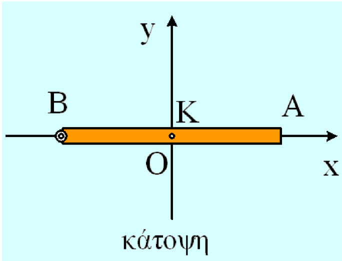
Όταν σπάει ο άξονας…



Μια ομογενής ράβδος ΑΒ μήκους l=2m, ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, με το κέντρο της Κ να συμπίπτει με την αρχή Ο, ενός ορθογωνίου συστήματος αξόνων, όπως στο σχήμα (σε κάτοψη). Σε μια στιγμή $t_0=0$, στην ράβδο ασκείται μια κατάλληλη οριζόντια δύναμη F, η ροπή της οποίας την θέτει σε οριζόντια περιστροφή, γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα z, ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Β, με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $α_γ=4/π$ rad/s^2. Η ράβδος στρέφεται αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού, μέχρι τη στιγμή $t_1=3{,}14$s, όπου ο άξονας σπάει, χωρίς να ασκήσει κάποια επιπλέον δύναμη στη ράβδο, ενώ ταυτόχρονα παύει να ασκείται πάνω της η δύναμη F.

i) Ελάχιστα πριν σπάσει ο άξονας z, να βρεθούν:

α) Η θέση της ράβδου και

β) Οι ταχύτητες του κέντρου μάζας Κ και του άκρου Α της ράβδου.

ii) Αφού περιγράψετε πλήρως την κίνηση της ράβδου μετά το σπάσιμο του άξονα, να βρείτε την χρονική στιγμή $t_2=13π/8$ s:

α) Τη θέση της ράβδου,

β) Τις ταχύτητες των δύο άκρων Α και Β της ράβδου.

Απάντηση:

i) Αφού η ράβδος περιστρέφεται γύρω από το Β με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση, θα εκτελεί κίνηση στροφική ομαλά επιταχυνόμενη και κατά αναλογία με την ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση θα ισχύουν οι εξισώσεις:

$$ω = α_γ \cdot t \ \ (1) \quad και \quad Δθ=\frac{1}{2}α_γ \cdot t^2 \ \ (2)$$

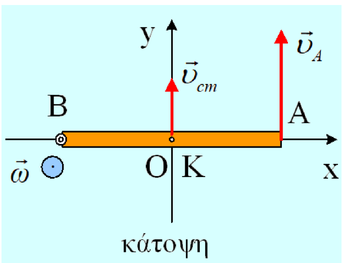
α) Με αντικατάσταση του χρόνου στην (2), παίρνουμε για την στιγμή t_1 που σπάει ο άξονας:

$$Δθ_1=\frac{1}{2}α_γ \cdot t_1^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{π}\cdot π^2 \ \ rad = 2π \ rad$$

βλέπουμε δηλαδή τη ράβδο να έχει εκτελέσει μια πλήρη περιστροφή και να βρίσκεται ξανά στην αρχική της θέση, όπου το κέντρο μάζας της Κ, βρίσκεται στην αρχή των αξόνων Ο.

β) Με αντικατάσταση στην παραπάνω εξίσωση (1) βρίσκουμε την γωνιακή ταχύτητα $ω_1$:

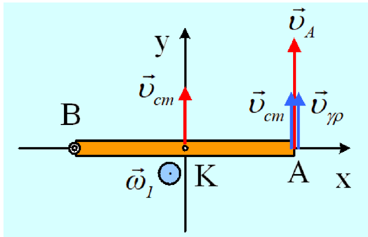
$$ω_1 = α_γ \cdot t_1 = \frac{4}{π}\cdot π \ rad/s=4 \ rad/s$$



Με κατεύθυνση όπως στο σχήμα. Αλλά τότε για τα μέτρα των ταχυτήτων του κέντρου μάζας Κ και του άκρου Α, οι οποίες έχουν σχεδιαστεί στο διπλανό σχήμα (κάθετες στην ράβδο, στην διεύθυνση του άξονα y), έχουμε:

$$\upsilon_K = \upsilon_{cm} = \omega \cdot \frac{l}{2} = 4 \cdot \frac{2}{2} m/s = 4m/s \ \ \kappa\alpha\iota$$
$$\upsilon_A = \omega \cdot l = 4 \cdot 2m/s = 8m/s$$

ii) Το σπάσιμο του άξονα δεν συνοδεύεται με την άσκηση κάποιας επιπλέον δύναμης ή ροπής, με αποτέλεσμα οι ταχύτητες όλων των σημείων της ράβδου να μην μεταβάλλονται. Έτσι τα σημεία Κ και Α, αμέσως μετά το σπάσιμο, έχουν τις ταχύτητες που υπολογίσαμε παραπάνω. Αφού όμως οι ταχύτητες των δύο αυτών σημείων είναι διαφορετικές η κίνηση της ράβδου δεν θα είναι μεταφορική, αλλά σύνθετη.



Μπορούμε λοιπόν με βάση την αρχή της επαλληλίας, να θεωρήσουμε ότι η ράβδος εκτελεί μια μεταφορική κίνηση, με ταχύτητα ίση με αυτή του κέντρου μάζας Κ και μια στροφική, γύρω από νοητό κατακόρυφο άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο μάζας Κ με γωνιακή ταχύτητα ω_1. Τότε όμως η ταχύτητα του άκρου Α υ_A θα προκύπτει ως το διανυσματικό άθροισμα της υ_{cm} εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης και της γραμμικής ταχύτητας, εξαιτίας της κυκλικής κίνησής του γύρω από το Κ. Οπότε:

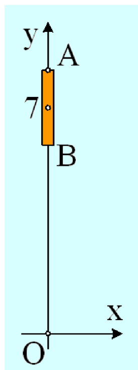
$$\upsilon_A = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho} = \upsilon_{cm} + \omega_1 \cdot \frac{l}{2} \rightarrow$$
$$\omega_1 = \frac{2(\upsilon_A - \upsilon_{cm})}{l} = \frac{2(8-4)}{2} rad/s = 4rad/s$$

Σχόλιο:

Προφανώς κάποιος θα μπορούσε να εκμεταλλευτεί την ταχύτητα του σημείου Β, η οποία είναι μηδενική,συνεπώς οι ταχύτητες υ_{cm} και η $\upsilon_{\gamma\rho}$=ωr είναι αντίθετες, με μέτρο ίσο με 4m/s.

Προσοχή:

Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου για την περιστροφή της γύρω από τον άξονα στο Κ, είναι ίδια με την γωνιακή ταχύτητα, γύρω από τον άξονα στο άκρο της Β. Όταν ένα στερεό στρέφεται (δηλαδή αλλάζει προσανατολισμό) έχει **μία και μόνο μία** γωνιακή ταχύτητα ανεξάρτητα του πραγματικού ή νοητού άξονα γύρω από τον οποίο εμείς θεωρούμε ότι στρέφεται!!!



Από κει και ύστερα, στην ράβδο δεν ασκούνται κάποιες δυνάμεις που να μεταβάλλουν την ταχύτητά του κέντρου μάζας, οπότε η μεταφορική κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή, αλλά και δεν ασκείται και κάποιο ζεύγος δυνάμεων, η ροπή του οποίου να μεταβάλλει την γωνιακή ταχύτητα, η οποία παραμένει επίσης σταθερή.

Έτσι η στροφική κίνηση θα είναι επίσης ομαλή.

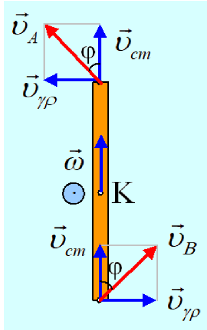
α) Το κέντρο μάζας Κ, κινούμενο ευθύγραμμα και ομαλά κατά μήκος του άξονα y, τη στιγμή t_2, έχοντας κινηθεί για χρονικό διάστημα $\Delta t_2 = t_2 - t_1 = 5\pi/8$ s, θα βρίσκεται στη θέση y_2:

$$\Delta y = y_2 = \upsilon_{cm} \cdot \Delta t_2 = 4 \cdot \frac{5\pi}{8} m = 2,5\pi \ m \approx 7,6m$$

Ενώ θα έχει στραφεί κατά γωνία $\Delta\theta_2$:

$$\Delta\theta_2 = \omega \cdot \Delta t_2 = 4 \cdot \frac{5\pi}{8} rad = 2{,}5\pi \ rad$$

Συνεπώς η θέση της ράβδου, θα είναι αυτή που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.



β) Με βάση το διπλανό σχήμα, έχουμε για τα άκρα Α και Β, τις ταχύτητες λόγω μεταφορικής και λόγω στροφικής κίνησης, όπου το αντίστοιχο παραλληλόγραμμο, μας δίνει την συνολική ταχύτητα κάθε άκρου. της ράβδου. Αφού $\upsilon_{cm}=\upsilon_{\gamma\rho}$, το παραλληλόγραμμο γίνεται τετράγωνο, άρα οι ταχύτητες σχηματίζουν με τον κατά μήκος άξονα της ράβδου ΑΒ, γωνία φ=45° (του Α προς τα αριστερά του άξονα, το Β προς τα δεξιά).

Για τα μέτρα των ταχυτήτων έχουμε:

$$\upsilon_A = \upsilon_B = \sqrt{\upsilon_{cm}^2 + \upsilon_{\gamma\rho}^2} = \sqrt{2\upsilon_{cm}^2} = \upsilon_{cm}\sqrt{2} = 4\sqrt{2} m/s$$

dmargaris@gmail.com