

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = -x^2 + 6x + 8$

A) Να υπολογίσετε την $f'(x)$ **Μονάδες 4**

B) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία. **Μονάδες 8**

Γ) Για ποια τιμή του x η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο; Να βρείτε το είδος του ακροτάτου. **Μονάδες 6**

2009 ΕΠΑΛ

- Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 + 4x + 2ae^x$,

$$\text{όπου } \alpha = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$$

A) Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α .

Μονάδες 5

B) Για $\alpha = 1$

α) Να υπολογίσετε την $f'(x)$ **Μονάδες 5**

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} **Μονάδες 5**

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=2$ και $x=4$, είναι ίσο με $84 + 2e^4 - 2e^2$ τ.μ.

2009 ΕΠΑΛ

Μονάδες 10

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο $f'(x)$. **Μονάδες 5**

β. Να προσδιορίσετε το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα και το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα. **Μονάδες 8**

γ. Να βρείτε τα ακρότατα της f . **Μονάδες 5**

δ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(1, f(1))$.

2009 ΓΕΝ. ΛΥΚ. ΕΣΠΕΡΙΝΑ

Μονάδες 7

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax - 7$, όπου a πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει

$$2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

α. Να δείξετε ότι $a = 9$ **Μονάδες 7**

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1}$ **Μονάδες 8**

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -3x$

2009 ΓΕΝ. ΛΥΚ

Μονάδες 10

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 - 8$, όπου a ένας πραγματικός αριθμός.

α. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -7$, να βρεθεί η τιμή του a **Μονάδες 5**

β. Έστω $a = 1$

i. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2}$ **Μονάδες 10**

ii. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$

2009 ΓΕΝ. ΛΥΚ. ΕΠΑΝΑΛ

Μονάδες 10

- Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{x-2}{e^x}, \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

α. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 10

γ. Να αποδείξετε ότι για $x = 3$ η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο ίσο με $\frac{1}{e^3}$

2009 ΤΕΕ

Μονάδες 7

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ**ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - kx^2 + \lambda x - 2 - \lambda$, όπου $k, \lambda \in \mathbb{R}$.

Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(0, -5)$ και η συνάρτηση f για $x=1$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, τότε:

α. Να βρείτε τις τιμές των k και λ

Μονάδες 13

β. Για $k=2$ και $\lambda=3$,

i. να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

Μονάδες 6

ii. να βρείτε την τιμή και το είδος των ακροτάτων της f .

2009 ΤΕΕ

Μονάδες 6

- Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \lambda x^2$, όπου λ πραγματικός αριθμός.

α. Να βρεθούν οι $f'(x)$ και $f''(x)$.

Μονάδες 6

β. Να προσδιορισθούν οι τιμές του λ , ώστε για κάθε πραγματικό αριθμό x να ισχύει:

$$f''(x) - f'(x) - 2f(x) = 0 \quad \text{Μονάδες 9}$$

γ. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία όταν

i) $\lambda = 2$,

ii) $\lambda = -1$.

Μονάδες 10

2008 ΤΕΕ

- Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2008$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος f' της f .

Μονάδες 6

β. Να εξεταστεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 12

γ. Να δειχθεί ότι $f(x) \geq 2008$ για κάθε πραγματικό αριθμό x , όπου $x \in [1, +\infty)$.

2008 ΤΕΕ

Μονάδες 7

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + kx + 2$, με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} και $k \in \mathbb{R}$.

A) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(3, 8)$, να βρείτε τον k .

Μονάδες 5

B) Για $k=-1$

α) Να αποδείξετε ότι: $f'(x) + f''(x) + 2 = (x+1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

2008 ΓΕΝ. ΛΥΚ. ΕΣΠΕΡΙΝΑ

Μονάδες 10

- Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x f(x)}{x^2 - 1}$.

Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι $e^x f'(x) = 2 - x$.

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)$.

Μονάδες 9

2008 ΓΕΝ. ΛΥΚ

- Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$.

Μονάδες 5

β. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

Μονάδες 8

γ. Να εξετασθεί η συνάρτηση $f(x)$ ως προς τη μονοτονία και να βρεθούν τα ακρότατά της.

2007 ΓΕΝ. ΛΥΚ. ΕΠΑΝΑΛ

Μονάδες 12

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΣΥΝΕΧΕΙΑ

- Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=xe^x+3$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι $f'(x)=f(x)+e^x-3$

Μονάδες 10

β. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - e^x}{x^2 - x}$.

2007 ΓΕΝ. ΛΥΚ

Μονάδες 15

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=10 \ln x - 5x^2$, $x > 0$.

α. Να βρείτε την παράγωγο f' της f .

Μονάδες 5

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 8

γ. Για ποια τιμή του x η f παρουσιάζει ακρότατο. Να προσδιορίσετε το είδος του ακροτάτου και να το υπολογίσετε.

Μονάδες 8

δ. Να δείξετε ότι $f(x) \leq -5$, για κάθε $x > 0$.

2007 ΤΕΕ

Μονάδες 4

- Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και την παράγωγό της.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 10

γ) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf'(x)}{f(x)}$.

2007 ΓΕΝ. ΛΥΚ. ΕΣΠΕΡΙΝΑ

Μονάδες 5

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x(ax^2 + \beta x + 9)$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(2, e^2)$ είναι $y = -e^2x + 3e^2$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = -6$.

Μονάδες 12

β. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 13

2000 ΓΕΝ. ΛΥΚ. ΕΣΠΕΡΙΝΑ

- Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + 1$, όπου $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

α) Το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f ως προς x , όταν $x = 2$.

Μονάδες 10

β) Τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 10

γ) Το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 3$.

2007 ΓΕΝ. ΛΥΚ. ΕΣΠΕΡΙΝΑ

Μονάδες 5

- Έστω $a \in \mathbb{R}$. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - ax - 8$ με πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} .

I. Να βρεθεί το $a \in \mathbb{R}$ αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$.

Μονάδες 5

II. Αν $a = -4$,

α) να βρεθεί η παράγωγος $f'(x)$.

Μονάδες 5

β) να βρεθεί το $x_0 \in \mathbb{R}$ στο οποίο η συνάρτηση $f(x)$ παρουσιάζει ακρότατο. Να βρεθεί αν το ακρότατο είναι μέγιστο ή ελάχιστο.

Μονάδες 10

γ) να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο $A(1, -2)$.

Μονάδες 5

2006 ΓΕΝ. ΛΥΚ. ΕΣΠΕΡΙΝΑ

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \ln x - \beta x^2$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

Μονάδες 3

β. Να βρείτε την παράγωγο της f για κάθε x , το οποίο ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

γ. Να βρείτε τα α και β , ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $A(1, 1)$ της γραφικής παράστασης της f να είναι $y = 3x - 2$.

Μονάδες 10

δ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} (f'(x) \cdot x^3)$.

Μονάδες 7

2005 ΓΕΝ. ΛΥΚ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ**ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.
 - α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. **Μονάδες 5**
 - β) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο $f'(x)$ και να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς 3 και -1. **Μονάδες 10**
 - γ) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f στο διάστημα $(1, +\infty)$. **Μονάδες 10**
- 2005 ΓΕΝ. ΛΥΚ
- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$.
 - α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f(x). **Μονάδες 5**
 - β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$. **Μονάδες 5**
 - γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$. **Μονάδες 7**
 - δ) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο $f'(x)$, της f(x). **Μονάδες 8**
- 2005 ΓΕΝ. ΛΥΚ
- Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x + 2}{e^x}$.
 - α. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης. **Μονάδες 9**
 - β. Να αποδείξετε ότι $f(x) + f'(x) = \frac{1}{e^x}$. **Μονάδες 8**
 - γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A $(0, f(0))$. **Μονάδες 8**
- 2004 ΓΕΝ. ΛΥΚ

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4(x - 2)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - α. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο $f'(x)$, της f(x). **Μονάδες 5**
 - β. Να αποδείξετε ότι: $x f''(x) - f'(x) = 4$. **Μονάδες 6**
 - γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$. **Μονάδες 7**
 - δ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα. **Μονάδες 7**
- 2004 ΓΕΝ. ΛΥΚ
- Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 5x + 6$ και $g(x) = x - 3$, όπου $x \in \mathbb{R}$.
 - α) Να βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$. **Μονάδες 8**
 - β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)}$. **Μονάδες 7**
 - γ) Αν $f'(x)$ και $g'(x)$ είναι οι παράγωγοι των συναρτήσεων f(x) και g(x) αντίστοιχα, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = 3f'(200) + 819g'(-1)$. **Μονάδες 10**
- 2004 ΓΕΝ. ΛΥΚ
- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{1 + x^2}$, όπου $x \in \mathbb{R}$.
 - Να βρείτε:
 - α) το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, **Μονάδες 2**
 - β) το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f ως προς x, όταν $x = 1$, **Μονάδες 3**
 - γ) τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και αυτά στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα, **Μονάδες 10**
 - δ) τα ακρότατα της συνάρτησης f, **Μονάδες 5**
 - ε) την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο A $(1, f(1))$. **Μονάδες 5**
- 2004 ΓΕΝ. ΛΥΚ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x^2}{4x^2 + 5}$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε :

α) το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$,

Μονάδες 5

β) το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$,

Μονάδες 5

γ) την παράγωγο της συνάρτησης f ,

Μονάδες 5

δ) τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και αυτά στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα και

Μονάδες 5

ε) τα ακρότατα της συνάρτησης f .

2003 ΓΕΝ. ΛΥΚ. ΕΣΠΕΡΙΝΑ

Μονάδες 5

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

β. Να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της f , όταν $x=3$, ισούται με

$$\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Μονάδες 10

γ. Αν $h(x) = \frac{f(x) - \sqrt{3}}{-2}$ για $x \neq 2$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$.

Μονάδες 10

2003 ΓΕΝ. ΛΥΚ. ΕΠΑΝΑΛ

- Ένα χελιδόνι πετάει και το ύψος του h (σε μέτρα), από το έδαφος, δίνεται σε συνάρτηση με το χρόνο t (sec) από τον τύπο:

$$h(t) = 3t^2 - 6t + 5, \quad 0 \leq t \leq 5$$

Να βρείτε :

α) το ύψος στο οποίο το χελιδόνι βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t = 0$,

Μονάδες 6

β) το ρυθμό μεταβολής του ύψους h , ως προς t , τη χρονική στιγμή $t = 2$,

Μονάδες 7

γ) σε ποια χρονική στιγμή t το ύψος του χελιδονιού από το

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

A. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο :

α. \mathbb{R} β. $(-1, 1)$ γ. $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ δ. $(1, +\infty)$

Μονάδες 5

B. Να αποδείξετε ότι $f'(x) < 0$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 7

Γ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -1} [(x+1) \cdot f(x)]$

Μονάδες 6

Δ. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0, f(0))$ με τον άξονα $x'x$.

2003 ΓΕΝ. ΛΥΚ

Μονάδες 7

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 19}$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε :

α) το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$,

Μονάδες 6

β) την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f , και

Μονάδες 9

γ) τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και αυτά στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα.

2003 ΓΕΝ. ΛΥΚ. ΕΣΠΕΡΙΝΑ

Μονάδες 10

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες 4

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} (x)$.

Μονάδες 4

γ. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της f .

Μονάδες 7

δ. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της καμπύλης της συνάρτησης f που

17. Σε ποια χρονική στιγμή το ύψος του λακωνίου από το έδαφος γίνεται ελάχιστο και ποιο είναι τότε το ύψος αυτό;

2003 ΓΕΝ. ΛΥΚ. ΕΣΠΕΡΙΝΑ

Μονάδες 12

18. Να ρεθούν οι εφαπτομένες της καμπύλης της συνάρτησης $f(x)$ που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = 2x + 5$.

2002 ΓΕΝ. ΛΥΚ

Μονάδες 10