

ΘΕΩΡΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

1 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1. Τι ονομάζεται συνάρτηση

Συνάρτηση (function) είναι μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου B .

2. Έστω η συνάρτηση f από το A στο B .

- a. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f
- b. Πότε η f λέγεται πραγματική συνάρτηση πραγματικής τιμής;

- a. Το σύνολο A , που λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης,
- b. Αν το A είναι υποσύνολο του συνόλου R των πραγματικών αριθμών, ενώ το B συμπίπτει με το R οι συναρτήσεις αυτές λέγονται **πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής** και τις οποίες στο εξής θα τις λέμε απλώς **συναρτήσεις**.

3. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση ή καμπύλη της f

Ονομάζουμε **γραφική παράσταση** ή **καμπύλη της f** σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy λέγεται το σύνολο των σημείων $M(x, (f(x)))$ για όλα τα $x \in A$.

4. Τι λέγεται εξίσωση της γραφικής παράστασης της f .

Η εξίσωση $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα ζεύγη (x, y) που είναι συντεταγμένες σημείων της γραφικής παράστασης της f και λέγεται **εξίσωση της γραφικής παράστασης της f** .

5. Αν f, g δυο συναρτήσεις πως ορίζονται οι πράξεις μεταξύ αυτών του αθροίσματος της διαφοράς του γινομένου και του πηλίκου;

Αν δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο A , τότε ορίζονται και οι συναρτήσεις:

- Το άθροισμα $S = f + g$, με $S(x) = f(x) + g(x)$, $x \in A$
- Η διαφορά $D = f - g$, με $D(x) = f(x) - g(x)$, $x \in A$
- Το γινόμενο $P = f \cdot g$, με $P(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in A$ και
- Το πηλίκο $R = \frac{f}{g}$, με $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, όπου $x \in A$ και $g(x) \neq 0$.

6. Πότε μια συνάρτηση λέγεται “γνησίως αύξουσα συνάρτηση” και πότε “γνησίως φθίνουσα συνάρτηση”.

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, και **γνησίως φθίνουσα** στο Δ , όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

7. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , παρουσιάζει στο $x_1 \in A$ τοπικό μέγιστο και πότε τοπικό ελάχιστο στο $x_2 \in A$;

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει:

Τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1 , και **τοπικό ελάχιστο** στο $x_2 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_2)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_2 .

Ονομάζουμε **περιοχή** του x_1 είναι ένα ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το x_1

Αν η ανισότητα $f(x) \leq f(x_1)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε, η f παρουσιάζει στο $x_1 \in A$ **ολικό μέγιστο** ή απλά **μέγιστο**, το $f(x_1)$. Ομοίως για το **ολικό ελάχιστο**.

Τα μέγιστα και τα ελάχιστα μιας συνάρτησης, τοπικά ή ολικά, λέγονται **ακρότατα** της συνάρτησης.

8. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται **συνεχής**

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται **συνεχής**, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής καμπύλη, δηλαδή για το σχεδιασμό της δε χρειάζεται να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί.

9. Πότε μια συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της**

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0** του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή: $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

10. Τι εκφράζει η παράγωγος της f στο x_0

Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το **ρυθμό μεταβολής** (rate of change) του $y = f(x)$ ως προς το x , όταν $x = x_0$.

- **Ο συντελεστής διεύθυνσης** της εφαπτομένης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ θα είναι $f'(x_0)$, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς x όταν $x = x_0$.
- **Η ταχύτητα ενός κινητού** που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$ θα είναι τη χρονική στιγμή t_0 $v(t_0) = f'(t_0)$ δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(t)$ ως προς t όταν $t = t_0$ ενώ
- **η επιτάχυνση του κινητού** είναι $a(t_0) = v'(t_0) = f''(t_0)$

11. Τι ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της f**

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , και B το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) **παράγωγος (derivative) της f και συμβολίζεται με f'** .

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η παράγωγος της f στο x_0 είναι αριθμός (το όριο) ενώ η παράγωγος της f είναι συνάρτηση που αντιστοιχεί σε κάθε x_0 αυτό το όριο.

Παραγωγή Βασικών Συναρτήσεων

- Η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$

Έχουμε $f(x+h) - f(x) = c - c = 0$

και για $h \neq 0$, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$, οπότε $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$.

Άρα $(c)' = 0$.

- Η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$

Έχουμε $f(x+h) - f(x) = (x+h) - x = h$, και για $h \neq 0$, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h}{h} = 1$.

Επομένως $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$.

Άρα $(x)' = 1$.

- Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^p$

14

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Έχουμε

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = (2x+h)h,$$

και για $h \neq 0$, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(2x+h)h}{h} = 2x+h$.

Επομένως, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x$.

Άρα $(x^2)' = 2x$

Αποδεικνύεται ότι $(x^v)' = vx^{v-1}$, όπου v φυσικός.

Κανόνες Παραγώγισης

- Η παράγωγος της συνάρτησης $cf(x)$

Έστω η συνάρτηση $F(x) = cf(x)$. Έχουμε

$F(x+h) - F(x) = cf(x+h) - cf(x) = c(f(x+h) - f(x))$, και για $h \neq 0$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{c(f(x+h) - f(x))}{h} = c \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Επομένως

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[c \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] = cf'(x).$$

Άρα $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$.

- Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) + g(x)$

Έστω η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= (f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x)) \\ &= (f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x)), \end{aligned}$$

και για $h \neq 0$, $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$.

Επομένως

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x). \text{ Άρα}$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

12. Να διατυπώσετε το κριτήριο της πρώτης παραγώγου για την μονοτονία

- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .
- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

13. Να διατυπώσετε το κριτήριο της πρώτης παραγώγου για τα ακρότατα

- Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0 \in (a, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (a, β) για $x = x_0$ μέγιστο.
- Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0 \in (a, \beta)$, $f'(x) < 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (a, β) για $x = x_0$ ελάχιστο.
- Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (a, β) .

2. ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Βασικές έννοιες

Στατιστική είναι ένα σύνολο αρχών και μεθοδολογιών για:

- το σχεδιασμό της διαδικασίας συλλογής δεδομένων
- τη συνοπτική και αποτελεσματική παρουσίασή τους
- την ανάλυση και εξαγωγή αντίστοιχων συμπερασμάτων.

Πληθυσμός (population) είναι ένα σύνολο του οποίου εξετάζουμε τα στοιχεία του ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά τους.

Τα στοιχεία του πληθυσμού συχνά αναφέρονται και ως **μονάδες** ή **άτομα** του πληθυσμού.

Μεταβλητές λέγονται τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό (variables) και τις συμβολίζουμε συνήθως με τα κεφαλαία γράμματα X, Y, Z, B, \dots

Τιμές της μεταβλητής λέγονται οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή. Από τη διαδοχική εξέταση των ατόμων του πληθυσμού ως προς ένα χαρακτηριστικό τους προκύπτει μια σειρά από δεδομένα, που λέγονται **στατιστικά δεδομένα ή παρατηρήσεις**. Τα στατιστικά δεδομένα δεν είναι κατ'ανάγκη διαφορετικά.

☞ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Εξετάζουμε την ομάδα αίματος δέκα ατόμων, τα στατιστικά δεδομένα ή παρατηρήσεις που θα προκύψουν μπορεί να είναι: A, A, B, A, AB, O, AB, AB, AB, O, B. Οι δυνατές όμως τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή "ομάδα αίματος" είναι οι εξής τέσσερις: A, B, AB και O. Ο πληθυσμός είναι το σύνολο των δέκα ατόμων και μεταβλητή είναι η ομάδα αίματος

Τις μεταβλητές τις διακρίνουμε:

1. Σε **ποιοτικές** ή **κατηγορικές** μεταβλητές, των οποίων οι τιμές τους δεν είναι αριθμοί. Τέτοιες είναι, για παράδειγμα, η ομάδα αίματος (με τιμές A, B, AB, O), το φύλο (με τιμές αγόρι, κορίτσι), οι συνέπειες του καπνίσματος (με τιμές καρδιακά νοσήματα, καρκίνος κτλ), όπως επίσης και η οικονομική κατάσταση και η υγεία των ανθρώπων (που μπορεί να χαρακτηριστεί ως κακή, μέτρια, καλή ή πολύ καλή), καθώς και το ενδιαφέρον των μαθητών για τη Στατιστική, που μπορεί να χαρακτηριστεί ως υψηλό, μέτριο, χαμηλό ή μηδαμινό.
2. Σε **ποσοτικές** μεταβλητές, των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί και διακρίνονται:
 - i) Σε **διακριτές** μεταβλητές, που παίρνουν μόνο "μεμονωμένες" τιμές. Τέτοιες μεταβλητές είναι, για παράδειγμα, ο αριθμός των υπαλλήλων μιας επιχείρησης (με τιμές 1,2,...), το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού (με τιμές 1,2,...,6) κτλ.
 - ii) Σε **συνεχείς** μεταβλητές, που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α, β) . Τέτοιες μεταβλητές είναι το ύψος και το βάρος των μαθητών της Γ΄ Λυκείου, ο χρόνος που χρειάζονται οι μαθητές να απαντήσουν στα θέματα μιας εξέτασης, η διάρκεια μιας τηλεφωνικής συνδιάλεξης κτλ.

Απογραφή (census). Ένας τρόπος για να πάρουμε τις απαραίτητες πληροφορίες που χρειαζόμαστε για κάποιο πληθυσμό είναι να εξετάσουμε όλα τα άτομα (στοιχεία) του

πληθυσμού ως προς το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει. Η μέθοδος αυτή συλλογής των δεδομένων καλείται **απογραφή**

Δείγμα ονομάζουμε κάθε υποσύνολο του πληθυσμού. Ένα δείγμα θεωρείται **αντιπροσωπευτικό** ενός πληθυσμού, εάν έχει επιλεγεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε μονάδα του πληθυσμού να έχει την ίδια δυνατότητα να επιλεγεί.

Οι αρχές και οι μέθοδοι για τη συλλογή και ανάλυση δεδομένων από πεπερασμένους πληθυσμούς είναι το αντικείμενο της **δειγματοληψίας** που αποτελεί τη βάση της Στατιστικής.

Στατιστικοί Πίνακες

Οι πίνακες διακρίνονται στους:

α) **γενικούς πίνακες**, οι οποίοι περιέχουν όλες τις πληροφορίες που προκύπτουν από μία στατιστική έρευνα (συνήθως με αρκετά λεπτομερειακά στοιχεία) και αποτελούν πηγές στατιστικών πληροφοριών στη διάθεση των επιστημόνων-ερευνητών για παραπέρα ανάλυση και εξαγωγή συμπερασμάτων,

β) **ειδικούς πίνακες**, οι οποίοι είναι συνοπτικοί και σαφείς. Τα στοιχεία τους συνήθως έχουν ληφθεί από τους γενικούς πίνακες.

Κάθε πίνακας που έχει κατασκευαστεί σωστά πρέπει να περιέχει:

α) τον **τίτλο**, που γράφεται στο επάνω μέρος του πίνακα και δηλώνει με σαφήνεια και συνοπτικά το περιεχόμενο του πίνακα,

β) τις **επικεφαλίδες** των γραμμών και στηλών, που δείχνουν συνοπτικά τη φύση και τις μονάδες μέτρησης των δεδομένων,

γ) το **κύριο σώμα** (κορμό), που περιέχει διαχωρισμένα μέσα στις γραμμές και στις στήλες τα στατιστικά δεδομένα,

δ) την **πηγή**, που γράφεται στο κάτω μέρος του πίνακα και δείχνει την προέλευση των στατιστικών στοιχείων, έτσι ώστε ο αναγνώστης να ανατρέχει σ'αυτήν, όταν επιθυμεί, για επαλήθευση στοιχείων ή για λήψη περισσότερων πληροφοριών.

Ας υποθέσουμε ότι x_1, x_2, \dots, x_k είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , $k \leq n$.

Συχνότητα : Στην τιμή x_i αντιστοιχίζεται η (απόλυτη) **συχνότητα** (frequency) v_i , δηλαδή ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων.

Ισχύει: $v_1 + v_2 + \dots + v_k = n$

Σχετική συχνότητα : Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα v_i με το μέγεθος n του δείγματος, προκύπτει η **σχετική συχνότητα** (relative frequency) f_i της τιμής x_i , δηλαδή

$$f_i = \frac{v_i}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Για τη σχετική συχνότητα ισχύουν οι ιδιότητες:

(i) $0 \leq f_i \leq 1$ για $i = 1, 2, \dots, k$ αφού $0 \leq v_i \leq n$.

(ii) $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$, αφού

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = \frac{v_1}{n} + \frac{v_2}{n} + \dots + \frac{v_k}{n} = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_k}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

Συνήθως, τις σχετικές συχνότητες f_i τις εκφράζουμε επί τοις εκατό, οπότε συμβολίζονται με $f_i \%$, δηλαδή $f_i \% = 100 f_i$.

Πίνακας συχνοτήτων: Οι ποσότητες x_i, v_i, f_i για ένα δείγμα συγκεντρώνονται σε ένα συνοπτικό πίνακα, που ονομάζεται **πίνακας κατανομής συχνοτήτων** ή απλά **πίνακας συχνοτήτων**.

Κατανομή συχνοτήτων: Για μια μεταβλητή, το σύνολο των ζευγών (x_i, v_i) λέμε ότι αποτελεί την **κατανομή συχνοτήτων** και το σύνολο των ζευγών (x_i, f_i) , ή των ζευγών $(x_i, f_i \%)$, την **κατανομή των σχετικών συχνοτήτων**.

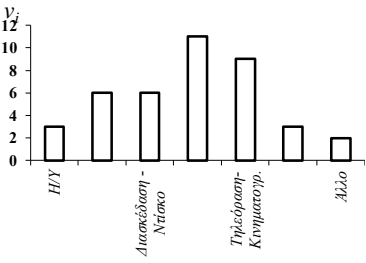
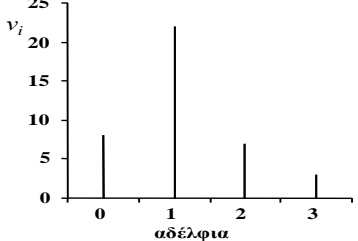
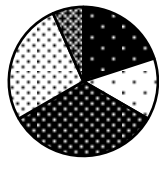
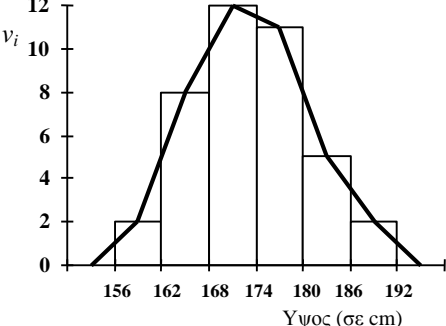
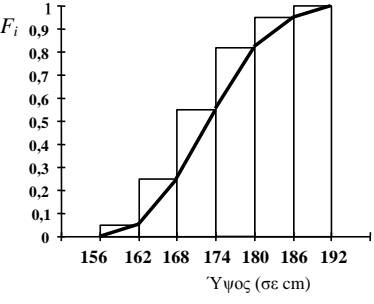
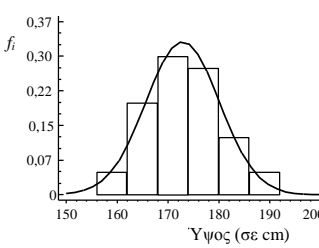
☑ **Αθροιστική συχνότητα N_i** μιας τιμής x_i μιας ποσοτικής μεταβλητής X , λέγεται το άθροισμα των συχνοτήτων των τιμών που έχουν τιμή μικρότερη ή ίση με την x_i , δηλαδή

$$N_i = v_1 + v_2 + \dots + v_i, \text{ για } i=1,2,\dots,k. \text{ Ισχύει } v_k = N_k - N_{k-1}$$

☑ **Αθροιστική σχετική συχνότητα F_i** μιας τιμής x_i μιας ποσοτικής μεταβλητής X , λέγεται το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων των τιμών που έχουν τιμή μικρότερη ή ίση με την x_i , δηλαδή :

$$F_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i, \text{ για } i=1,2,\dots,k. \text{ Ισχύει } f_k = F_k - F_{k-1}.$$

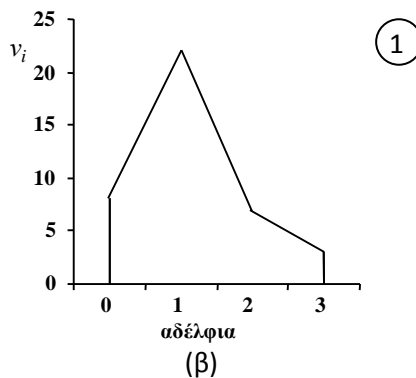
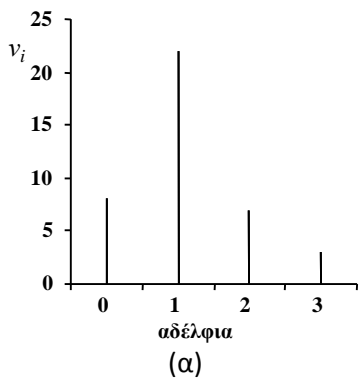
Γραφική Παράσταση Κατανομής Συχνοτήτων

 <p>ΡΑΒΔΟΓΡΑΜΜΑ (για ποιοτικές μεταβλητές)</p>	 <p>ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ (για ποσοτικές μεταβλητές)</p>	 <p>$\alpha_i = f_i \cdot 360^\circ$ ΚΥΚΛΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ (για ποσοτικές και ποιοτικές μεταβλητές)</p>
 <p>Ιστόγραμμα συχνοτήτων</p>	 <p>Ιστόγραμμα και πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων</p>	 <p>Καμπύλη σχετικών συχνοτήτων</p>

☑ Το **ραβδόγραμμα** (barchart) χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής. Το ραβδόγραμμα αποτελείται από ορθογώνιες στήλες που οι βάσεις τους βρίσκονται πάνω στον οριζόντιο ή τον κατακόρυφο άξονα. Σε κάθε τιμή της μεταβλητής X αντιστοιχεί μια ορθογώνια στήλη της οποίας το ύψος είναι ίσο με την αντίστοιχη συχνότητα ή σχετική συχνότητα. Έτσι έχουμε αντίστοιχα το **ραβδόγραμμα συχνοτήτων** και το **ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων**. Τόσο η απόσταση μεταξύ των στηλών όσο και το μήκος των βάσεων τους καθορίζονται αυθαίρετα.

☑ **Διάγραμμα συχνοτήτων** Στην περίπτωση που έχουμε μια ποσοτική μεταβλητή αντί του ραβδογράμματος χρησιμοποιείται το **διάγραμμα συχνοτήτων** (line diagram). Αυτό μοιάζει με το ραβδόγραμμα με μόνη διαφορά ότι αντί να χρησιμοποιούμε συμπαγή ορθογώνια υψώνουμε σε κάθε x_i (υποθέτοντας ότι $x_1 < x_2 < \dots < x_k$) μία κάθετη γραμμή με μήκος ίσο προς την αντίστοιχη συχνότητα, όπως φαίνεται στο σχήμα 1(α). Μπορούμε επίσης αντί των συχνοτήτων v_i στον κάθετο άξονα να βάλουμε τις σχετικές συχνότητες f_i , οπότε έχουμε το **διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων**.

Ενώνοντας τα σημεία (x_i, v_i) ή (x_i, f_i) έχουμε το λεγόμενο **πολύγωνο συχνοτήτων** ή **πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων**, αντίστοιχα, που μας δίνουν μια γενική ιδέα για τη μεταβολή της συχνότητας ή της σχετικής συχνότητας όσο μεγαλώνει η τιμή της μεταβλητής που εξετάζουμε, βλέπε σχήμα 1(β).

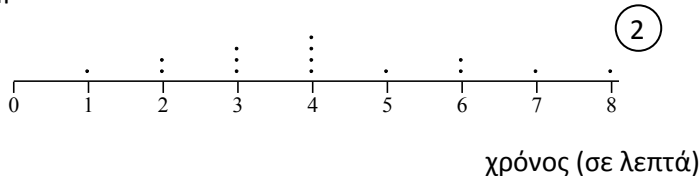


Διάγραμμα συχνοτήτων (α) και πολύγωνο συχνοτήτων (β) για τη μεταβλητή “αριθμός αδελφών” του παραπάνω πίνακα .

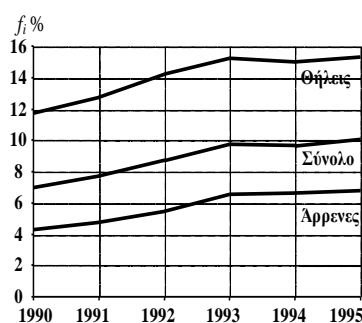
☑ Το **κυκλικό διάγραμμα** (piechart) χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση τόσο των ποιοτικών όσο και των ποσοτικών δεδομένων, όταν οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες. Το κυκλικό διάγραμμα είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς, τα εμβαδά ή ,ισοδύναμα, τα τόξα των οποίων είναι ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες ν_i ή τις σχετικές συχνότητες f_i των τιμών x_i της μεταβλητής. Αν συμβολίσουμε με α_i το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, τότε

$$\alpha_i = \nu_i \frac{360^\circ}{\nu} = 360^\circ f_i \quad \text{για } i=1,2,\dots,\kappa .$$

☑ **Σημειόγραμμα:** Όταν έχουμε λίγες παρατηρήσεις, η κατανομή τους μπορεί να περιγραφεί με το **σημειόγραμμα** (dot diagram), στο οποίο οι τιμές παριστάνονται γραφικά σαν σημεία υπεράνω ενός οριζόντιου άξονα. Στο σχήμα 2 έχουμε το σημειόγραμμα των χρόνων (σε λεπτά) 4,2,3,1,5,6,4,2,3,4,7,4,8,6,3 που χρειάστηκαν δεκαπέντε μαθητές, για να λύσουν ένα πρόβλημα.



☑ Το **χρονόγραμμα ή χρονολογικό διάγραμμα** χρησιμοποιείται για τη γραφική απεικόνιση της διαχρονικής εξέλιξης ενός οικονομικού, δημογραφικού ή άλλου μεγέθους. Ο οριζόντιος άξονας χρησιμοποιείται συνήθως ως άξονας μέτρησης του χρόνου και ο κάθετος ως άξονας μέτρησης της εξεταζόμενης μεταβλητής.
☞ Στο σχήμα έχουμε το χρονόγραμμα του ποσοστού ανεργίας στη χώρα μας από το 1990 έως το 1995. (Πηγή ΕΣΥΕ).



Ομαδοποίηση των Παρατηρήσεων

- ☑ **Κλάσεις :** Όταν το πλήθος των τιμών μιας μεταβλητής είναι αρκετά μεγάλο είναι απαραίτητο να ταξινομηθούν (ομαδοποιηθούν) τα δεδομένα σε μικρό πλήθος ομάδων, που ονομάζονται και **κλάσεις** (class intervals). Οι κλάσεις είναι της μορφής $[\alpha, \beta)$, $[\beta, \gamma)$, ...
- ☑ **Όρια των κλάσεων** λέγονται τα άκρα των κλάσεων.
- ☑ **Κεντρική τιμή μιας κλάσης** λέγεται το ημιάθροισμα των άκρων της κλάσης.
- ☑ **Πλάτος μιας κλάσης** λέγεται η διαφορά του κατώτερου από το ανώτερο άκρο της κλάσης.

- ☑ **Εύρος του δείγματος** (range) R ονομάζουμε την διαφορά της μικρότερης παρατήρησης από την μεγαλύτερη παρατήρηση του δείγματος.
- ☑ **Συχνότητα της κλάσης** ή **συχνότητα της κεντρικής τιμής** $x_i, i=1,2,\dots,k$ καλείται το πλήθος των παρατηρήσεων n_i που προκύπτουν από τη διαλογή για την κλάση i

📖 ΣΧΟΛΙΑ :

- Οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης θεωρούνται όμοιες, οπότε μπορούν να “αντιπροσωπευθούν” από τις **κεντρικές τιμές**, τα κέντρα δηλαδή κάθε κλάσης.
- Οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης θεωρούνται ομοιόμορφα κατανομημένες σε κάθε κλάση οπότε για παράδειγμα οι μισές παρατηρήσεις κάθε κλάσης βρίσκονται αριστερά του κέντρου κλάσης και οι μισές δεξιά αυτού.

Ιστόγραμμα Συχνοτήτων

☑ **Ιστόγραμμα** συχνοτήτων ονομάζεται η αντίστοιχη γραφική παράσταση ενός πίνακα συχνοτήτων με ομαδοποιημένα δεδομένα.

☑ **Πως κατασκευάζεται:** Στον οριζόντιο άξονα ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων σημειώνουμε, με κατάλληλη κλίμακα, τα όρια των κλάσεων. Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε διαδοχικά ορθογώνια (ιστούς), από καθένα από τα οποία έχει βάση ίση με το πλάτος της κλάσης και ύψος τέτοιο, ώστε το **εμβαδόν του ορθογωνίου να ισούται με τη συχνότητα της κλάσης αυτής**.

ΕΙΔΙΚΑ : Σε Κλάσεις Ίσου Πλάτους

Θεωρώντας το πλάτος c ως μονάδα μέτρησης του χαρακτηριστικού στον οριζόντιο άξονα, το ύψος κάθε ορθογωνίου είναι ίσο προς τη συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης, έτσι ώστε να ισχύει πάλι ότι το εμβαδόν των ορθογωνίων είναι ίσο με τις αντίστοιχες συχνότητες. Επομένως, στον κατακόρυφο άξονα σε ένα ιστόγραμμα συχνοτήτων βάζουμε τις συχνότητες. Με ανάλογο τρόπο κατασκευάζεται και το **ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων**, οπότε στον κάθετο άξονα βάζουμε τις σχετικές συχνότητες.

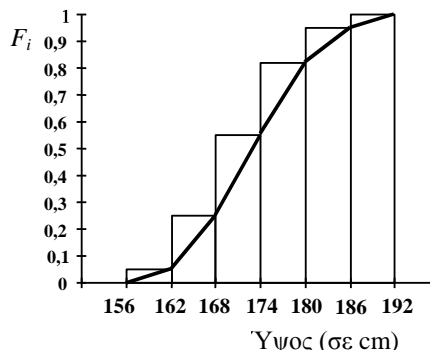
Πολύγωνο Συχνοτήτων

- Αν στα ιστογράμματα συχνοτήτων θεωρήσουμε δύο ακόμη υποθετικές κλάσεις, στην αρχή και στο τέλος, με συχνότητα μηδέν και στη συνέχεια ενώσουμε τα μέσα των άνω βάσεων των ορθογωνίων, σχηματίζεται το λεγόμενο **πολύγωνο συχνοτήτων** (frequency polygon).
- Το **εμβαδόν του χωρίου** που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το άθροισμα των συχνοτήτων, δηλαδή με το μέγεθος του δείγματος n .
- Όμοια κατασκευάζεται από το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων και το **πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων** με εμβαδόν ίσο με 1,

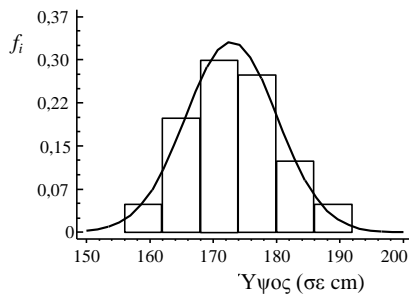
Με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζονται και τα **ιστογράμματα αθροιστικών συχνοτήτων** και **αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων**.

- Αν ενώσουμε σε ένα ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων τα **δεξιά άκρα** (όχι μέσα) των άνω βάσεων των ορθογωνίων με ευθύγραμμα τμήματα βρίσκουμε το **πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων** (ogive) της κατανομής.

☞ Στο σχήμα παριστάνεται το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων για το ύψος των μαθητών του πίνακα .



Καμπύλες Συχνοτήτων



Εάν υποθέσουμε ότι ο αριθμός των κλάσεων για μια συνεχή μεταβλητή είναι αρκετά μεγάλος (τείνει στο άπειρο) και ότι το πλάτος των κλάσεων είναι αρκετά μικρό (τείνει στο μηδέν), τότε η πολυγωνική γραμμή συχνοτήτων τείνει να πάρει τη μορφή μιας ομαλής καμπύλης, η οποία ονομάζεται **καμπύλη συχνοτήτων**.

Μερικές χαρακτηριστικές κατανομές συχνοτήτων



(α) ομοιόμορφη κατανομή

(β) κανονική κατανομή

(γ) ασύμμετρη κατανομή (θετική ασυμμετρία)

(δ) ασύμμετρη κατανομή (αρνητική ασυμμετρία)

Κανονική κατανομή Η κατανομή (β), με “κωδωνοειδή” μορφή λέγεται **κανονική κατανομή** (normal distribution) και παίζει σπουδαίο ρόλο στη Στατιστική.

Ομοιόμορφη κατανομή. Όταν οι παρατηρήσεις “κατανέμονται” ομοιόμορφα σε ένα διάστημα $[α, β]$, όπως στην κατανομή (α), η κατανομή λέγεται **ομοιόμορφη**.

Ασύμμετρη Όταν οι παρατηρήσεις δεν είναι συμμετρικά κατανεμημένες, η κατανομή λέγεται **ασύμμετρη με θετική ασυμμετρία** όπως στην κατανομή (γ) ή **αρνητική ασυμμετρία** όπως στην κατανομή (δ).

Η **μορφή μιας κατανομής συχνοτήτων** εξαρτάται από το πώς είναι κατανεμημένες οι παρατηρήσεις σε όλη την έκταση του εύρους τους.

ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

Μέτρα θέσης μιας κατανομής ονομάζουμε τα μέτρα που μας δίνουν την θέση του κέντρου των παρατηρήσεων στον οριζόντιο άξονα.

Μέση Τιμή (\bar{x}) ορίζεται ως το άθροισμα των παρατηρήσεων διά του πλήθους των παρατηρήσεων.

- Όταν σε ένα δείγμα μεγέθους n οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X είναι t_1, t_2, \dots, t_n , τότε η μέση τιμή συμβολίζεται με \bar{x} και δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$$

- Σε μια κατανομή συχνοτήτων, αν x_1, x_2, \dots, x_k είναι οι τιμές της μεταβλητής X με συχνότητες v_1, v_2, \dots, v_k αντίστοιχα, η μέση τιμή ορίζεται ισοδύναμα από τη σχέση:

$$\bar{x} = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k}{v_1 + v_2 + \dots + v_k} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i v_i}{\sum_{i=1}^k v_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i v_i$$

Η παραπάνω σχέση ισοδύναμα γράφεται:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k x_i \frac{v_i}{n} = \sum_{i=1}^k x_i f_i$$

όπου f_i οι σχετικές συχνότητες.

☑ **Σταθμικός Μέσος** Στις περιπτώσεις που δίνεται διαφορετική βαρύτητα (έμφαση) στις τιμές x_1, x_2, \dots, x_n ενός συνόλου δεδομένων, τότε αντί του αριθμητικού μέσου χρησιμοποιούμε τον **σταθμισμένο αριθμητικό μέσο** ή **σταθμικό μέσο** (weighted mean). Εάν σε κάθε τιμή x_1, x_2, \dots, x_n δώσουμε διαφορετική βαρύτητα, που εκφράζεται με τους λεγόμενους συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) w_1, w_2, \dots, w_n , τότε ο σταθμικός μέσος βρίσκεται από τον τύπο:

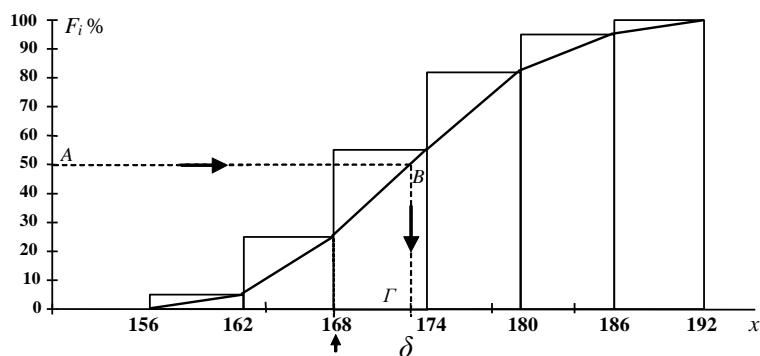
$$\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

☑ **Διάμεσος (δ)** Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν 9 μαθητές, για να λύσουν ένα πρόβλημα είναι: 3, 5, 5, 36, 6, 7, 4, 7, 8 με μέση τιμή $\bar{x} = 9$. Παρατηρούμε όμως ότι οι οκτώ από τις εννέα παρατηρήσεις είναι μικρότερες του 9 και μία (ακραία τιμή), η οποία επηρεάζει και τη μέση τιμή είναι, αρκετά μεγαλύτερη του 9. Αυτό σημαίνει ότι η μέση τιμή δεν ενδείκνυται ως μέτρο θέσης (“κέντρο”) των παρατηρήσεων αυτών. Αντίθετα, ένα άλλο μέτρο θέσης που δεν επηρεάζεται από ακραίες παρατηρήσεις είναι η **διάμεσος** (median), η οποία ορίζεται ως εξής:

Διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το n είναι περιττός αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το n είναι άρτιος αριθμός.

☐ **ΣΧΟΛΙΟ** : Παρατηρούμε ότι, η διάμεσος είναι η τιμή που χωρίζει ένα σύνολο παρατηρήσεων σε δύο ίσα μέρη όταν οι παρατηρήσεις αυτές τοποθετηθούν με σειρά τάξης μεγέθους. Ακριβέστερα, **η διάμεσος είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν.**

☑ **Διάμεσος σε Ομαδοποιημένα Δεδομένα** : Θεωρούμε τα δεδομένα του ύψους των μαθητών στον παραπάνω πίνακα και το αντίστοιχο ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων με την πολυγωνική γραμμή, σχήμα 3. Η διάμεσος, όπως ορίστηκε, αντιστοιχεί στην τιμή $x = \delta$ της μεταβλητής X (στον οριζόντιο άξονα), έτσι ώστε το 50% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες ή ίσες του δ . Δηλαδή, η διάμεσος θα έχει αθροιστική σχετική συχνότητα $F_i = 50\%$. Εφόσον στον κάθετο άξονα έχουμε τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες, από το σημείο A (50% των παρατηρήσεων) φέρουμε την $AB \parallel Ox$ και στη συνέχεια τη $B\Gamma \perp Ox$. Τότε, στο σημείο Γ αντιστοιχεί η διάμεσος δ των παρατηρήσεων. Δηλαδή, $\delta \approx 173$.



☑ **μέτρα διασποράς** ή μεταβλητότητας λέγονται τα μέτρα που εκφράζουν τις αποκλίσεις των τιμών μιας μεταβλητής γύρω από τα μέτρα κεντρικής τάσης.

☑ **Εύρος** ή **κύμανση (R)** ορίζεται ως η διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης από τη μέγιστη παρατήρηση, δηλαδή:

Εύρος: $R = \text{Μεγαλύτερη παρατήρηση} - \text{Μικρότερη παρατήρηση}$

☑ Ένας άλλος τρόπος για να υπολογίσουμε τη διασπορά των παρατηρήσεων t_1, t_2, \dots, t_v μιας μεταβλητής X θα ήταν να αφαιρέσουμε τη μέση τιμή \bar{x} από κάθε παρατήρηση και να βρούμε τον αριθμητικό μέσο των διαφορών αυτών, δηλαδή τον αριθμό:

$$\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + \dots + (t_v - \bar{x})}{v} = \frac{\sum_{i=1}^v (t_i - \bar{x})}{v}$$

Ο αριθμός όμως αυτός είναι ίσος με μηδέν, αφού

$$\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + \dots + (t_v - \bar{x})}{v} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_v}{v} - \frac{v\bar{x}}{v} = \bar{x} - \bar{x} = 0. \blacksquare$$

Γι' αυτό, ως ένα μέτρο διασποράς παίρνουμε τον μέσο όρο των τετραγώνων των αποκλίσεων των t_i από τη μέση τιμή τους \bar{x} .

☑ **Διακύμανση** ή **διασπορά (s^2)** είναι το μέτρο διασποράς που ορίζεται ως μέσο όρο των τετραγώνων των αποκλίσεων των t_i από τη μέση τιμή τους \bar{x} και ορίζεται από τη σχέση

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (t_i - \bar{x})^2$$

Ο τύπος αυτός αποδεικνύεται ότι μπορεί να πάρει την ισοδύναμη μορφή:

$$s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^v t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^v t_i \right)^2}{v} \right\} = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^v t_i^2 - v\bar{x}^2 \right\}$$

η οποία διευκολύνει σημαντικά τους υπολογισμούς κυρίως όταν η μέση τιμή \bar{x} δεν είναι ακέραιος αριθμός.

Όταν έχουμε πίνακα συχνοτήτων ή ομαδοποιημένα δεδομένα, η διακύμανση ορίζεται από τη σχέση:

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 v_i$$

ή την ισοδύναμη μορφή:

$$s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right\} = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - v\bar{x}^2 \right\}$$

όπου x_1, x_2, \dots, x_k οι τιμές της μεταβλητής (ή τα κέντρα των κλάσεων) με αντίστοιχες συχνότητες v_1, v_2, \dots, v_k .

☑ **Τυπική Απόκλιση (s)** είναι η θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης και δίνεται από

$$\text{τη σχέση: } s = \sqrt{s^2}$$

☞ **ΣΧΟΛΙΟ** : Η διακύμανση δεν εκφράζεται με τις μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις ενώ η τυπική απόκλιση εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες. Για παράδειγμα, αν οι παρατηρήσεις εκφράζονται σε cm, η διακύμανση εκφράζεται σε cm^2 ενώ η τυπική απόκλιση σε cm.

☑ **Συντελεστής Μεταβολής (CV)** : ορίζεται από το λόγο:

$$CV = \frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}} \cdot 100\% = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

Αν $\bar{x} < 0$ τότε αντί για \bar{x} χρησιμοποιούμε $|\bar{x}|$.

☞ **ΣΧΟΛΙΑ**:

1. Ο συντελεστής μεταβολής εκφράζεται επί τοις εκατό, είναι συνεπώς ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης και παριστάνει ένα μέτρο **σχετικής διασποράς** των τιμών και όχι της απόλυτης διασποράς, όπως έχουμε δει έως τώρα. Εκφράζει, δηλαδή, τη μεταβλητότητα των δεδομένων *απαλλαγμένη από την επίδραση της μέσης τιμής*.

2. Δεχόμαστε ότι ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής θα είναι **ομοιογενές**, εάν ο συντελεστής μεταβολής δεν ξεπερνά το 10%.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω x_1, x_2, \dots, x_n , n παρατηρήσεις με μέση τιμή \bar{x} και τυπική απόκλιση s_x .

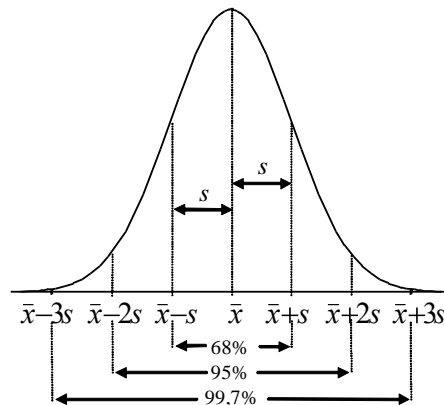
α) Αν y_1, y_2, \dots, y_n είναι οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν προσθέσουμε σε καθεμιά από τις x_1, x_2, \dots, x_n μια σταθερά c , τότε: i) $\bar{y} = \bar{x} + c$, ii) $s_y = s_x$

β) Αν y_1, y_2, \dots, y_n είναι οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις x_1, x_2, \dots, x_n επί μια σταθερά c , τότε: i) $\bar{y} = c \bar{x}$, ii) $s_y = |c| s_x$

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν η καμπύλη συχνοτήτων για το χαρακτηριστικό που εξετάζουμε είναι κανονική ή περίπου κανονική, τότε η τυπική απόκλιση s έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

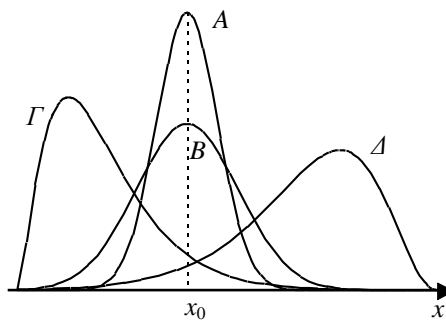
- i) το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$
- ii) το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$
- iii) το 99,7% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$
- iv) το εύρος ισούται περίπου με έξι τυπικές αποκλίσεις, δηλαδή $R \approx 6s$.



ΜΕΤΡΑ ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

Εκτός από τα μέτρα θέσης και διασποράς μιας κατανομής πολλές φορές είναι απαραίτητος και ο προσδιορισμός κάποιων άλλων μέτρων, που καθορίζουν τη **μορφή** της κατανομής. Κατά πόσο δηλαδή η αντίστοιχη καμπύλη συχνοτήτων είναι συμμετρική ή όχι ως προς την ευθεία $x = x_0$, για δεδομένο σημείο x_0 του άξονα $0x$. Τα μέτρα αυτά, που συνήθως εκφράζονται σε συνάρτηση με τα μέτρα θέσης και διασποράς, καλούνται **μέτρα ασυμμετρίας** (measures of skewness).

Υπολογίζοντας από ένα σύνολο δεδομένων κάποια από τα ανωτέρω μέτρα, μπορούμε να έχουμε μια σύντομη περιγραφή της μορφής της καμπύλης συχνοτήτων. Στο σχήμα οι καμπύλες συχνοτήτων A και B είναι συμμετρικές με το ίδιο "κέντρο" x_0 , αλλά η B έχει μεγαλύτερη μεταβλητότητα από την A . Οι καμπύλες Γ και Δ είναι ασύμμετρες, με τη Γ όπως λέμε να παρουσιάζει θετική ασυμμετρία και τη Δ αρνητική ασυμμετρία. Το "κέντρο" της Γ είναι αριστερότερα του x_0 , ενώ της Δ είναι δεξιότερα του x_0 . Η Δ παρουσιάζει μεγαλύτερη μεταβλητότητα από τη Γ .



3. ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1. Τι λέγεται **αιτιοκρατικό** πείραμα

Κάθε πείραμα κατά το οποίο η γνώση των συνθηκών κάτω από τις οποίες εκτελείται καθορίζει πλήρως το αποτέλεσμα λέγεται **αιτιοκρατικό** (deterministic) πείραμα

2. Τι ονομάζεται **πείραμα τύχης**

Ένα πείραμα ονομάζεται **πείραμα τύχης** όταν δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, μολονότι επαναλαμβάνονται (φαινομενικά τουλάχιστον) κάτω από τις ίδιες συνθήκες.

3. Ποια λέγονται **δυνατά αποτελέσματα ή δυνατές περιπτώσεις του πειράματος τύχης**.

Όλα τα αποτελέσματα που μπορούν να εμφανιστούν σε ένα πείραμα τύχης λέγονται **δυνατά αποτελέσματα ή δυνατές περιπτώσεις του πειράματος**.

4. Τι λέγεται **δειγματικός χώρος**.

Δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης λέγεται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων

5. Τι λέγεται **ενδεχόμενο**

Το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης λέγεται **ενδεχόμενο** (event) ή γεγονός

6. Πότε ένα ενδεχόμενο λέγεται **απλό** και πότε **σύνθετο**

Ένα ενδεχόμενο λέγεται **απλό** όταν έχει ένα μόνο στοιχείο και **σύνθετο** αν έχει περισσότερα στοιχεία.

7. Πότε λέμε ότι το ενδεχόμενο **πραγματοποιείται ή συμβαίνει**

Όταν το αποτέλεσμα ενός πειράματος, σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο αυτό **πραγματοποιείται ή συμβαίνει**

Γι' αυτό τα στοιχεία ενός ενδεχομένου λέγονται και **ευνοϊκές περιπτώσεις** για την πραγματοποίησή του

8. Ποιο λέγεται **βέβαιο ενδεχόμενο**.

Βέβαιο ενδεχόμενο είναι ενδεχόμενο, το οποίο πραγματοποιείται πάντοτε. Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος θεωρείται ότι είναι ενδεχόμενο, το οποίο μάλιστα πραγματοποιείται πάντοτε, αφού όποιο και αν είναι το αποτέλεσμα του πειράματος θα ανήκει στο Ω . Γι' αυτό το Ω λέγεται **βέβαιο ενδεχόμενο**.

9. Ποιο λέγεται **αδύνατο ενδεχόμενο**

Αδύνατο ενδεχόμενο λέγεται το ενδεχόμενο που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης. Δεχόμαστε ως ενδεχόμενο και το κενό σύνολο \emptyset που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης. Γι' αυτό λέμε ότι το \emptyset είναι το **αδύνατο ενδεχόμενο**

Πράξεις με Ενδεχόμενα

Το ενδεχόμενο A πραγματοποιείται	$\omega \in A$
Το ενδεχόμενο A δεν πραγματοποιείται	$\omega \in A'$ (ή $\omega \notin A$)
Ένα τουλάχιστον από τα A και B πραγματοποιείται	$\omega \in A \cup B$
Πραγματοποιούνται αμφότερα (ταυτόχρονα) τα A και B	$\omega \in A \cap B$
Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B	$\omega \in (A \cup B)'$
Πραγματοποιείται μόνο το A	$\omega \in A - B$ (ή $\omega \in A \cap B'$)
Η πραγματοποίηση του A συνεπάγεται την πραγματοποίηση του B	$A \subseteq B$

10. Πότε δυο ενδεχόμενα λέγονται ασυμβίβαστα

Δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται **ασυμβίβαστα**, όταν $A \cap B = \emptyset$.
 Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα λέγονται επίσης **ξένα μεταξύ τους** ή **αμοιβαίως αποκλειόμενα**.

11. Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα του ενδεχομένου A

Αν σε n εκτελέσεις ενός πειράματος ένα ενδεχόμενο A πραγματοποιείται k φορές, τότε ο λόγος $\frac{k}{n}$ ονομάζεται **σχετική συχνότητα του A** και συμβολίζεται με f_A .

Ιδιαίτερα αν ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος είναι το πεπερασμένο σύνολο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\lambda\}$ και σε n εκτελέσεις του πειράματος αυτού τα απλά ενδεχόμενα $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_\lambda\}$ πραγματοποιούνται $k_1, k_2, \dots, k_\lambda$ φορές αντιστοίχως, τότε για τις σχετικές συχνότητες $f_1 = \frac{k_1}{n}, f_2 = \frac{k_2}{n}, \dots, f_\lambda = \frac{k_\lambda}{n}$ των απλών ενδεχομένων θα έχουμε:

- i. $0 \leq f_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, \lambda$ (αφού $0 \leq k_i \leq n$)
- ii. $f_1 + f_2 + \dots + f_\lambda = \frac{k_1 + k_2 + \dots + k_\lambda}{n} = \frac{n}{n} = 1.$

12. Τι ονομάζεται στατιστική ομαλότητα ή νόμος των μεγάλων αριθμών.

Οι σχετικές συχνότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων ενός πειράματος σταθεροποιούνται γύρω από κάποιους αριθμούς (όχι πάντοτε ίδιους), καθώς ο αριθμός των δοκιμών του πειράματος επαναλαμβάνεται απεριόριστα. Το εμπειρικό αυτό εξαγόμενο, το οποίο επιβεβαιώνεται και θεωρητικά, ονομάζεται **στατιστική ομαλότητα ή νόμος των μεγάλων αριθμών**.

13. Ποιος είναι κλασικός ορισμό της πιθανότητας

Σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα ορίζουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου A τον αριθμό:
$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$
.

14. Ποιος είναι ο Αξιωματικός Ορισμός Πιθανότητας

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό, που τον συμβολίζουμε με $P(\omega_i)$, έτσι ώστε να ισχύουν:

- $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$
- $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_n) = 1.$

Τον αριθμό $P(\omega_i)$ ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$.

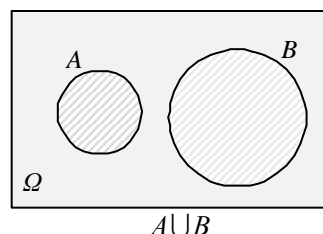
Ως πιθανότητα $P(A)$ ενός ενδεχομένου $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \neq \emptyset$ ορίζουμε το άθροισμα $P(A) = P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + \dots + P(\alpha_k)$, ενώ

Ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου \emptyset ορίζουμε τον αριθμό $P(\emptyset) = 0$.

Κανόνες Λογισμού των Πιθανοτήτων

1. Για οποιαδήποτε **ασυμβίβαστα** μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $N(A) = \kappa$ και $N(B) = \lambda$, τότε το $A \cup B$ έχει $\kappa + \lambda$ στοιχεία, γιατί αλλιώς τα A και B δε θα ήταν ασυμβίβαστα. Δηλαδή, έχουμε $N(A \cup B) = \kappa + \lambda = N(A) + N(B)$.

Επομένως:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} \\ &= \frac{N(A) + N(B)}{N(\Omega)} \\ &= \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} \\ &= P(A) + P(B) . \end{aligned}$$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **απλός προσθετικός νόμος** (simply additive law) και ισχύει και για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Έτσι, αν τα ενδεχόμενα A, B και Γ είναι ανά δύο ασυμβίβαστα θα έχουμε $P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma)$.

2. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει:

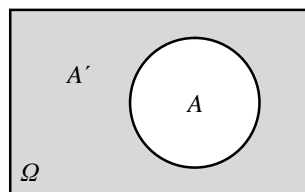
$$P(A') = 1 - P(A)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $A \cap A' = \emptyset$, δηλαδή τα A και A' είναι ασυμβίβαστα, έχουμε διαδοχικά, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο:

$$\begin{aligned} P(A \cup A') &= P(A) + P(A') \\ P(\Omega) &= P(A) + P(A') \\ 1 &= P(A) + P(A') . \end{aligned}$$

Οπότε $P(A') = 1 - P(A)$.



3. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για δυο ενδεχόμενα A και B έχουμε

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B) , \quad (1)$$

αφού στο άθροισμα $N(A) + N(B)$ το πλήθος των στοιχείων του $A \cap B$ υπολογίζεται δυο φορές.

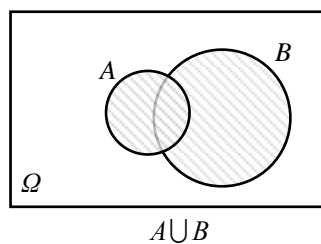
Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με $N(\Omega)$ έχουμε:

$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}$$

και επομένως

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) .$$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **προσθετικός νόμος** (additive law).

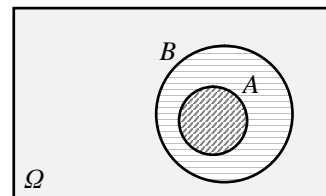


4. Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $A \subseteq B$ έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} N(A) &\leq N(B) \\ \frac{N(A)}{N(\Omega)} &\leq \frac{N(B)}{N(\Omega)} \\ P(A) &\leq P(B) . \end{aligned}$$



5. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή τα ενδεχόμενα $A - B$ και $A \cap B$ είναι ασυμβίβαστα και $(A - B) \cup (A \cap B) = A$, έχουμε:

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B).$$

Άρα $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

