

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- Έστω  $A$  και  $B$  δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  και  $p$  ένας πραγματικός αριθμός με  $0 < p < 1$ . Δίνεται ότι οι πιθανότητες  $P(A)$ ,  $P(A \cup B)$  και  $P(A \cap B)$  είναι ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους και αποτελούν στοιχεία του συνόλου

$$\{p-1, p, p+1, p^2, p^3\}.$$

- α. Να δείξετε ότι  $P(A) = p^2$ ,  $P(A \cup B) = p$  και  $P(A \cap B) = p^3$ .

**Μονάδες 9**

- β. Να αποδείξετε ότι  $P(B) = p^3 - p^2 + p$ .

**Μονάδες 8**

- γ. Να αποδείξετε ότι  $P(B - A) > P(A - B)$ .

**Μονάδες 8**

2008 ΓΕΝ. ΛΥΚ. ΕΠΑΝΑΛ

- Έστω ο δειγματικός χώρος  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Θεωρούμε τα ενδεχόμενα  $A, B$  του  $\Omega$  τα οποία ορίζονται ως εξής:

$$A = \{x \in \Omega / 0 \leq \ln(x-1) < \ln 3\},$$

$$B = \{x \in \Omega / (x^2 - 5x) \cdot (x-1) = -6 \cdot (x-1)\}.$$

- α. Να βρεθούν οι πιθανότητες  $P(A-B)$  και  $P(B \cup A')$ .

**Μονάδες 8**

- β. Αν  $P(A) = \frac{1}{4}$ , να υπολογιστεί η πιθανότητα  $P(A' \cup B')$ .

**Μονάδες 7**

- γ. Αν  $P(A) = \frac{1}{4}$  και  $P(B-A) = \frac{1}{8}$ , να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή της πιθανότητας  $P(X)$ , όπου  $X$  είναι ενδεχόμενο του  $\Omega$  τέτοιο ώστε  $A \cup X = B$ .

2007 ΓΕΝ. ΛΥΚ. ΕΠΑΝΑΛ

**Μονάδες 10**

- Μία Τράπεζα χορηγεί διαφόρων τύπων δάνεια στους πελάτες της. Αν επιλεγεί τυχαία κάποιος πελάτης η πιθανότητα να έχει πάρει μόνο στεγαστικό ή μόνο καταναλωτικό δάνειο είναι 0,7 ενώ η πιθανότητα να μην έχει πάρει κανένα από τα δύο προηγούμενα δάνεια είναι 0,1.

- α. Να βρείτε την πιθανότητα ένας πελάτης να έχει πάρει και τα δύο δάνεια. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα «έχει πάρει στεγαστικό» και «έχει πάρει καταναλωτικό» είναι ασυμβίβαστα.

**Μονάδες 15**

- β. Αν επιπλέον η πιθανότητα να έχει πάρει μόνο στεγαστικό είναι 0,6 να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

i. «έχει πάρει καταναλωτικό».

ii. «έχει πάρει μόνο καταναλωτικό».

**Μονάδες 10**

2006 ΓΕΝ. ΛΥΚ. ΕΠΑΝΑΛ

- Το 50% των κατοίκων μιας πόλης διαβάζουν την εφημερίδα  $\alpha$ , ενώ το 30% των κατοίκων διαβάζουν την εφημερίδα  $\alpha$  και δεν διαβάζουν την εφημερίδα  $\beta$ .

- α. Ποια είναι η πιθανότητα ένας κάτοικος της πόλης, που επιλέγεται τυχαία, να μη διαβάζει την εφημερίδα  $\alpha$  ή να διαβάζει την εφημερίδα  $\beta$ ;

**Μονάδες 7**

- β. Ορίζουμε το ενδεχόμενο

$B$ : «ένας κάτοικος της πόλης που επιλέγεται τυχαία, διαβάζει την εφημερίδα  $\beta$ ».

Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10}.$$

**Μονάδες 9**

- γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + P(B)x$$

όπου  $x$  πραγματικός αριθμός και  $B$  το ενδεχόμενο που ορίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x)$  δεν έχει ακρότητα.

**Μονάδες 9**

2008 ΓΕΝ. ΛΥΚ

- Έστω ο δειγματικός χώρος  $\Omega = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  για τον οποίο ισχύει  $P(-1) = P(0) = P(1) = P(2) = 2P(3) = 2P(4) = 2P(5)$ . Ορίζουμε τα ενδεχόμενα του  $\Omega$ :

$$A = \{1, 3, x^2 - x - 3\}, B = \{2, x + 1, 2x^2 + x - 2, -2x + 1\}$$

όπου  $x$  ένας πραγματικός αριθμός.

- α. Να βρεθούν οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του  $\Omega$ , δηλαδή οι  $P(-1)$ ,  $P(0)$ ,  $P(1)$ ,  $P(2)$ ,  $P(3)$ ,  $P(4)$ ,  $P(5)$ .

**Μονάδες 7**

- β. Να βρεθεί η μοναδική τιμή του  $x$  για την οποία ισχύει  $A \cap B = \{-1, 3\}$ .

**Μονάδες 8**

- γ. Για  $x = -1$  να δειχθεί ότι:

$$P(A) = \frac{5}{11}, P(B) = \frac{7}{11}, P(A \cap B) = \frac{3}{11}$$

και στη συνέχεια να υπολογιστούν οι πιθανότητες  $P(A-B)$  και  $P(A \cup B')$ .

2007 ΓΕΝ. ΛΥΚ

**Μονάδες 10**

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- Σε ένα χορευτικό όμιλο συμμετέχουν  $x$  αγόρια και  $(x+4)^2$  κορίτσια.

α. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο, για να εκπροσωπήσει τον όμιλο σε μια εκδήλωση. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του  $x$  την πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι.

**Μονάδες 7**

β. Αν η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι είναι ίση με  $\frac{1}{19}$  και ο όμιλος περιλαμβάνει λιγότερα από 100 μέλη, να βρείτε τον αριθμό των μελών του ομίλου, καθώς και την πιθανότητα να επιλεγεί κορίτσι.

**Μονάδες 8**

γ. Ποιος πρέπει να είναι ο αριθμός των αγοριών του ομίλου, ώστε να μεγιστοποιείται η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι, και ποια είναι η τιμή της πιθανότητας αυτής;

2006 ΓΕΝ. ΛΥΚ

**Μονάδες 10**

- Έστω  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  ο δειγματικός χώρος της ρίψης ενός μη αμερόληπτου ζαριού και η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - kx^2 + 4x + 2, \text{ όπου } k \in \Omega.$$

Αν  $P(1) = P(3) = P(5) = 2P(2) = 4P(4) = 2P(6)$ , τότε να βρείτε:

α. Τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων  $P(1)$ ,  $P(2)$ ,  $P(3)$ ,  $P(4)$ ,  $P(5)$ ,  $P(6)$ .

**Μονάδες 8**

β. Τις πιθανότητες των ενδεχομένων  $A$  και  $B$ , όπου  
 $A$ : «Η ένδειξη του ζαριού είναι άρτιος αριθμός»  
 $B$ : «Η ένδειξη του ζαριού είναι περιττός αριθμός».

**Μονάδες 8**

γ. Την πιθανότητα του ενδεχομένου  $\Gamma$ , όπου  
 $\Gamma$ : «Η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ ».

2004 ΓΕΝ. ΛΥΚ

**Μονάδες 9**

- Έχουμε 30 σφαίρες μέσα σ' ένα δοχείο, αριθμημένες από το 1 έως το 30. Επιλέγουμε στην τύχη μία σφαίρα. Έστω  $A$  το ενδεχόμενο ο αριθμός της σφαίρας να είναι άρτιος και  $B$  το ενδεχόμενο ο αριθμός αυτός να είναι πολλαπλάσιο του 5.

Αν  $A'$ ,  $B'$  είναι τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα των  $A$  και  $B$  αντιστοίχως, να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

α.  $P(A)$ ,  $P(B)$

**Μονάδες 6**

β.  $P(A \cup B)$

**Μονάδες 6**

γ.  $P(A \cup B')$

**Μονάδες 6**

δ.  $P((A' \cap B) \cup A \cap B')$

2003 ΓΕΝ. ΛΥΚ. ΕΠΑΝΑΛ

**Μονάδες 7**

- Στο σύλλογο καθηγητών ενός λυκείου το 55% είναι γυναίκες, το 40% των καθηγητών είναι φιλόλογοι και το 30% είναι γυναίκες φιλόλογοι. Επιλέγουμε τυχαία έναν καθηγητή για να εκπροσωπήσει το σύλλογο σε κάποια επιτροπή.

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες ο καθηγητής να είναι:

α. γυναίκα ή φιλόλογος

**Μονάδες 5**

β. γυναίκα και όχι φιλόλογος

**Μονάδες 5**

γ. άνδρας και φιλόλογος

**Μονάδες 7**

δ. άνδρας ή φιλόλογος.

**Μονάδες 8**

2003 ΓΕΝ. ΛΥΚ

- Έστω  $A, B$  δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  με  $P(A) + P(B) \neq 2P(A \cap B)$ .

Δίνεται ακόμα η συνάρτηση:

$$f(x) = (x - P(A \cup B))^3 - (x - P(A \cap B))^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

α. Να δείξετε ότι  $P(A \cap B) \neq P(A \cup B)$ .

**Μονάδες 5**

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x)$  παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο  $x = \frac{P(A) + P(B)}{2}$ .

**Μονάδες 13**

γ. Εάν τα ενδεχόμενα  $A$ ,  $B$  είναι ασυμβίβαστα, να δείξετε ότι  $f(P(A)) = f(P(B))$ .

2002 ΓΕΝ. ΛΥΚ

**Μονάδες 7**