπου $c\neq 2$. Να υπολογίσετε το c, έτσι ώστε να ισχύει CV′ = 2CV.

  2008 ΓΕΝ. ΛΥΚ. ΕΠΑΝΑΛ **Μονάδες 7**

- Έστω υ δειγματικός χώρος Ω={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Για τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ του Ω είναι

  $A\bigcup B=\{1,2,3,4,5\ 6\}$, $A\bigcap B \quad 1,3,4\}$ $\quad 2,6\}$ και

  $$\Gamma=\left\{x\in\Omega\,/\,\frac{x+1}{x-1}\geq 2\right\}.$$

  α. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες P(A), P(B), P(Γ).

  Μονάδες 9

  β. Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί το Β και όχι το Γ.

  Μονάδες 3

  γ. Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Β και Γ.

  Μονάδες 3

  δ. Αν s^2 είναι η διακύμανση των τιμών λ, 3λ, 5λ, όπου $\lambda\in\Omega$, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχόμενου $\Delta = \{\lambda\in\Omega \,/\, s^2> 24\}$.

  2005 ΓΕΝ. ΛΥΚ **Μονάδες 10**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = -2x^2+kx + 4\sqrt{x} + 10,\ x\geq 0$.

  α. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο $A(1,f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα x΄x, να αποδείξετε ότι k=2 και να βρείτε την εξίσωσή της.
  Μονάδες 5

  β. Μία τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{x} = f(1)$ και τυπική απόκλιση $s = -\dfrac{2f'(4)}{13}$. Τρεις παρατηρήσεις, αντιπροσωπευτικού δείγματος μεγέθους ν, είναι μικρότερες ή ίσες του 8.

  (i) Να βρείτε τον αριθμό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα (10,16).
  Μονάδες 10

  (ii) Να αποδείξετε ότι το δείγμα των παρατηρήσεων που έχει ληφθεί, δεν είναι ομοιογενές.
  Να βρείτε τη μικρότερη τιμή της παραμέτρου α>0, που πρέπει να προστεθεί σε κάθε μία από τις προηγούμενες παρατηρήσεις, ώστε το δείγμα των νέων παρατηρήσεων να είναι ομοιογενές.

  2006 ΓΕΝ. ΛΥΚ **Μονάδες 10**

- Έστω Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, ώστε να ισχύουν:

  (i) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα Α, Β είναι $\frac{7}{8}$.

  (ii) Οι πιθανότητες $P(B)$, $P(A\cap B)$ δεν είναι ίσες και ανήκουν στο σύνολο $X = \left\{k, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right\}$, όπου

  $$k = \lim_{x\to 5} \frac{3x-15}{x^2-6x+5}.$$

  α. Να βρεθεί το k. **Μονάδες 5**

  β. Να βρεθούν τα $P(B)$, $P(A\cap B)$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
  Μονάδες 8

  γ. Να βρεθούν οι πιθανότητες:
  (1) Να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α.
  Μονάδες 6
  (2) Να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο Α.

  2005 ΓΕΝ. ΛΥΚ **Μονάδες 6**

- Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1}{x},\ x \in (0,+\infty)$.

  α. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $\Lambda(1,1)$.
  Μονάδες 7

  β. Από τυχαίο σημείο $M(x, y)$ της γραφικής παράστασης της f φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες xx΄ και yy΄, οι οποίες σχηματίζουν με τους ημιάξονες Οx, Oy ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
  Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Μ, ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να είναι ελάχιστη.
  Μονάδες 10

  γ. Οι τετμημένες πέντε διαφορετικών σημείων της εφαπτομένης του ερωτήματος **(α)** έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 5$ και τυπική απόκλιση $s_x = 2$.
  Να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{y}$ και η τυπική απόκλιση s_y των τεταγμένων των σημείων αυτών.
  Μονάδες 8

  2005 ΓΕΝ. ΛΥΚ

- Οι χρόνοι σε ώρες (παρατηρήσεις) που έξι από τους επίγειους σταθμούς δεν είχαν επαφή με τον Ελληνοκυπριακό δορυφόρο είναι:
  $t_1 = 0,\quad t_2 = 0,\quad t_3 = 1,\quad t_4 = 2,\quad t_5 = 4,\quad t_6 = 5$.

  α) Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και τη διάμεσο δ των παρατηρήσεων.
  Μονάδες 6

  β) Αν $f(x) = (t_1-x)^2+(t_2-x)^2+(t_3-x)^2+(t_4-x)^2+(t_5-x)^2+(t_6-x)^2$, τότε:

  i) να αποδείξετε ότι $f'(\bar{x}) = 0$
  Μονάδες 6

  ii) να αποδείξετε ότι $f(\bar{x}) = 6s^2$, όπου s^2 είναι η διακύμανση των παρατηρήσεων και
  Μονάδες 5

  iii) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(\bar{x}, f(\bar{x}))$.
  Μονάδες 8

  2003 ΓΕΝ. ΛΥΚ. ΕΣΠΕΡΙΝΑ