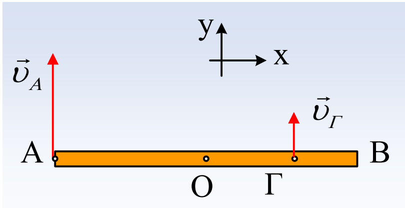
Ταχύτητες και επιταχύνσεις σε δοκό



Μια ομογενής δοκός ΑΒ μήκους l=2m, κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, με την επίδραση κατάλληλων μεταβλητών οριζοντίων δυνάμεων. Σε μια στιγμή t_1, η δοκός έχει την διεύθυνση του άξονα x, ενώ τα σημεία Α και Γ έχουν ταχύτητες στην διεύθυνση του άξονα y, όπως στο σχήμα (σε κάτοψη). Το άκρο Α της δοκού, έχει ταχύτητα μέτρου υ_A=3m/s, ενώ το σημείο Γ, όπου (ΒΓ)=0,4m, έχει ταχύτητα με την ίδια κατεύθυνση μέτρου υ_Γ=1,4m/s.

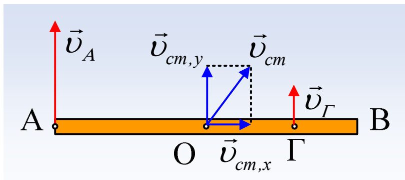
Την στιγμή αυτή **στην διεύθυνση y**, το σημείο Α, έχει επιτάχυνση μέτρου α_A=6m/s^2, ίδιας κατεύθυνσης με την ταχύτητα υ_A, ενώ το σημείου Γ έχει επιτάχυνση αντίθετης φοράς, μέτρου α_Γ=0,4m/s^2. Αν το κέντρο μάζας Ο, δεν έχει επιτάχυνση στην διεύθυνση x:

i) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του μέσου (και κέντρου μάζας) Ο της δοκού, καθώς και η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της, γύρω από νοητό κατακόρυφο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το Ο.

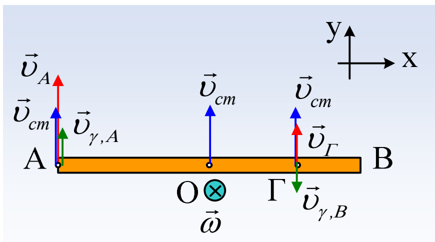
ii) Έχουν μήπως τα σημεία Α και Γ επιτάχυνση και στην διεύθυνση x; Αν ναι ποιο σημείο έχει μεγαλύτερη κατά μέτρο επιτάχυνση σε αυτήν την διεύθυνση;

iii) Να υπολογιστούν η επιτάχυνση του κέντρου Ο, καθώς και η γωνιακή επιτάχυνση της δοκού.

Απάντηση:



Προφανώς δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων τις κατευθύνσεις της ταχύτητας του κέντρου (και κέντρου μάζας) Ο, ούτε της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής. Αλλά αν υποθέσουμε ότι η δοκός έχει ταχύτητα κέντρου μάζας, όπως στο σχήμα, τότε η συνιστώσα $\upsilon_{cm,x}$ θα εμφανιζόταν και σαν συνιστώσα ταχύτητας και στα σημεία Α και Γ. Συνεπώς η υ_{cm} είναι κάθετη στη δοκό, όπως και οι δυο ταχύτητες που μας δόθηκαν.



i) Θεωρώντας την κίνηση της δοκού ως αποτελούμενη από μια μεταφορική κίνηση με ταχύτητα κέντρου μάζας υ_{cm} και μια περιστροφική γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το μέσον της Ο, με γωνιακή ταχύτητα ω, τότε τα σημεία Α και Γ, θα έχουν τις συνιστώσες ταχύτητας, όπως στο διπλανό σχήμα, όπου:

$$\upsilon_{\gamma,A} = \omega \cdot \frac{l}{2} \quad \kappa\alpha\iota \quad \upsilon_{\gamma,\Gamma} = \omega \cdot (O\Gamma)$$

Αλλά τότε για την ταχύτητά του σημείου Α θα έχουμε:

$$\upsilon_A = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma,1} = \upsilon_{cm} + \omega \cdot \frac{l}{2} \qquad (1)$$

Με την ίδια λογική το σημείο Γ:

$$\upsilon_{\Gamma}=\upsilon_{cm}-\upsilon_{\gamma,2}=\upsilon_{cm}-\omega\cdot(O\Gamma) \quad (2)$$

Με αφαίρεση των εξισώσεων (1) και (2) παίρνουμε:

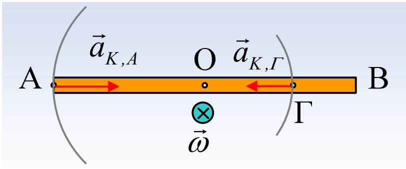
$$\upsilon_{A}-\upsilon_{\Gamma}=\omega\cdot(AO)+\omega\cdot(O\Gamma)\rightarrow$$

$$\omega=\frac{\upsilon_{A}-\upsilon_{\Gamma}}{(AO)+(O\Gamma)}=\frac{3-1,4}{1+0,6}\,{rad}/{s}=1\,{rad}/{s}$$

Και με αντικατάσταση στην (1):

$$\upsilon_{cm}=\upsilon_{A}-\omega\cdot(AO)=3\,{m}/{s}-1\cdot 1\,{m}/{s}=2\,{m}/{s}$$

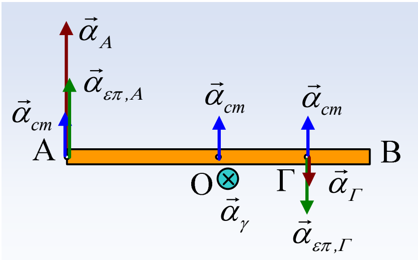
ii) Με βάση την παραπάνω θεώρηση για την σύνθετη κίνηση, τα σημεία Α και Γ, διαγράφουν κυκλικές τροχιές με κέντρο το Ο και ακτίνες (ΑΟ)=1m και (ΓΟ)=0,6m. Αλλά τότε έχουν και κεντρομόλο επιτάχυνση στη διεύθυνση x, όπως στο σχήμα, με μέτρα:



$$\alpha_{K,A}=\omega^{2}\cdot(AO) \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \alpha_{K,\Gamma}=\omega^{2}\cdot(\Gamma O)$$

Προφανώς αφού (ΑΟ) > (ΓΟ) θα έχουμε και $\alpha_{K,A}>\alpha_{K,\Gamma}$.

iii) Δουλεύουμε με τον ίδιο τρόπο και για τις επιταχύνσεις των σημείων Α και Γ, στην διεύθυνση y, αγνοώντας την κεντρομόλο επιτάχυνση κάθε σημείου, η οποία οφείλεται στην κυκλική του κίνηση, γύρω από το Ο. Έτσι κάθε σημείο έχει την επιτάχυνση του κέντρου μάζας, λόγω μεταφορικής κίνησης και την επιτρόχια επιτάχυνση, λόγω στροφικής κίνησης. Υποθέτουμε ξανά ότι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας Ο είναι προς τα πάνω και ότι η γωνιακή επιτάχυνση έχει την ίδια κατεύθυνση με την γωνιακή ταχύτητα, όπως στο σχήμα. Έτσι για τα σημεία Α και Γ, θα έχουμε (δουλεύουμε με μέτρα):



$$\alpha_{A}=\alpha_{cm}+\alpha_{\varepsilon\pi,A}=\alpha_{cm}+\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot(AO) \quad (3)$$

$$\alpha_{\Gamma}=\alpha_{\varepsilon\pi,\Gamma}-\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot(\Gamma O)-\alpha_{cm} \quad (4)$$

Με πρόσθεση των εξισώσεων (3) και (4) παίρνουμε:

$$\alpha_{A}+\alpha_{\Gamma}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot(AO)+\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot(\Gamma O)\rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu}=\frac{\alpha_{A}+\alpha_{\Gamma}}{(AO)+(\Gamma O)}=\frac{6+0,4}{1+0,6}\,{rad}/{s^{2}}=4\,{rad}/{s^{2}}$$

Και με αντικατάσταση στην (3):

$$\alpha_{cm}=\alpha_{A}-\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot(AO)=6\,{m}/{s^{2}}-4\cdot 1\,{m}/{s^{2}}=2\,{m}/{s^{2}}$$

dmargaris@gmail.com