

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ 1

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 9

A2. α) Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 3

β) Πότε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow R$ λέγεται συνάρτηση 1-1 ;

Μονάδες 3

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα, το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι Σωστή ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) $f^{-1}(f(x)) = x, x \in f(A)$.

Μονάδες 2

β) Αν $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε κατά ανάγκη $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$.

Μονάδες 2

γ) Αν f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

Μονάδες 2

δ) Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 , τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 πάντοτε.

Μονάδες 2

ε) Η συνάρτηση $f(x) = a^x, a > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x) = x \cdot a^{x-1}$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2 \ln(\sqrt{x-1} + 1) + 3$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1".

iii. Να ορίσετε την f^{-1} .

iv. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(1+x) = 2$.

Μονάδες (4+7+8+6)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και η συνάρτηση h με $h(x) = x^3 + e^x$ ώστε:

✓ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(f(0) - f(1)) \cdot x^5 + x^3 + 1}{f^2(1) \cdot x^2 + x + 1} = -\infty$

✓ $(g \circ g)(x) = f(0) \cdot g^3(x) + f(1) \cdot f(x^3 + e^x + 2015)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

✓ Η f γνησίως μονότονη.

Γ 1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα (Μονάδες 4) και ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα (Μονάδες 2).

Μονάδες 6

Γ 2. Να δείξετε ότι η g είναι $\lll 1 - 1 \ggg$.

Μονάδες 9

Γ 3. Αν η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} . Να δείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{f(0) \cdot x^4 + x^2}{f(1) \cdot x^2 + x + 1} + \eta \mu x \right) = +\infty.$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Δίνεται η συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση f , για την οποία ισχύει:

$$f(e^x \cdot \eta \mu x) = 2 \cdot e^x \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

i. Να δείξετε ότι $f'(0) = 2$.

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(0, f(0))$ είναι η $y = 2x + 2$.

Μονάδες (3+4)

B. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -e^{3x} - x^3 + 1$.

B1. Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

Μονάδες 6

B2. Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{f(x)}$.

Μονάδες 4

B3. α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της.

Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{-e^{3x} - x^3 - 2015} = 1$, έχει μοναδική ρίζα.

Μονάδες 3

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ